

SUPERPREVODNOST

1.

1. FENOMENOLOGIJA

$\rho = 0$ za $T < T_c \rightarrow$ persistencijski tokovi & relaksacijskim časom $> 10^5$ let

$T_c = 9,2 K$ Nb najnižji med elementi

$T_c = 23,2 K$ Nb₃Ge zlitine

$T_c = 18,3 K$ Nb₃Sn

$T_c = 10 K$ NbTi

} za praktične inženjerske aplikacije

$T_c = 35 K$ LBCO visokotemperaturni SC, kuprati

$T_c = 93 K$ YBCO

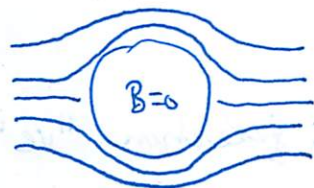
$T_c = 38 K$ MgB₂

$T_c = 40 K$ Cs₃Co fuleridi

$T_c > 200 K$ hidridi, H₂S, pod visokim tlakom

Meissnerjev pojav

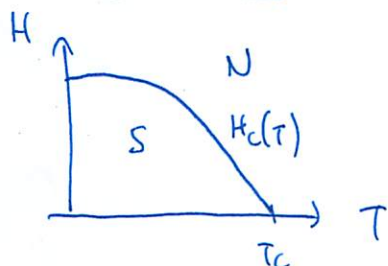
$$B = \mu_0 (H + M) = \mu_0 (1 + \chi) H$$



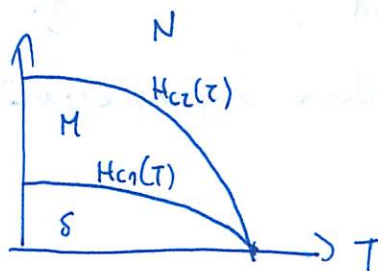
$B=0$ $\chi = -1$ idealni diamagnet

To je standardni test za preverjanje, če je vzorec res superprevoden.

Kritično polje



tip I



tip II

TEORIJA LONDONOV: (konstitivni zakon za superprevodnike)

$$\vec{j}_s = -\frac{n_s e^2}{m} \vec{A}(\vec{r}) \quad B(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$$

$\text{div } \vec{A} = 0$ izbirna umeitve (iz $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ potem sledi $\vec{j} = 0$)

$\vec{A} = 0$ v notranjosti

Ampereov zakon:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta B(\vec{r}) = \frac{\mu_0 n_s e^2}{m} B(\vec{r})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B}$$

Valovna dolžina $\lambda_L = \left(\frac{m}{\mu_0 n_s e^2} \right)^{1/2}$

Razloži Meissnerjev pojav.

Plazemska frekvenca $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0}$ $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

Če vzamemo $n_s = n$, sledi $\lambda_L = \frac{c}{\omega_p}$. Tipično $\lambda_L \sim 100 \text{ nm}$ (UV).

Ideja: pojav velikega porazna s kvantno mehaniko.

$$\vec{v} = (\vec{p} - e\vec{A})/m$$

$$\vec{j}_s = -\frac{e_0}{m} \langle \psi | \vec{p} + e_0 \vec{A} | \psi \rangle = -\frac{e_0}{m} \langle \psi | \vec{p} | \psi \rangle - \frac{e_0^2}{m} \langle \psi | \psi \rangle \vec{A}$$

Pri $\vec{A} = 0$, $\langle \psi | \vec{p} | \psi \rangle = 0$. Osnovno stanje naj bi imelo "nigidnost" zato predpostavimo, da to velja tudi za $\vec{A} \neq 0$. Smiselno, ker obstaja energijska reža. Podobno velja v izolatorjih pri $\vec{E} \neq 0$.

$\langle \psi | \psi \rangle = n_s$, z ustrežno normalizacijo.

NELOKALNA POSLOŠITEV (PIPPARD):

ξ , koherentna razdalja, razdalja na kateri elektron "ve", da je superprevoden.

$$\vec{j}_s = -\frac{3}{4\pi\xi_0} \frac{ns_0^2}{m} \int d\vec{r}' \frac{\vec{R} [\vec{R} \cdot \vec{A}(\vec{r}')]]}{R^4} e^{-R/\xi} \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

ξ_0 je ξ v čistem superprevodniku

$$\frac{1}{\xi} = \frac{1}{\xi_0} + \frac{1}{\lambda}$$

tip II, $\lambda > \xi$, se reducira na Londonovo enačbo

tip I, $\lambda < \xi$, potreben opis s Pippardovo enačbo, uveljavljive posledice (spreminjanje valovne dolžine z dopiranjem)

2. IZVOR PRIVLAČNE INTERAKCIJE

2.

Interakcija sencijsko tako drugi elektroni kot ioni. Pri slednjih je možno "prekomerno sencijsje". Možni so tudi nefononski mehanizmi. (Ko pišemo "elektron", imamo v resnici v mislih Landauove kvazidelce.)

ELEKTRONSKO-FONONSKA SKLOPITEV:

$$H_0 = \sum_{k\sigma} \epsilon_k c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma} + \sum_{\mathbf{q}} \hbar \omega_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{q}}$$

$$H_1 = \sum_{\mathbf{k}\mathbf{q}\sigma} M_{\mathbf{k}\mathbf{q}} c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} (a_{\mathbf{q}} + a_{-\mathbf{q}}^\dagger)$$

} Predpostavili smo, da je en sam dominanten fononski način.

$$M_{\mathbf{k}\mathbf{q}} \approx M_{\mathbf{q}} \quad M_{-\mathbf{q}} = M_{\mathbf{q}}^*$$

Fröhlichov Hamiltonian. V izpeljavi se pojavi faktor $\mathbf{q} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{q}}$, zato prispevajo samo longitudinalni akustični fononi.

$$M_{\mathbf{q}} = -i \sqrt{\frac{4\pi N}{2M\omega_{\mathbf{q}}}} \mathbf{q} V(\mathbf{q})$$

↑ Fourierova transformacija potenciala $V(\mathbf{r}-\mathbf{R})$ med elektroni in ioni (zasenceno Coulombovska interakcija)

SEMINAR: izpeljava!

NE, DO TU, 15.4.2024...

EFEKTIVNI HAMILTONIAN:

$$\tilde{H} = e^{-S} H e^S \quad |\tilde{\psi}\rangle = e^{-S} |\psi\rangle$$

S antihermitični, $S^\dagger = -S$ $[H, S], S$

$$\tilde{H} = H + [H, S] + \frac{1}{2} [[H, S], S] + \dots$$

$$= H_0 + H_1 + [H_0, S] + [H_1, S] + \frac{1}{2} [[H_0, S], S] + \dots$$

(kanonični)
Metoda unitarnih transformacij se prvič pojavi pri izpeljavi Schrödingerjeve enačbe iz Diracove (Foldy-Wouthuysen). (1949)
v tehniki Schrieffer-Wolffove transformacije.

Izberemo S , tako da bo $H_1 + [H_0, S] = 0$. Tedaj bo $\tilde{H} = H_0 + \frac{1}{2} [[H_1, S], S] + \dots$

Nastavek:

$$S = \sum_{\mathbf{k}\mathbf{q}\sigma} M_{\mathbf{q}} (\beta_{\mathbf{k}\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}} + \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{q}} a_{-\mathbf{q}}^\dagger) c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} \Rightarrow \text{effective-e-e-interaction}$$

$$\text{Sledi } \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{q}} = \frac{1}{\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}} + \hbar\omega_{\mathbf{q}}}$$

$$\beta_{\mathbf{k}\mathbf{q}} = \frac{1}{\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}} - \hbar\omega_{\mathbf{q}}}$$

$$\alpha - \beta = \frac{2\hbar\omega_{\mathbf{q}}}{(\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}})^2 - (\hbar\omega_{\mathbf{q}})^2}$$

Privlačno, če $|\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}}| < \hbar\omega_{\mathbf{q}}$

$$H_{\text{eff}} = H_0 + \frac{1}{2} [[H_1, S], S] = H_0 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{q}\sigma\sigma'} |M_{\mathbf{q}}|^2 c_{\mathbf{k}-\mathbf{q}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma'} (\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{q}} - \beta_{\mathbf{k}\mathbf{q}})$$

3. COOPERJEV PROBLEM (1956)

Problem dveh dodatnih elektronov nad Fermijevo površino:

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{k_1, k_2} b_{k_1 k_2} e^{i k_1 \cdot \vec{r}_1} e^{i k_2 \cdot \vec{r}_2} = \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} a_{\vec{k} \vec{k}'} e^{i \vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} e^{i \vec{k}' \cdot \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}}$$

Nepremično težišče, $g=0$, zato ker nas zanima samo osnovno stanje.

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}} e^{i \vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}$$

$k \geq k_F$, ostala stanja zasedena
(edini učinki vseh ostalih elektronov)

$$\langle \vec{k} | H | \psi \rangle = \sum_{\vec{k}'} \langle \vec{k} | H | \vec{k}' \rangle \langle \vec{k}' | \psi \rangle = E \langle \vec{k} | \psi \rangle$$

$U(\vec{r}) = -V \delta(\vec{r}) \Rightarrow$ privlačna kontaktna

$$\langle \vec{k} | H | \vec{k}' \rangle = 2\varepsilon_{\vec{k}} \delta_{\vec{k} \vec{k}'} - V$$

$$V = + \int d\vec{r} e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}} U(\vec{r}) e^{i \vec{k}' \cdot \vec{r}}$$

$$2\varepsilon_{\vec{k}} a_{\vec{k}} - V \sum_{\vec{k}'} a_{\vec{k}'} = E a_{\vec{k}}$$

$a_{\vec{k}} = a(k)$, ker odvisnost od $\vec{k}$ pride samo od $\varepsilon_{\vec{k}} \neq k = |\vec{k}|$.

$$E = 2\varepsilon_F - \varepsilon$$

$$\varepsilon_{\vec{k}} = \varepsilon_F + \xi_{\vec{k}} \quad (\text{tudi sicer pričakujemo rezultat, ki je izotropen.})$$

(Tudi sicer pričakujemo rezultat, ki je izotropen.)

$$(2\xi_{\vec{k}} + \varepsilon) a(k) = V \int d\xi_{\vec{k}'} N(\xi_{\vec{k}'}) a(k')$$

$$N(\xi_{\vec{k}}) \approx N_0$$

$\leftarrow$ ker stanja z $k < k_F$ zasedena

$$C = \int_0^{\xi_{FD}} d\xi_{\vec{k}'} a(k') \Rightarrow a(k) = \frac{N_0 V C}{2\xi_{\vec{k}} + \varepsilon}$$

$$\frac{1}{N_0 V} = \int_0^{\xi_{FD}} \frac{d\xi_{\vec{k}'}}{2\xi_{\vec{k}'} + \varepsilon} = \frac{1}{2} \ln \frac{2\xi_{FD} + \varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\varepsilon = \frac{2\xi_{FD}}{e^{\frac{2}{N_0 V}} - 1} \approx 2\xi_{FD} e^{-\frac{2}{N_0 V}} \quad \text{v režimu šibke sklopitve, ko velja } \varepsilon \ll \xi_{FD}.$$

Neanalitično po V , tega ni mogoče izpeljati s težjo metodo, čeprav je sklopitev v šibka.

Vezano stanje vedno obstaja. Posledica Fermijevega morja! ^{Efektivno} $D=3 \Rightarrow D=2$.

Fizikalni zaključki iz te rešitve dodelčnega problema nam dajejo izhodišče za reševanje polnega večdelčnega problema.

4. REDUCIRANI HAMILTONIAN

3.

Najbolj splošna oblika:

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{kk'} V_{kk'} \tilde{C}_{\vec{k}+\vec{q}/2}^\dagger \tilde{C}_{-\vec{k}+\vec{q}/2}^\dagger \tilde{C}_{-\vec{k}+\vec{q}/2} \tilde{C}_{\vec{k}+\vec{q}/2}$$

Približni:

- $\vec{q}=0$, Cooperjevi pari se bodo zgoščili v stanje z minimumom kinetične energije
- cutoff pri $|\vec{k}| < k_F$, $|\vec{k}'| < k_F$
- $V_{kk'} \vec{q}=0$ nadomestimo z vrednostjo pri $|\vec{k}|=|\vec{k}'|=k_F$, ker v gladki funkciji + isotropnost ($l=0$):
- ko smo odvisnost upoštevamo t razvijemo po Legendrejevih polinomih in obdržimo dominanten člen (tisti, ki vodi k najnižji energiji). Za običajne superprevodnike je to $l=0$. $V_{kk'} \vec{q} \rightarrow -V$.
- spina elektronov v parih sta nasprotna, da bo valorna funkcija antisimetrična.

$$H_{\text{BCS}} = \sum_{k\sigma} \epsilon_k C_{k\sigma}^\dagger C_{k\sigma} - V \sum_{kk'} C_{k\uparrow}^\dagger C_{-k\downarrow}^\dagger C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} \quad |\vec{k}|, |\vec{k}'| < k_F$$

5. VALOVNA FUNKCIJA

$\Phi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ naj bo valovna funkcija enega para (za polni problem) Coulombovega z N elektroni

$\hat{O} = \int d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 \Phi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\vec{r}_1) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\vec{r}_2)$ je operator, ki ustvari stanje z dveh spajenih elektronov, če z njim delujemo na vakuum $|0\rangle$.

$$|\psi\rangle_N = \left[\int d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 \Phi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\vec{r}_1) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\vec{r}_2) \right]^{N/2} |0\rangle$$

Vakuum je tu definiran kot stanje z 0 elektroni.

$$c_k^{\dagger} = \int d^3\vec{r} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \psi^{\dagger}(\vec{r}) \quad \psi^{\dagger}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} c_k^{\dagger}$$

$$\Phi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \sum_{\vec{k}} \Phi_k e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} = \sum_{\vec{k}} \Phi_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_1} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_2}$$

$$\hat{O} = \sum_{\vec{k}} \Phi_k c_{k\uparrow}^{\dagger} c_{-k\downarrow}^{\dagger} \quad \uparrow \text{Fourierova transformacija parne valovne funkcije}$$

$$|\psi\rangle_N = \left(\sum_{\vec{k}} \Phi_k c_{k\uparrow}^{\dagger} c_{-k\downarrow}^{\dagger} \right)^{N/2} |0\rangle$$

Zelo težko je računati s takšnimi valovnimi funkcijami, ker zaradi Paulijeve prepovedi odpade ogromno členov. Vsi k v vsoti morajo biti različni. To nam da veži, ki jih je težko upoštevati.

Trik:

$$|\psi\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{(N/2)!} |\psi\rangle_N$$

Poznamo $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! = e^x$ za $x=1000$ bodo dominantni prispevki pri $n=1000$

$$|\psi\rangle = \exp\left(\sum_{\vec{k}} \Phi_k c_{k\uparrow}^{\dagger} c_{-k\downarrow}^{\dagger}\right) |0\rangle$$

$$= \prod_{\vec{k}} \exp(\Phi_k c_{k\uparrow}^{\dagger} c_{-k\downarrow}^{\dagger}) |0\rangle$$

$$= \prod_{\vec{k}} (1 + \Phi_k c_{k\uparrow}^{\dagger} c_{-k\downarrow}^{\dagger}) |0\rangle$$

zato ker členi med seboj komutirajo

ker vsi višji členi odpadejo

Funkcijo normaliziramo tako, da uvedemo faktorje $u_{\vec{k}}$ za vsak podprostor $(\vec{k} \uparrow, -\vec{k} \downarrow)$. Uvedemo še $v_{\vec{k}} = u_{\vec{k}} \Phi_{\vec{k}}$.

(4)

$$|\psi\rangle_{\text{BCS}} = \prod_{\vec{k}} (u_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger) |0\rangle$$

$\uparrow$ verjetnost, da je par zaseden
 $\uparrow$ verjetnost, da par stanj ni zaseden
 $\uparrow$ amplituda

$|u_{\vec{k}}|^2 + |v_{\vec{k}}|^2 = 1$

To ni zares lastno stanje H_{BCS} . Energije za $|\psi\rangle_N$ so odvisne od N , $|\psi\rangle_{\text{BCS}}$ pa je linearna superpozicija $|\psi\rangle_N$. Vseeno zelo dober približek za velike N .

$$\hat{N} = \sum_{\vec{k}} (u_{\vec{k}} \uparrow + u_{-\vec{k}} \downarrow) = \sum_{\vec{k}} n_{\vec{k}}$$

pozor, vsebuje $\vec{k} \uparrow$ in $-\vec{k} \downarrow$!
 BCS-calculations. ut volumen

$$\bar{N} = \langle \psi | \hat{N} | \psi \rangle = \sum_{\vec{k}} \langle \hat{n}_{\vec{k}} \rangle = \sum_{\vec{k}} 2 |v_{\vec{k}}|^2 = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} 2 |v_{\vec{k}}|^2$$

$\uparrow$ št. d. v prostoru
 $\uparrow$ verjetnost, da imamo par

$$\delta \hat{N} = \hat{N} - \bar{N}$$

$\vec{k} \neq \vec{k}'$ se polnirajšajo

$$\begin{aligned} \delta N^2 &= \left\langle \left(\sum_{\vec{k}} \hat{n}_{\vec{k}} \right)^2 \right\rangle - \left(\left\langle \sum_{\vec{k}} \hat{n}_{\vec{k}} \right\rangle \right)^2 = \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \langle \hat{n}_{\vec{k}} \hat{n}_{\vec{k}'} \rangle - \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \langle \hat{n}_{\vec{k}} \rangle \langle \hat{n}_{\vec{k}'} \rangle \\ &= \sum_{\vec{k}} 4 |u_{\vec{k}}|^2 |v_{\vec{k}}|^2 = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} 4 |u_{\vec{k}}|^2 |v_{\vec{k}}|^2 \end{aligned}$$

$\uparrow$ $\vec{k} = \vec{k}$ verjetnost, da imamo par
 $\uparrow$ $4 |v_{\vec{k}}|^2$
 $\uparrow$ $(2 |v_{\vec{k}}|^2)^2$

$$\frac{\delta N}{\bar{N}} \propto \frac{1}{\sqrt{V}} \Rightarrow \text{št. elektronov dobro definirano v termodinamski limiti}$$

Določimo zdaj $u_{\vec{k}}$ in $v_{\vec{k}}$. N ni fiksno, zato moramo minimizirati energijo sistema in rezervirajo elektrone, kot pri velekanoničnem ansamblu v statistični fiziki.

$$\langle C_{k'}^\dagger C_{k'}^\dagger C_k C_k \rangle = \langle C_{k'}^\dagger C_{-k'}^\dagger \rangle \langle C_{-k} C_k \rangle$$

za $k \neq k'$

BCS-calculations. ulr

$$\langle C_{-k} C_k \rangle = U_k^* V_k$$

$$\langle C_{k'}^\dagger C_{-k'}^\dagger \rangle = U_{k'} V_{k'}^*$$

($k=k'$ da smo
uči premile μ , ki
izgine v t.d. limiti)
EF vs. μ

$$E - \mu N = 2 \sum_k \xi_k |U_k|^2 - V \sum_{k, k'} U_{k'} V_{k'}^* U_k V_k$$

ker delamo z
velekanoničnim
ansamblom.

U_k naj bodo realni pozitivni. Minimiziramo po kompleksnih

$$V_k \text{ z vezjo } U_k = \sqrt{1 - |V_k|^2}.$$

Neodvisni spremenljivki sta $\text{Re } V_k = \frac{1}{2}(V_k + V_k^*)$ in $\text{Im } V_k = \frac{1}{2i}(V_k - V_k^*)$,
ali $\text{Re } V_k + i \text{Im } V_k = V_k$ in $\text{Re } V_k - i \text{Im } V_k = V_k^*$.

$$\delta(E - \mu N) = 2 \sum_k \xi_k (U_k \delta V_k^* + V_k^* \delta V_k) - V \sum_{k, k'} U_{k'} V_{k'}^* \delta(U_k V_k) + U_k V_k \delta(U_{k'} V_{k'}^*)$$

$$\delta U_k = -\frac{1}{2U_k} (V_k \delta V_k^* + V_k^* \delta V_k) \text{ sledi iz } U_k^2 + V_k^* V_k = 1$$

$$\Delta = V \sum_k U_k V_k$$

← vedno lahko naredimo Δ realen s
primerno izbiro faze prve valorne
funkcije Φ_k

$$\sum_{k'} U_{k'} V_{k'}^* = \Delta^* = \Delta$$

$$\delta(E - \mu N) = 2 \sum_k \xi_k (U_k \delta V_k^* + V_k^* \delta V_k) - \Delta \sum_k \delta(U_k V_k) + \delta(U_k V_k^*)$$

$$\delta(U_k V_k) = U_k \delta V_k + V_k \delta U_k = U_k \delta V_k - \frac{V_k}{2U_k} (V_k \delta V_k^* + V_k^* \delta V_k)$$

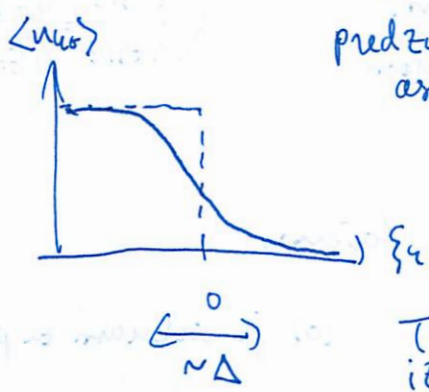
$$\delta V_k^*: \quad 2\xi_k V_k - \Delta \left(U_k - V_k \frac{V_k + V_k^*}{2U_k} \right) = 0 \rightarrow V_k \text{ realen, ker vsi faktorji v enačbi realni}$$

$$U_k^2 - V_k^2 = \frac{2\xi_k U_k V_k}{\Delta}$$

$$(u_k^2 + v_k^2)^2 - (u_k^2 - v_k^2)^2 = 1 - \frac{4\xi_k^2 u_k^2 v_k^2}{\Delta^2} = 4u_k^2 v_k^2$$

Uvedemo $E_k = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2} \Rightarrow u_k v_k = \frac{\Delta}{2E_k} \quad \begin{cases} u_k^2 - v_k^2 = \frac{\xi_k}{E_k} \\ u_k^2 + v_k^2 = 1 \end{cases}$

$$u_k = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_k}{E_k} \right)} \quad v_k = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_k}{E_k} \right)}$$



predznak je samo izbral tako, da dobimo pravilno asimptotsko obnašanje delcev proti od Fermijeve ravni

$$\langle n_{k\sigma} \rangle = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_k}{\sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2}} \right) = v_k^2$$

Takšna parazdelitev omogoča, da elektroni izkazujejo privlačno interakcijo (čprav se njihova kinetična energija pri tem poveča).

6. ENERGIJSKA REŽA

$$\Delta = V \sum_k \frac{\Delta}{2E_k} \Rightarrow \frac{1}{N_0 V} = \int_{-t\omega_D}^{t\omega_D} d\xi \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} = \text{arsinh} \frac{t\omega_D}{\Delta}$$

$$\Delta = 2t\omega_D e^{-\frac{1}{N_0 V}}$$

Note: $\text{arsinh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \approx \ln 2x$ za $-\infty < x < \infty$ za $x \rightarrow \infty$

7. KONDENZACIJSKA ENERGIJA

$$E_S - E_N = (E_S - \mu N) - (E_N - \xi_F N) \quad \text{ker } \mu = \xi_F$$

$$= 2 \sum_{\xi} \xi_k v_k^2 - V \sum_{k, k'} u_k v_k u_{k'} v_{k'} - 2 \sum_{k < k_F} \xi_k$$

$$= \sum_{k < k_F} [2\xi_k \underbrace{(v_k^2 - 1)}_{u_k^2} - \Delta u_k v_k] + \sum_{k > k_F} [2\xi_k v_k^2 - \Delta u_k v_k]$$

$$= N_0 \int_{-\infty}^0 d\xi \left[-\xi \left(1 + \frac{\xi}{E} \right) - \frac{\Delta^2}{2E} \right] + N_0 \int_0^{\infty} d\xi \left[\xi \left(1 - \frac{\xi}{E} \right) - \frac{\Delta^2}{2E} \right]$$

$$= N_0 \Delta^2 \left[x^2 - x \sqrt{x^2 + 1} \right]_0^{\infty}$$

$$x^2 (1 - \sqrt{1 + 1/x^2}) = x^2 \frac{1 - (1 + 1/x^2)}{1 + \sqrt{1 + 1/x^2}} = \frac{-1}{1 + \sqrt{1 + 1/x^2}} \rightarrow -\frac{1}{2}$$

$$E_S - E_N = -\frac{1}{2} N_0 \Delta^2$$

No Δ elektrona se energija zniža za $\sim \Delta$
Do TU, 23/4/2024

8. PAROVA VALOVNA FUNKCIJA

$$\Phi_{\vec{k}} = \frac{\vec{v}_k}{u_k} = \frac{E_k - \xi_k}{\Delta} \xrightarrow{FT} \Phi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \propto e^{i\vec{k}_F \cdot \vec{r}} e^{-r/\pi\xi_0}$$

$$\xi_0 = \frac{t v_F}{\pi \Delta} \quad \text{koherenčna razdalja} \quad \xi_0 \sim 100 \text{ nm}$$

Veliko prekrivanje med Cooperjevimi pari.

$$\xi_0/d \sim \frac{t v_F k_F}{\pi \Delta} = \frac{2 E_F}{\pi \Delta} \sim 1000$$

$$* \sqrt{\frac{1 - \xi/E}{1 + \xi/E}} = \frac{\sqrt{E - \xi}}{\sqrt{E + \xi}} \frac{\sqrt{E + \xi}}{\sqrt{E - \xi}} = \frac{E - \xi}{E - \xi}$$

9. VZBUJENA STANJA

Obravnavamo lahko vsak podprostor $(\vec{k} \uparrow, -\vec{k} \downarrow)$ ločeno.

$|0\rangle, c_{k\uparrow}^\dagger |0\rangle, c_{-k\downarrow}^\dagger |0\rangle, c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger |0\rangle$, $|0\rangle$ je vakuum za podprostor

V osnovnem stanju $|\psi_0\rangle_k = u_k |0\rangle + v_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger |0\rangle$

$c_{k\uparrow}^\dagger |0\rangle, c_{-k\downarrow}^\dagger |0\rangle$ sta ortogonalni na $|\psi_0\rangle_k$ (drugačino str. elektrona).

Hint ne da nič, Hint da ξ_k .

$$|\psi_1\rangle_k = v_k |0\rangle - u_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger |0\rangle$$

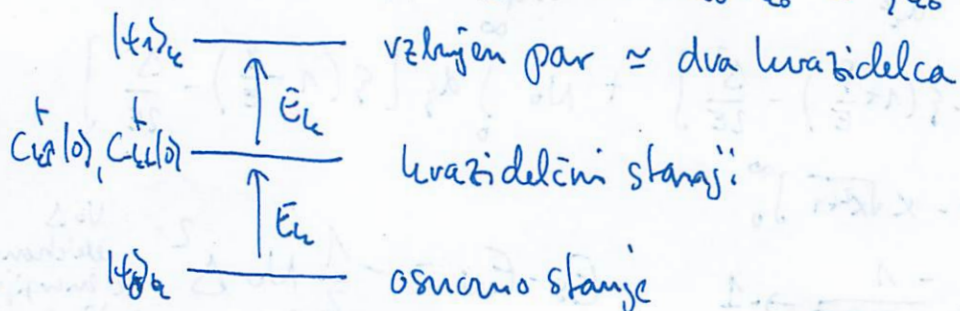
Koliko energije dolimo, če gremo iz $|0\rangle$ v $|\psi_0\rangle_k$?

$|0\rangle: u_k=1, v_k=0 \forall k$ $|\psi_0\rangle_{k_0} u_{k_0}, v_{k_0}$ za $k=k_0$ $\delta(v_k^2) = v_{k_0}^2 \delta k_{k_0}$ etc.

$$\begin{aligned} \delta(E - \mu N) &= 2 \sum_k \xi_k \delta(v_k^2) - 2V \sum_{k, k'} u_k v_{k'} \delta(u_k v_{k'}) \\ &= 2 \xi_{k_0} v_{k_0}^2 - 2 \Delta u_{k_0} v_{k_0} = \xi_{k_0} - E_{k_0} \end{aligned}$$

$|\psi_1\rangle_k$ dolimo iz $|\psi_0\rangle_k$ z $u_k \rightarrow v_{k_0}, v_k \rightarrow -u_{k_0}$, zato

$$\delta(E - \mu N) = 2 \xi_k u_{k_0}^2 + 2 \Delta u_{k_0} v_{k_0} = \xi_{k_0} + E_{k_0}$$



Iščemo operatorje, tako da bo $\gamma_{k\uparrow}^\dagger |\psi_0\rangle_k = C_{k\uparrow}^\dagger |0\rangle$

(6.)

To bo linearna kombinacija $C_{k\uparrow}^\dagger$ in $C_{-k\downarrow}$, $\gamma_{k\uparrow}^\dagger = a C_{k\uparrow}^\dagger + b C_{-k\downarrow}$
 Želimo tudi $\gamma_{k\uparrow} |\psi_0\rangle_k = 0$.

$$\left. \begin{aligned} au - bv &= 1 \\ bu + av &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a &= u, \\ b &= -v \end{aligned}$$

Dolimo $\gamma_{k\uparrow}^\dagger = u_k C_{k\uparrow}^\dagger - v_k C_{-k\downarrow}$

$$\gamma_{k\uparrow} = u_k C_{k\uparrow} - v_k C_{-k\downarrow}^\dagger$$

in $\gamma_{-k\downarrow}^\dagger = u_k C_{-k\downarrow}^\dagger + v_k C_{k\uparrow}$

$$\gamma_{-k\downarrow} = u_k C_{-k\downarrow} + v_k C_{k\uparrow}^\dagger$$

Bogoljubov-Valatin:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{k\uparrow} \\ \gamma_{-k\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_k & -v_k \\ v_k & u_k \end{pmatrix}}_{U_k \text{ unitarna, } U_k^\dagger U_k = 1} \begin{pmatrix} C_{k\uparrow} \\ C_{-k\downarrow}^\dagger \end{pmatrix}$$

U je transformacija unitarna, γ zadošča C.C.R.

$$U_k \text{ unitarna, } U_k^\dagger U_k = 1, \quad U^{-1} = U^\dagger = \begin{pmatrix} u_k & v_k \\ -v_k & u_k \end{pmatrix}$$

V HBCS pridejo vsi prispevki iz podprostorov $\vec{k}' \neq \vec{k}$ preko porpucij:

$$\langle C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} \rangle = u_k v_k$$

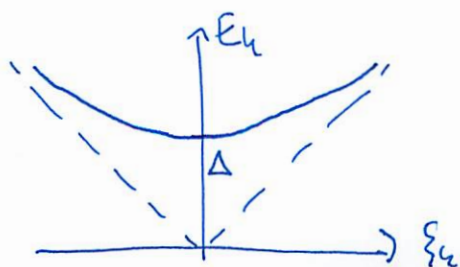
$$H_{BCS} = \sum_{\vec{k}} \xi_k (C_{k\uparrow}^\dagger C_{k\uparrow} - C_{-k\downarrow} C_{-k\downarrow}^\dagger) - (\Delta C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} + \Delta C_{k\uparrow}^\dagger C_{-k\downarrow}^\dagger)$$

$$= \sum_{\vec{k}} (C_{k\uparrow}^\dagger \ C_{-k\downarrow}) \begin{pmatrix} \xi_k & -\Delta \\ -\Delta & -\xi_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{k\uparrow} \\ C_{-k\downarrow}^\dagger \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\vec{k}} E_k (\gamma_{k\uparrow}^\dagger \gamma_{k\uparrow} + \gamma_{-k\downarrow}^\dagger \gamma_{-k\downarrow})$$

(do aditivnih konstant uatakcio)

Vzključitvam rečemo kvazideleci Bogoljubova.



$$* \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & -\Delta \\ -\Delta & -\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2uv\Delta + \xi(u^2 - v^2) & -\Delta(u^2 - v^2) + 2u\xi\Delta \\ -\Delta(u^2 - v^2) + 2u\xi\Delta & -2uv\Delta - \xi(u^2 - v^2) \end{pmatrix}$$

$$uv = \frac{\Delta}{2\xi} \quad u^2 - v^2 = \frac{\xi}{E}$$

V limiti $\Delta \rightarrow 0$ dobimo $|\xi_k|$. Za $\xi_k > 0$ je $|\xi_k| = \xi_k$ energija za hvalno dodatnega delca nad Fermijevno površino. Za $\xi_k < 0$ je $|\xi_k| = -\xi_k > 0$ energija potrebna za hvalno vrzeli pod Fermijevno površino. Vzburitve imajo vedno višjo energijo kot osnovno stanje.

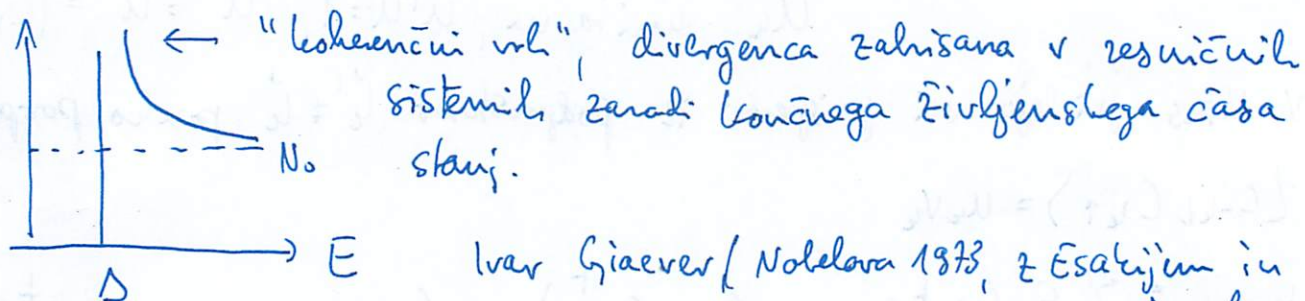
Za velike $|\xi_k|$ gre $E_k \rightarrow |\xi_k|$. Za $\xi_k \gg \Delta$, $\chi_{k\uparrow}^{\dagger} \approx c_{k\uparrow}^{\dagger}$. Za $\xi_k \ll -\Delta$, $\chi_{k\uparrow}^{\dagger} \approx -c_{k\downarrow}$. V obeh primerih uvažamo vzburitev s spinom $\uparrow$.

GOSTOTA STANJ:

$$dN = \mathcal{N}(E) dE = N(\xi) d\xi \approx N_0 d\xi$$

$$\mathcal{N}(E) = N_0 \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}}$$

$$\begin{cases} E^2 = \xi^2 + \Delta^2 \\ E dE = \xi d\xi \\ E dE = \sqrt{E^2 - \Delta^2} d\xi \end{cases}$$



Ivar Giaever / Nobelova 1973, z Esaki-jem in Josephsonom)

Shoji kosi tudi z ^{jedrosko spinskega} mehanizma + relaksacijskega časa $1/T_1$ z NMR in ultrazvočno atenuacijo. Obe količini odvisni tudi od koherenčnih časov τ_c in τ_k .

10. KONČNE TEMPERATURE

7.

Ponovno obravnavamo po podprostori ($\epsilon_F, -\epsilon_F$).

Verjetnosti $1, e^{-\beta \epsilon_k}, e^{-\beta \epsilon_k}, e^{-2\beta \epsilon_k}$. $z_k = 1 + 2e^{-\beta \epsilon_k} + e^{-2\beta \epsilon_k}$.

Lineične energije $2\xi_k v_k^2, \xi_k, 2\xi_k u_k^2$. $z_k = (1 + e^{-\beta \epsilon_k})^2$

$$E_{kin} = \sum_k 2\xi_k [v_k^2 (1 - 2f_k) + f_k] \quad f_k = \frac{1}{e^{\beta \epsilon_k} + 1}$$

verjetnost, da je
aniono stanje
če zasedeno verjetnost za Bogoljubov

Pri interakcijski energiji upoštevamo, da 1x zasedena stanja ne prispevajo. $u_k v_k$ prispeva enakega, $-u_k v_k$ prispeva vzhajenega para, 2 verjetnostima $1/z_k$ in $e^{-2\beta \epsilon_k}/z_k$.

To da $u_k v_k (1 - 2f_k)$.

$$E_{int} = -V \sum_{kk'} u_k v_k (1 - 2f_k) u_{k'} v_{k'} (1 - 2f_{k'})$$

DO TU, 23/4/2024

$$S = -k_B \sum_k \uparrow_{spin} f_k \ln f_k + (1 - f_k) \ln(1 - f_k)$$

$$F = E_{kin} + E_{int} - TS$$

Z minimizacijo sledi $\Delta = V \sum_k u_k v_k (1 - 2f_k)$, vsi ostali

izrazi enaki kot pri $T=0$.

$$1 - 2f_k = 1 - \frac{2}{e^{\beta \epsilon_k} + 1} = \frac{e^{\beta \epsilon_k} - 1}{e^{\beta \epsilon_k} + 1} = \tanh(\beta \epsilon_k / 2)$$

$$u_k v_k = \frac{\Delta}{2\epsilon_k}$$

$$\Delta = V \sum_k \frac{\Delta}{2\epsilon_k} \tanh(\beta \epsilon_k / 2)$$

Numerično rešljivo. Dober približek je $x = y / \operatorname{arctanh} y$

z $x = T/T_c$ in $y = \Delta / 1,76 k_B T_c$.

$$\Delta = 0 \text{ pri } T = T_c : \frac{1}{N_0 V} = \int_0^{\hbar \omega_D} d\xi \frac{1}{\xi} \tanh\left(\frac{\beta \xi}{2}\right)$$

$$k_B T_c \approx 1,13 \hbar \omega_D e^{-\frac{1}{N_0 V}}$$

$$\frac{2e^C}{\pi} \approx 1,13$$

$C = 0,577215\dots$
Eulerjeva konstanta

$$\frac{\Delta(T=0)}{k_B T_c} \approx \frac{2}{1,13} = 1,764 \rightarrow \text{dobro velja v "konvencionalnih" superprevodnikih}$$

$\Delta \doteq \Delta(T=0)$ praktično do $T = 0,4 T_c$. Posledica energijske reže.

SEMINAR: specifična toplota, univerzalni skok $\frac{C_S - C_N}{C_N} \approx 1,43$

DETALJI: $E_{\text{kin}} = \sum_k \frac{\xi_k}{(1 + e^{-\beta \xi_k})^2} \left[2v_k^2 + 2e^{-\beta \xi_k} + 2u_k^2 e^{-2\beta \xi_k} \right]$

$$= \sum_k \frac{2\xi_k}{(1 + e^{-\beta \xi_k})^2} \left[v_k^2 (1 - e^{-2\beta \xi_k}) + (e^{-\beta \xi_k} + e^{-2\beta \xi_k}) \right]$$

$$= \sum_k 2\xi_k \left[v_k^2 \left(1 - \frac{2e^{-\beta \xi_k}}{1 + e^{-\beta \xi_k}} \right) + \frac{e^{-\beta \xi_k}}{(1 + e^{-\beta \xi_k})} \right] = \sum_k 2\xi_k \left[v_k^2 (1 - 2f_k) + f_k \right]$$

$$u_k v_k \rightarrow u_k v_k \frac{1 - e^{-2\beta \xi_k}}{(1 + e^{-\beta \xi_k})^2} = u_k v_k (1 - 2f_k)$$

$$F = F(\{v_k\}, \{f_k\}) \rightarrow \left. \frac{\delta F}{\delta v_k} \right|_{f_k=0} \text{ in } \left. \frac{\delta F}{\delta f_k} \right|_{v_k=0}$$

$$\delta F = \sum_k 4\xi_k v_k (1 - 2f_k) \delta v_k - 2V \sum_{k, k'} u_{k'} v_{k'} (1 - 2f_{k'}) (1 - 2f_k) \delta(u_{k'} v_{k'})$$

Definiramo $\Delta = V \sum_k u_k v_k (1 - 2f_k) \Rightarrow \delta F = 2 \sum_k (1 - 2f_k) \left[2\xi_k v_k \delta v_k - \Delta \delta(u_k v_k) \right]$

$$x = \frac{\xi}{2k_B T_c} \quad w = \frac{\hbar \omega_D}{2k_B T_c} \quad \frac{1}{N_0 V} = \left[\ln x \tanh \right]_0^w - \int_0^w dx \frac{\ln x}{\cosh^2 x}$$

leot pri $T \rightarrow 0$

$$-C + \ln(\pi/4) \text{ za } w \rightarrow \infty$$

$$\frac{\delta F}{\delta f_k} = 2\xi_k (1 - 2v_k^2) + 4\Delta u_k v_k + 2k_B T \ln \frac{f_k}{1 - f_k}$$

$\frac{\xi_k}{2\xi_k} \quad \frac{\Delta}{2\xi_k}$

Definiramo spinor z dvema komponentama:

$$\psi_k = \begin{pmatrix} c_{k\uparrow} \\ c_{k\downarrow} \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \psi_k^\dagger = (c_{k\uparrow}^\dagger \quad c_{k\downarrow}^\dagger)$$

V splošnem je $\Delta = |\Delta| e^{i\varphi}$.

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y)$ PAZI, faktor 1/2 ni vedno prisoten

$$H_k = \begin{pmatrix} \xi_k & -\Delta \\ -\Delta^* & -\xi_k \end{pmatrix} = \xi_k \sigma_z - (\text{Re } \Delta \sigma_x + i \text{Im } \Delta \sigma_y) = \xi_k \sigma_z - (\Delta \sigma_+ + \Delta^* \sigma_-)$$

$$\psi_k^\dagger H_k \psi_k = \xi_k \hat{n}_k - \Delta c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\downarrow}^\dagger - \Delta^* c_{k\downarrow} c_{k\uparrow} - \xi_k$$

$$H_{\text{Zeeman}} = \begin{pmatrix} E_Z/2 & 0 \\ 0 & -E_Z/2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{n}_k = \hat{n}_{k\uparrow} + \hat{n}_{k\downarrow} \quad \hat{n}_{k\sigma} = c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma}$$

$$\psi_k^\dagger H_{\text{Zeeman}} \psi_k = E_Z \hat{S}_z + E_Z/2$$

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2}(\hat{n}_{k\uparrow} - \hat{n}_{k\downarrow})$$

V splošnem (polje v poljubni smeri, SOC) posebejemo štiri komponente:

$$\psi_k = \begin{pmatrix} c_{k\uparrow} \\ c_{k\downarrow} \\ c_{k\uparrow}^\dagger \\ c_{k\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \psi_k^\dagger = (c_{k\uparrow}^\dagger \quad c_{k\downarrow}^\dagger \quad c_{k\uparrow} \quad c_{k\downarrow})$$

Tudi kot tenzorski produkt: $\psi_k = \begin{pmatrix} c_k \\ c_k^\dagger \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \uparrow \\ \downarrow \end{pmatrix}$

Operacije so matrike 4×4 , ki jih tudi lahko zapisujemo s tenzorskim produktom, $\tau \otimes \sigma$. Prvi deluje v "particle-hole" (vakuumskem) podprostoru, drugi v spinskem podprostoru.

$$H_k = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 & -\Delta \\ 0 & \xi & \Delta & 0 \\ 0 & \Delta^* & -\xi & 0 \\ -\Delta^* & 0 & 0 & -\xi \end{pmatrix} = \xi \tau_z \otimes \sigma_0 + (\text{Im } \Delta \tau_x + \text{Re } \Delta \tau_y) \otimes \sigma_y$$

To že vsebuje vse člene v podprostoru $(\uparrow, \downarrow, -\downarrow, -\uparrow)$. Seštevaje po ξ je treba omejiti na polovico 1.BZ, ali pa uparaliti pred faktor 1/2.

12. BOGOLUBOV-DE GENNES (opomba: pri udraciji in predzadež in sledim de Gennesu)

Obravnavamo problem z neko krajeno odvisnostjo.

Hamiltonian zapisemo v realnem prostoru:

$$H_0 = \int d^3\vec{r} \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger}(\vec{r}) \left[\frac{p^2}{2m} + U_0(\vec{r}) \right] \psi_{\sigma}(\vec{r})$$

$$H_1 = -\frac{V}{2} \int d^3\vec{r} \sum_{\sigma\sigma'} \psi_{\sigma}^{\dagger}(\vec{r}) \psi_{\sigma'}^{\dagger}(\vec{r}) \psi_{\sigma'}(\vec{r}) \psi_{\sigma}(\vec{r})$$

C.A.R. $\{\psi_{\sigma}(\vec{r}), \psi_{\sigma'}^{\dagger}(\vec{r}')\} = \delta(\vec{r}-\vec{r}') \delta_{\sigma\sigma'}$

Interakcija je kontaktna, opisana z enim parametrom V (kot v BCS).

$$H_0 - \epsilon_F N = \sum_{\sigma} \int d^3\vec{r} \psi_{\sigma}^{\dagger}(\vec{r}) \mathcal{H}_e(\vec{r}) \psi_{\sigma}(\vec{r}) \quad \mathcal{H}_e = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + U_0(\vec{r}) - \epsilon_F$$

Nastavek:

$$H_{\text{eff}} = \int d^3\vec{r} \sum_{\sigma} \left(\psi_{\sigma}^{\dagger}(\vec{r}) \mathcal{H}_e(\vec{r}) \psi_{\sigma}(\vec{r}) + U(\vec{r}) \psi_{\sigma}^{\dagger}(\vec{r}) \psi_{\sigma}(\vec{r}) + \Delta(\vec{r}) \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\vec{r}) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\vec{r}) + \Delta^*(\vec{r}) \psi_{\downarrow}(\vec{r}) \psi_{\uparrow}(\vec{r}) \right)$$

Diagonaliziramo s transformacijo: $\uparrow$ premik energij zaradi parne interakcije $\uparrow$ parni potencial

$$\psi_{\uparrow}(\vec{r}) = \sum_n \left[\gamma_{n\uparrow} U_n(\vec{r}) - \gamma_{n\downarrow}^{\dagger} V_n^*(\vec{r}) \right]$$

$$\psi_{\downarrow}(\vec{r}) = \sum_n \left[\gamma_{n\downarrow} U_n(\vec{r}) + \gamma_{n\uparrow}^{\dagger} V_n^*(\vec{r}) \right] \quad \{\gamma_{n\sigma}, \gamma_{n'\sigma'}^{\dagger}\} = \delta_{nn'} \delta_{\sigma\sigma'}$$

$$H_{\text{eff}} = E_g + \sum_{n\sigma} \epsilon_n \gamma_{n\sigma}^{\dagger} \gamma_{n\sigma} \rightarrow \begin{cases} [H_{\text{eff}}, \gamma_{n\sigma}] = -\epsilon_n \gamma_{n\sigma} \\ [H_{\text{eff}}, \gamma_{n\sigma}^{\dagger}] = \epsilon_n \gamma_{n\sigma}^{\dagger} \end{cases}$$

$$[\psi_{\uparrow}(\vec{r}), H_{\text{eff}}] = [\mathcal{H}_e(\vec{r}) + U(\vec{r})] \psi_{\uparrow}(\vec{r}) + \Delta(\vec{r}) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\vec{r})$$

$$[\psi_{\downarrow}^{\dagger}(\vec{r}), H_{\text{eff}}] = -[\mathcal{H}_e(\vec{r}) + U(\vec{r})] \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\vec{r}) - \Delta^*(\vec{r}) \psi_{\uparrow}(\vec{r})$$

Vstavimo transformirane ψ in izenačimo koeficiente pred γ_n in $\gamma_n^{\dagger}$.
Enačbe Bogoljubova:

$$\epsilon U(\vec{r}) = [\mathcal{H}_e + U(\vec{r})] U(\vec{r}) + \Delta(\vec{r}) V(\vec{r})$$

$$\epsilon V(\vec{r}) = -[\mathcal{H}_e^* + U(\vec{r})] V(\vec{r}) + \Delta^*(\vec{r}) U(\vec{r})$$

$$T = i\sigma_y U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} U$$

Če je $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ rešitev z lastno vrednostjo ϵ , je $\begin{pmatrix} -V^* \\ U^* \end{pmatrix}$ rešitev z lastno vrednostjo $-\epsilon$. Imamo redundantne rešitve. OBRZIŠIMO POZITIVNE ϵ .

z variacijskim računom dobimo pogoj za samoskladajenost:

$$U(\vec{r}) = -V \langle \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\vec{r}) \psi_{\uparrow}(\vec{r}) \rangle \rightarrow \text{ker lahko } \psi^{\dagger} \psi \psi^{\dagger} \psi \text{ razcepimo na}$$

$$\Delta(\vec{r}) = -V \langle \psi_{\downarrow}(\vec{r}) \psi_{\uparrow}(\vec{r}) \rangle \quad \text{dva različna načina!}$$

glejmo

$$U(\vec{r}) = -V \sum_n \left[|u_n(\vec{r})|^2 f_n + |v_n(\vec{r})|^2 (1-f_n) \right]$$

$$\Delta(\vec{r}) = +V \sum_n v_n^*(\vec{r}) u_n(\vec{r}) (1-2f_n)$$

zasedbena stanja

12^{lis} SIPANJE ANDREEVA

Če elektron z $|S| < \Delta$ pride na spoj s superprevodnikom, li pričakovati odboj. Lahko pa pride do tvorbe Cooperjevega para in odhite vrzel.



Elektron in vrzel sta časovno obrnjeni kvantni stanji.

učinek BLIŽINE (proximity effect): Cooperjevi pari iz SC difundirajo v navadno kovino, zato so tudi v kovini pričakovane vrednosti $\langle \psi \psi \rangle$ karčne. Globina učinka je določena s koherenčno dolžino ξ .

S spajanjem različnih materialov lahko tako dosežemo različne nove pojave.

SEMINAR: izpeljave

13. UMERITVENA INVARIANCA

✓ 30.4.2025

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\hbar = c = \epsilon_0 = \mu_0 = 1$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Umeritvena transformacija: $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla\alpha$, $\varphi \rightarrow \varphi - \partial_t \alpha$

$$\alpha = \alpha(\vec{r}, t)$$

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m} (\nabla - i\vec{q}\vec{A})^2 \psi + (V + q\varphi)\psi$$

Lokalna U(1) simetrija

Veljati mora tudi: $\psi \rightarrow e^{iq\alpha} \psi$

Parameter kda je $\Delta \propto \langle \psi\psi \rangle$, zato $\Delta \rightarrow e^{2iq\alpha} \Delta$. (kovariantna količina)

Opazljive količine ne morejo biti odvisne od izbire umeritve.

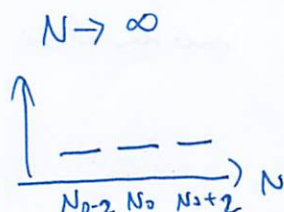
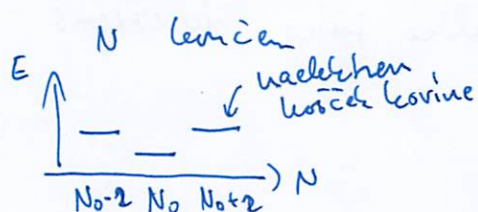
Absolutna vrednost $|\Delta|$ je opazljiva (energijske reže v spektru), faza pa je bolj subtilna količina.

$$H_{int} = -V \sum_k C_{k\uparrow}^\dagger C_{-k\downarrow}^\dagger C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} \\ \approx -\Delta^* \sum_k C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} - \Delta \sum_k C_{k\uparrow}^\dagger C_{-k\downarrow}^\dagger$$

Hamiltonian je invarianten, ker moramo prebrati tako Δ kot operaterje. Nedravitost števila delcev je posledica približka povprečnega polja.

$$|\psi_{BCS}\rangle = \prod_k (u_k + v_k e^{i\phi} C_{k\uparrow}^\dagger C_{-k\downarrow}^\dagger) |0\rangle$$

BCS stanje je invariantno na izbiro umeritve.



Iz teh stanj tvorimo linearno superpozicijo, ki ima dobro definirano fazo. Zlomljena simetrija je izbirna le globalne faze.

Razlika faz med dvema SC je invariantna in zato merljiva.

Ohranavamo dve kovinski zruvi, ki sta s silico sklopjenci, recimo s tunnelnim stikom (tanko oksidna plastjo). Zruvi zadostaj veliki, da ju lahko opišemo kot kontinuum stanj. Tunneliranje je potem koherenten proces, ki ga opišemo s Fermijevim zlatim pravilom. Tunnelirajo elektroni v energijskem intervalu, ki ga definira razlika kemijskih potencialov.

Efektivno vezje:  Temo rečemo Josephsonov spoj. (če sta zruvi superprevodni, $T \ll T_c$)

Na izoliranem zruvi je skrito elektronski filn. Naj bo to skrito parno. Sistem ima nedegenerirano osnovno stanje, najnižja vzburitev ima energijo 2Δ (razlit Cooperjev par). Če $k_B T$, $\hbar\omega \ll 2\Delta$, potem je relevantno samo osnovno stanje, $|N\rangle$, kjer N označuje št. Cooperjevih parov, vsa ostala stanja smemo zanemariti.

Če sta zruvi dve, moramo opredeliti št. parov na vsaki zruvi, tako da velja $N_L + N_R = N$.

$$|m\rangle = |N_L^0 - m, N_R^0 + m\rangle, \quad m \text{ št. parov, ki so tunnelirali z leve na desno glede na neko referenčno stanje}$$

Stanja $|m\rangle$ so degenerirana (v dobrem približku) z N_L^0, N_R^0

Pari lahko tunnelirajo. Fenomenološko to opišemo z

$$H_T = -\frac{1}{2} E_J \sum_m \{ |m\rangle \langle m+1| + |m+1\rangle \langle m| \}$$

↑
m
Josephsonova energija

$$|\varphi\rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} |m\rangle \quad H_T |\varphi\rangle = -E_J \cos\varphi |\varphi\rangle$$

Valovni paket, ki potuje desno po tej verigi stanj $|m\rangle$, uspeze vseh tistih Cooperjevih parov, ki tunnelirajo skozi spoj, tako da $\langle m \rangle$ narašča linearno s časom.

Grupna hitrost:

Predznaki?

$$V_g(\varphi) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial}{\partial \varphi} [-E_J \cos \varphi]$$

$$I(\varphi) = 2e V_g(\varphi) = \underbrace{\frac{2e}{\hbar} E_J}_{I_c} \sin \varphi \quad \text{PRVA JOSEPHSONOVA ZVEZA}$$

I_c : critical current (maximal current)

$$\hat{n} = \sum_m m |m\rangle \langle m| \quad \text{operator razlike v številu parov}$$

$$\hat{I} \equiv 2e \frac{d\hat{n}}{dt} = 2e \frac{i}{\hbar} [H_T, \hat{n}] = -i \frac{2e}{\hbar} E_J \sum_m \{ |m\rangle \langle m+1| - |m+1\rangle \langle m| \}$$

Napetost: potencialni člen $U = -(2e)V \hat{n}$. To je podobno homogenemu polju v Blochovih lučkah. Po analogiji: $\hbar \partial_t \varphi = 2eV$

$$\hbar \partial_t \varphi = 2eV \quad \text{DRUGA JOSEPHSONOVA ZVEZA}$$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{2e}{\hbar} V t \rightarrow \text{oscilacije } \omega = 2e \frac{2e_0}{\hbar} V$$

Matematično je to podobno Blochovim oscilacijam elektronov v homogenem električnem polju.

$$\frac{1}{\Phi_0} = \frac{2e_0}{\hbar} \approx 483,5978525 \text{ MHz}/\mu\text{V}$$

Spominimo se, da je $j \propto \nabla \varphi$. Po analogiji: $I \propto \varphi_2 - \varphi_1$.

Zato identificiramo $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

Bolj splošno, uverjeno-invariantna razlika faz je

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 + \frac{e_0}{\hbar} \int_1^2 \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Sedaj li φ radi promoviral v operator. Zaradi zahtev po periodičnosti 2π , $\hat{\varphi}$ ni dobro definirano, $e^{i\hat{\varphi}}$ pa so.

$$\hat{I}(\hat{\varphi}) = \frac{2e}{\hbar} E_J \sin \hat{\varphi} = -\frac{i 2e E_J}{\hbar} (e^{i\hat{\varphi}} - e^{-i\hat{\varphi}})$$

$$e^{i\hat{\varphi}} = \sum_m |m\rangle \langle m+1|$$

$$e^{-i\hat{\varphi}} = \sum_m |m+1\rangle \langle m|$$

Velja $[e^{i\hat{\varphi}}, \hat{n}] = e^{i\hat{\varphi}}$ ali (slamprasto) $[\hat{\varphi}, \hat{n}] = -i$ (11.)

$\uparrow$ mamer
 $\uparrow$ krajani

Torej $H = -E_J \cos \hat{\varphi} - 2eV \hat{n}$.

Hamiltonove enačbe: $\frac{\partial \hat{n}}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial (\hbar \hat{\varphi})}$ $\hbar \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial \hat{n}}$

Če upoštevamo še kapacitivno sklopitev, dobimo še člen $H_c = 4E_C \hat{n}^2$,

kjer je $E_C = \frac{e^2}{2C}$ Coulombova energija spoja.

V krajani reprezentaciji je $\hat{n} = i \frac{\partial}{\partial \varphi}$.

$$H = -4E_C \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - E_J \cos \varphi.$$

To je osnova za obravnavo superprevodnih kramnik
vezij. Zgornja enačba opisuje kulite (če $E_C \ll E_J$, je to transmon).

15. STANJA V ENERGIJSKI REŽI

Cooperjevi pari združujejo elektrone, ki so pari glede na oblat časa. Velja tudi, če je sistem nevtralen in valovne funkcije niso Blochova stanja, ter v prisotnosti SOC.

Andersonov izrek: SC stanje je odporno na dodajanje nemagnetnih nečistoč. (Theory of dirty superconductors, Anderson 1959)

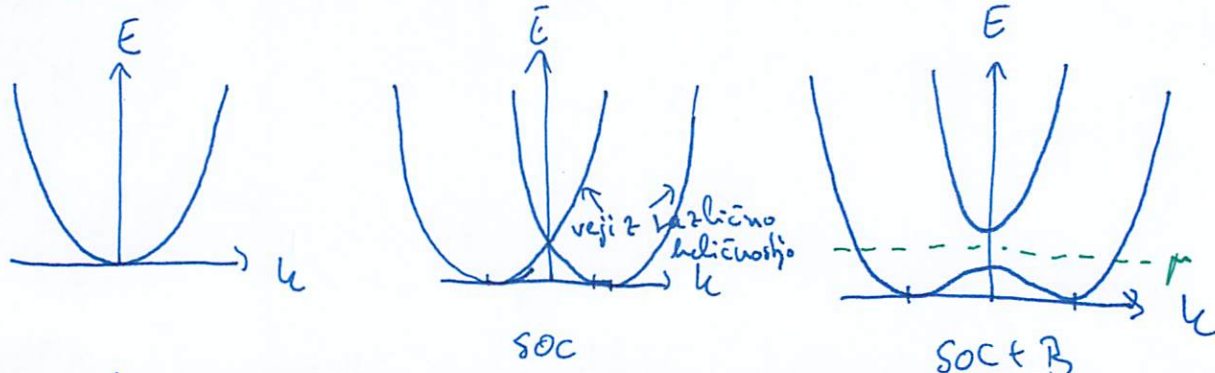
Pristop: najprej diagonaliziramo neinteragirajoči del, potem upoštevamo dominantne člene interakcije, ki so tisti med časovno konjugiranimi stanji.

Magnetne nečistoče pa lahko uničijo superprevodnost.

Nastanejo stanja v energijski reži. Ko jih je veliko, se SC porušijo (obstaja tudi vmesno "gapless" superprevodno stanje).

16. TOPOLOŠKI SUPERPREVODNIKI

V prisotnosti SOC in zadostni močnega magnetnega polja lahko dosežemo situacijo, ko imamo v bližini kemijskega potenciala delce z enim samim spinom (helicitnostjo).

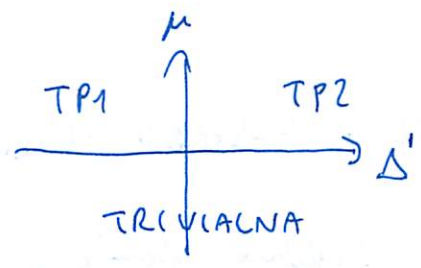


Tak material slopimo z univarnim superprevodnikom. Zaradi učinka bližine se odpre energijska reža, vendar dobimo superprevodnik z brezspinskimi delci tipa p.

$$H = \int dx \left\{ \psi^\dagger(x) \left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right) \psi(x) + \Delta' \left[\psi^\dagger(x) \partial_x \psi^\dagger(x) + \text{h.c.} \right] \right\}$$

$$H_k = \begin{pmatrix} \xi_k & -i\Delta' k t \\ i\Delta' k t & -\xi_k \end{pmatrix} = \xi_k \tau_z + \Delta' k t \tau_y \quad \xi_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu$$

$$E_k = \pm \sqrt{\xi_k^2 + \hbar^2 \Delta'^2 k^2}$$



Faze se razlikujejo v ovojnan
sterih.

Dobro definirano, ker $\{\tau_x, H_k\} = 0$.

Domenska skena med TR in TP1. $\mu(x) = \alpha x$

$$H = -\alpha x \tau_z + \Delta' k t \tau_y \quad (\text{za majhne } k)$$

Diracov hamiltonian z masnim členom, ki spreminja predznak.
Ta model ima vezano stanje pri energiji nič (Jackiw, Rebbi).
Kvazidelčni operator, ki pripada temu stanju, ima lastnost
 $\gamma = \gamma^\dagger$. To je značilnost Majoranovih fermionov.

Do tu, 6.5.2024

17. BCS vs BEC (Nozières, Schmitt-Rink 1985) preložil v 2024

BCS : kondenzat iz šibko vezanih Cooperjevih parov

BEC : kondenzat iz močno vezanih parov ali pravih bozonov

Med obema obstaja zvečen prehod. Eksperimentalno se to lahko opazuje v ultrahladnih sistemih fermionskih atomov.

$$H = \sum_{k, k', q} V_{kk'} C_{k'+q/2}^\dagger C_{-k'+q/2} C_{-k+q/2} C_{k+q/2}$$

V velik. Po dva fermionska tvorita singletno stanje

$$\epsilon_{\vec{q}} = -\epsilon_0 + \vec{q}^2/2M, \quad M=2m, \quad \epsilon_0 \text{ je vezalna energija.}$$

Velikost $a_0 \sim \epsilon_0^{-1/2}$. Če $Na_0^3 \ll 1$, se ne prekrivajo.

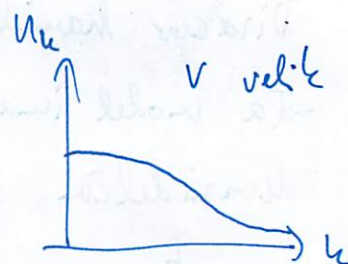
Ohranavamo kot plin točkastih bozonov.

Kondenzirajo se v stanje z $\vec{q}=0$.

$$b_{\vec{q}}^\dagger = \sum_i \Phi_i C_{i+\vec{q}/2}^\dagger C_{-i+\vec{q}/2}$$

$$|\psi_{\text{BEC}}\rangle = \exp(\sqrt{N_p} b_{\vec{q}}^\dagger) |\emptyset\rangle \quad \text{koherentno stanje} \quad N_p = N/2$$

$u_k \ll 1$, zato izključujemo učično ni pomembno.



V majhen, $Na_0^3 \gg 1$, izključujemo učično pomembno, $u_k < 1$.

$$|\psi_{\text{BCS}}\rangle = \prod_k (u_k + v_k C_{k\uparrow}^\dagger C_{-k\downarrow}^\dagger) |\emptyset\rangle$$

$$|\psi_{\text{BEC}}\rangle \rightarrow |\psi_{\text{BCS}}\rangle \quad \text{z} \quad v_k = \frac{\sqrt{N_p} \Phi_k}{(1 + N_p \Phi_k^2)^{1/2}}$$



V BCS je struktura valovne funkcije enaka in tipična za Bosejevo kondenzacijo. Bistveno je, da imajo vsi (Cooperjevi) pari enako $\vec{q}=0$. Pri bližnjem prepuščenju polja dobro deluje v obeh limitah, vmes pa tudi učično ni prav slab.

DETAILS

$$[\psi, H_{\text{eff}}] = \sum_n [\gamma_{n\uparrow} u_n - \gamma_{n\downarrow}^\dagger v_n^*, H_{\text{eff}}]$$

$$= \sum_n \varepsilon_n \gamma_{n\uparrow} u_n + \varepsilon_n \gamma_{n\downarrow}^\dagger v_n^*$$

$$= [\mathcal{H}_c + U] (\gamma_{n\uparrow} u_n - \gamma_{n\downarrow}^\dagger v_n^*) + \Delta (\gamma_{n\downarrow}^\dagger u_n^* + \gamma_{n\uparrow} v_n)$$

$$\gamma_{n\uparrow}: \quad \varepsilon u_n = [\mathcal{H}_c + U] u_n + \Delta v_n$$

$$\gamma_{n\downarrow}^\dagger: \quad \varepsilon v_n = -[\mathcal{H}_c^* + U] v_n + \Delta^* u_n$$

$$H_{\text{eff}} = E_g + \sum_n \varepsilon_n \gamma_{n\sigma}^\dagger \gamma_{n\sigma}$$

$$[H_{\text{eff}}, \gamma_{m\sigma}] = \sum_n \varepsilon_n \gamma_{n\sigma}^\dagger \gamma_{n\sigma} \gamma_{m\sigma} - \sum_n \varepsilon_n \gamma_{m\sigma} \gamma_{n\sigma}^\dagger \gamma_{n\sigma}$$

$$= \underbrace{\gamma_{n\sigma}^\dagger \gamma_{m\sigma} \gamma_{n\sigma}}_{-\gamma_{n\sigma}^\dagger \gamma_{m\sigma} \gamma_{n\sigma}}$$

$$- (\delta_{nm} - \gamma_{m\sigma} \gamma_{n\sigma}^\dagger) \gamma_{n\sigma}$$

$$= -\varepsilon_m \gamma_{m\sigma}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -v^* \\ u^* \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} -\varepsilon v^* &= [\mathcal{H}_c + U] v^* + \Delta u^* \\ \varepsilon u^* &= -[\mathcal{H}_c^* + U] u^* + \Delta^* (-v^*) \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} -\varepsilon v &= -[\mathcal{H}_c^* + U] v + \Delta^* u \\ -\varepsilon u &= [\mathcal{H}_c + U] u + \Delta v \end{aligned} \right\}$$

$$\varepsilon \rightarrow -\varepsilon \quad \checkmark$$

$$\Delta(\vec{r}) = -V \langle \psi_{\downarrow}(\vec{r}) \psi_{\uparrow}(\vec{r}) \rangle$$

$$= -V \sum_n \langle (\gamma_{n\downarrow} u_n(\vec{r}) + \gamma_{n\uparrow}^\dagger v_n^*(\vec{r})) (\gamma_{n\uparrow} u_n(\vec{r}) - \gamma_{n\downarrow}^\dagger v_n^*(\vec{r})) \rangle$$

$$= -V \sum_n \langle u_n(\vec{r}) v_n^*(\vec{r}) (\gamma_{n\downarrow} \gamma_{n\downarrow}^\dagger + \gamma_{n\uparrow}^\dagger \gamma_{n\uparrow}) \rangle$$

$$\gamma_{n\downarrow} \gamma_{n\downarrow}^\dagger + \gamma_{n\uparrow}^\dagger \gamma_{n\uparrow} = 1$$

$$\Delta(\vec{r}) = V \sum_n u_n(\vec{r}) v_n^*(\vec{r}) (1 - 2f_n)$$

$$U(\vec{r}) = -V \langle \psi_{\uparrow}^\dagger(\vec{r}) \psi_{\uparrow}(\vec{r}) \rangle$$

$$= -V \sum_n \langle (\gamma_{n\uparrow}^\dagger u_n^*(\vec{r}) - \gamma_{n\downarrow} v_n(\vec{r})) (\gamma_{n\uparrow} u_n(\vec{r}) - \gamma_{n\downarrow}^\dagger v_n(\vec{r})) \rangle$$

$$= -V \sum_n \langle |u_n(\vec{r})|^2 \underbrace{\gamma_{n\uparrow}^\dagger \gamma_{n\uparrow}}_{f_n} + |v_n(\vec{r})|^2 \underbrace{\gamma_{n\downarrow} \gamma_{n\downarrow}^\dagger}_{1-f_n} \rangle$$

$$U(\vec{r}) = -V \sum_n \left[|u_n|^2 f_n + |v_n(\vec{r})|^2 (1 - f_n) \right]$$