

MAGNETIZEM

1.

1) IZVOR LOKALNIH MOMENTOV

Do zdaj smo obravnavali prekinno pojave, pri katerih so elektroni delokalizirani in jih opičemo v okviru karije pasov. Zdaj se moramo vprašati, kako elektroni postanejo ujeti v majhno področje prostora. Anderson, Nobelova 1977. Zakaj nečistoče magnetne? Posledica Coulombe odbojne interakcije.

Andersonov model: (toy model, "demonstration of possibility")

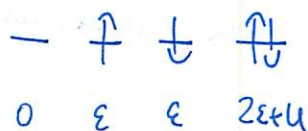
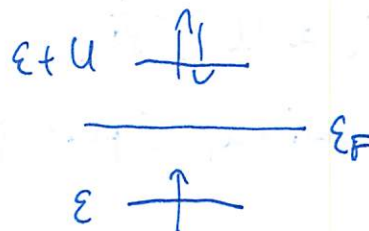
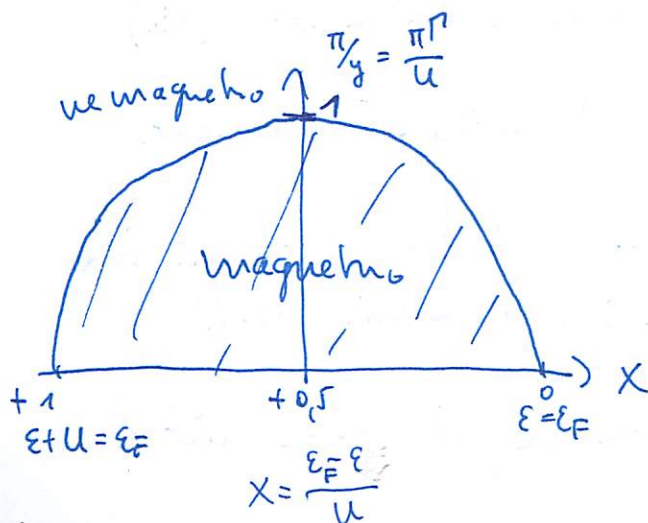
$$H = \sum_{k,\sigma} \epsilon_k n_{k\sigma} + E(n_{d\uparrow} + n_{d\downarrow}) + U n_{d\uparrow} n_{d\downarrow} + \sum_{k,\sigma} (V_{dk} d_{\sigma}^{\dagger} (c_{k\sigma}^{\dagger} + c_{k\sigma}))$$

Hibridizacija $V_{dk} = \langle d | V | k \rangle = \int \psi_d^*(\vec{r}) V(\vec{r}) \psi_k(\vec{r}) d^3r$

Če ne bi bilo interakcije, bi se nivo d samo razširil v resonanco

širine $\Gamma = \pi \rho(\epsilon) |V_{dk}|^2$, centrirano okoli ϵ .

Če računamo s Hartree-Fockom, ^{SEMINAR} dobimo za $U > \pi\Gamma$ razcep resonance v dve spinsko odvisni stanji, eno zasedeno pod ϵ_F in eno prazno nad ϵ_F . Elektron v stanju d se meša s propagirajočimi stanji, in lokalnega vezanega stanja ^(zgolj resonanca) vseeno pa obstaja lokalni magnetni moment.



magnetni, če $\epsilon_F < \epsilon$ ali $\epsilon_F > \epsilon+U$.

Opomba: pogosto postavimo $\epsilon_F = 0$.

Se poenostavi na Kandov model:

$$H = \sum_{\ell\ell'} \varepsilon_{\ell} n_{\ell\ell'} + J \vec{S} \cdot \vec{S} \quad \vec{S} = \frac{1}{N} \sum_{\ell\ell'} c_{\ell\ell'}^\dagger \frac{1}{2} \vec{\sigma}_{\ell\ell'} c_{\ell\ell'}$$

$$J = \frac{2\Gamma}{\pi\rho} \left(-\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon+U} \right)$$

(Schrieffer-Wolff) $\rightarrow$ SEMINAR

Coleman 16.8

Če $\varepsilon = -U/2$, potem $\rho J = \frac{8\Gamma}{\pi U}$.

Sklopitev je AFM, ker elektron z nasprotnim spinom lažje sčrta v urejeno stanje nečistoče.

V obeh modelih lokalni moment izgine pri nizkih temperaturah. Sklopitev med lokalnim momentom in spinom prevodnikov elektronov postaja čedalje manjša. Pride do vezave v singletno stanje, t.i. Kandov singlet. Obleči nečistoče nastane "Kandov oblaki", ki ima celotno nasproten spin. Dinamična kvantomehanska teorija. Podobno kot ujetje kvarkov različnih barv v QCD.

Problem je bil rešen Wilson z numerično renormalizacijsko grupo (NRG). Nobelova 1982

Računamo prispevek nečistoče k celotni spinski susceptibilnosti,

$$\chi_{imp}^{(T)} = k_B T \chi_{imp}^{(T)} / (g\mu_B)^2 = \langle S_z^2 \rangle - \langle S_z \rangle^2_{\text{system brez nečistoč}}$$

za prsto nečistočo dolimo $\mu_{imp}^{(T)} = 1/4$. Pade na nič na temperaturnem območju $T \sim T_c \propto U e^{-\frac{1}{\rho J}}$. ρ : gostota stanj pri ε_F . (No)

Problem ni perturbativen, čeprav je J majhen parameter.

Kandov pojav: upornost levim z magnetnimi nečistočami ima minimum pri končni temperaturi. (1933)

Danes: kvantne pike, magnetne molekule, Kandova rešetka

Do Tu, 7.5.2024



Harree-Fock za Andersonov model učišće

$$U_{d\uparrow}U_{d\downarrow} \rightarrow \langle U_{d\uparrow} \rangle U_{d\downarrow} + U_{d\uparrow} \langle U_{d\downarrow} \rangle - \langle U_{d\uparrow} \rangle \langle U_{d\downarrow} \rangle$$

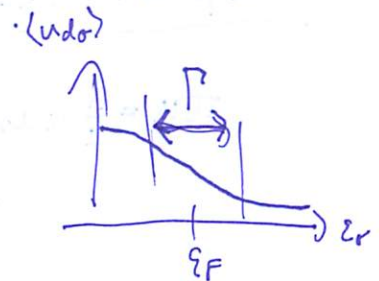
Energija nivoa postane spinusko odvisna, $\epsilon \rightarrow \epsilon_{\sigma} = \epsilon + U \langle U_{d\bar{\sigma}} \rangle$

Spektralna funkcija za nivo d:

$$A_{\sigma}(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma}{(\omega - \epsilon_{\sigma})^2 + \Gamma^2}$$

Zatvorenost:

$$\langle U_{d\sigma} \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\epsilon_F} \frac{\Gamma}{(\omega - \epsilon_{\sigma})^2 + \Gamma^2} d\omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{\epsilon_F - \epsilon_{\sigma}}{\Gamma}$$



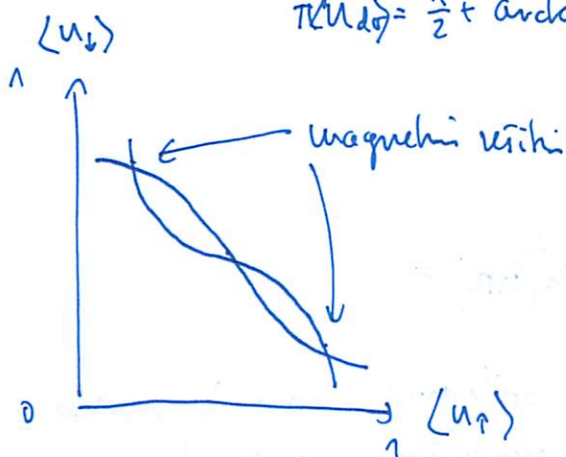
$$\langle U_{d\uparrow} \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{\epsilon_F - \epsilon - U \langle U_{d\downarrow} \rangle}{\Gamma}$$

$$x = \frac{\epsilon_F - \epsilon}{U}$$

$$\langle U_{d\downarrow} \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{\epsilon_F - \epsilon - U \langle U_{d\uparrow} \rangle}{\Gamma}$$

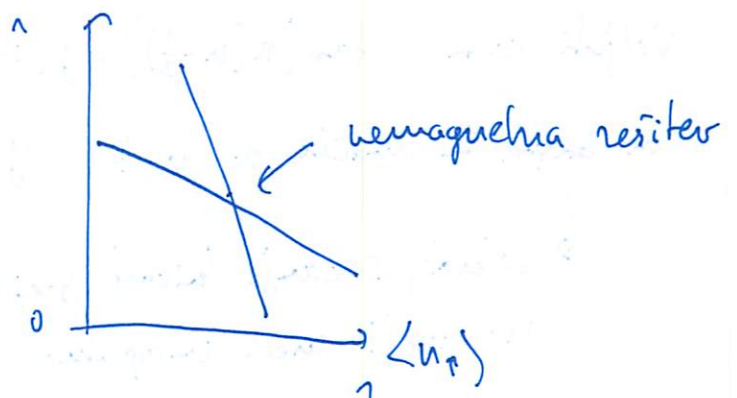
$$y = \frac{U}{\Gamma}$$

$$\pi \langle U_{d\sigma} \rangle = \frac{\pi}{2} + \arctan [y(x - \langle U_{d\bar{\sigma}} \rangle)]$$



$$x = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{U}{\Gamma} = 5$$



$$x = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{U}{\Gamma} = 1$$

Magnezna limita, $y \gg 1$, x ni preveč blizu 0 ali 1.

$$u_{dr} \sim 1, u_{dl} \sim 0$$

$$\pi u_{dr} \approx \pi - \frac{1}{y(x - u_{dl})}$$

$$\pi u_{dl} \approx -\frac{1}{y(x - u_{dr})}$$

$$u \approx u_{dr} - u_{dl} \approx 1 - \frac{1}{\pi x y (1-x)}$$

$$f(z) = \frac{\pi}{2} + \arctan z = \begin{cases} \pi - \frac{1}{z} & z \rightarrow \infty \\ -\frac{1}{z} & z \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Nemagnezna limita

$$u = u_{dr} = u_{dl}$$

$$\pi u = \frac{\pi}{2} + \arctan(y(x-u)) \Rightarrow \tan\left[\pi\left(u - \frac{1}{2}\right)\right] = y(x-u)$$

$\uparrow$ v bližini $u \sim 1/2$

$$\approx \pi\left(u - \frac{1}{2}\right)$$

$$u \approx \frac{1}{2} + \frac{1 + \frac{2xy}{\pi}}{1 + \frac{y}{\pi}}$$

Meja

$$\text{veljati mora } \tan\left[\pi\left(u - \frac{1}{2}\right)\right] = y(x-u)$$

$$\text{in odvod te kvadrat po } u: y + \pi / \sin^2(u\pi) = 0$$

↳ faktor sekacije kvadrat preide v dobitkanje, kar je ravno na meji med magnežno in nemagnežno rešitvijo

2) MAGNETIZEM V HUBBARDOVEM MODELU

(2.)

Taj model na dveh mestih

$$H = T + V$$

$$T = -t \sum_{\langle i,j \rangle} (c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma} + c_{j\sigma}^\dagger c_{i\sigma})$$

$$V = U \sum_{i=1}^N n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}$$

$U \gg t$. Radi bi dobili efektivni nizkoenergijski model (v podprostoru, kjer udeleženo mesto ni dvojno zasedeno).

$T = T_0 + T_+ + T_-$ T_m je operator skokov, pri katerem se število dvojno zasedenih mest spremeni za m

$$T_+^\dagger = T_-$$

$$T_0^\dagger = T_0$$

Označba d za št. dvojno zasedenih mest!

Iščemo unitarno transformacijo, ki bo odpravila T_+ in T_- .

$W = e^S$ S je antihermitski operator, povezan z T_+ in T_- .

Kar bi bilo brezdimenzijski. Del bi moramo s količino, povezano z energijsko ceno za dvojno zasedenost.

Ugotovimo $S = \frac{1}{U} (T_+ - T_-)$ $S^\dagger = -S$

$$\tilde{H} = W H W^\dagger = H + [S, H] + \frac{1}{2!} [S, [S, H]] + \dots$$

[Velja $[V, T_m] = m U T_m$ (operator V samo prešče dvojno zasedena mesta)

sledi $[S, H] = -T_+ - T_- + O(\frac{t}{U})$ in $[S, [S, H]] = \frac{2}{U} [T_+, T_-]$

$$\tilde{H} = V + T_0 + \frac{1}{U} [T_+, T_-]$$

št. dvojno zasedenih mest se ohranja, $[\tilde{H}, V] = 0$.

Polovična zaporeditev, štirih stanj: $\uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow, \downarrow\downarrow$.

$T_0, T_{\pm}$ ne delujata v nizkoenergijškem podprostoru. $V \approx 0$.

Zato $\tilde{H} = -\frac{1}{u} T_- T_+$.

Izračunamo lahko kar $-\frac{1}{u} T_-^2$, kar T_+ deluje enako kot T_- ,

drugi T_- pa $\uparrow\downarrow$ lahke generira $\downarrow\downarrow$ stanja

znotraj podprostora -
 $s^z s^z$ $\frac{1}{2}(s^+ s^- + s^- s^+)$

Velja $\langle \uparrow\downarrow | \tilde{H} | \uparrow\downarrow \rangle = \langle \downarrow\uparrow | \tilde{H} | \downarrow\uparrow \rangle = -2 \frac{t^2}{u}$

$-1/2$

0

$\langle \uparrow\downarrow | \tilde{H} | \downarrow\uparrow \rangle = \langle \downarrow\uparrow | \tilde{H} | \uparrow\downarrow \rangle = +2 \frac{t^2}{u}$

0

$1/2$

in $\tilde{H} | \uparrow\uparrow \rangle = 0, \tilde{H} | \downarrow\downarrow \rangle = 0$

Takšne matrične elemente dobimo tudi v Heisenbergovem modelu

z $\tilde{H} = J (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - \frac{1}{4})$, kjer sta $\vec{S}_i = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} C_{i\alpha} \vec{\sigma}_{\alpha\beta} C_{i\beta}$

(Ideja v Hubbard-two-sites. ub)

Dolimo $J = \frac{4t^2}{u}$.

Komentar: takšen pristop izpeljevanja nizkoenergijških efektivnih modelov z eliminacijo virtualnih prehodov skozi visokoenergijški sektor je temelj metode renormalizacijske grupe (RG).

Po vsaki transformaciji pogledamo, kaj se je zgodilo s koeficienti različnih členov Hamiltoniana. Pomembno je, ali narasčajo ali upadajo ob spuščanju meje med nizkoenergijškim in visokoenergijškim sektorjem.

Iz modela itinerantnih elektronov smo izpeljali spinovski model.

To je posledica integracije u . u mora biti zadostno velik, da je sistem na Mottovi strani prehoda med kovinskim in izolatorskim stanjem.

Uporabna identiteta: $\sum_{\sigma\sigma'} C_{1\sigma}^\dagger C_{2\sigma'}^\dagger C_{1\sigma'} C_{2\sigma} = -\frac{1}{2} \{u_1 u_2 + 4 \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2\}$

Bolj splošno: na veliki rošči, zasedenost lahko manjša od polovice.

Uporabimo drugačen zapis: P naj bo projektor na podprostor, v katerem uleto mesto ni dodatno zasedeno, Q projektor na komplementarni del prostora.

$$\tilde{H} = \overbrace{PHP}^{V+T_0} - \frac{1}{u} \overbrace{PTQ}^{T_-} \overbrace{QTP}^{T_+}, \quad \text{ker velja } Q^2 = Q.$$

$$QTP = \sum_{ij\sigma} t_{ij} u_{i\bar{\sigma}} c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma} (1 - u_{j\bar{\sigma}})$$

$$PTQ = \sum_{ij\sigma} t_{ij} (1 - u_{i\bar{\sigma}}) c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma} u_{j\bar{\sigma}} \quad \overline{T} = \downarrow \quad \underline{T} = \uparrow$$

Če imamo samo skakanje med sosednjimi mesti, $t_{ij} = -t$, potem dobimo

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & -t \sum_{\langle ij \rangle \sigma} \tilde{c}_{i\sigma}^\dagger \tilde{c}_{j\sigma} + J \sum_{\langle ij \rangle} (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j - \frac{\hat{n}_i \cdot \hat{n}_j}{4}) \\ & - \frac{t^2}{u} \sum_{\substack{\langle ij \rangle \\ \sigma}} (\tilde{c}_{i\sigma}^\dagger \hat{n}_{j\sigma} \tilde{c}_{i\sigma} - \tilde{c}_{i\sigma}^\dagger \tilde{c}_{j\sigma} \tilde{c}_{j\sigma}^\dagger \tilde{c}_{i\sigma} + \text{h.c.}) \end{aligned}$$

$\langle ij \rangle$ pomeni, da sta i in j najbližja sosedata od j .

Tu so $\tilde{c}_{i\sigma}^\dagger = c_{i\sigma}^\dagger (1 - u_{i\bar{\sigma}})$ in $\tilde{c}_{i\sigma} = c_{i\sigma} (1 - u_{i\bar{\sigma}})$

operatorji, ki delujejo na reduciranem podprostoru.

Ne zaostajajo kanoničnih antikomutacijskih zvezam.

Dugo ustico pogosto zanemarimo, če odmik od polovične zapolnitve ni velik.

Prva ustica se imenuje model t - J . Pogosto se uporablja kot model za koprane visokotemperaturne superprevodnike.

Opisuje gibanje vrzeli v antiferomagnetnem spinskem ozadju.

3. HEISENBERGOV MODEL IN IZDELJANJE

Heisenbergov: $H = (-J) \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$ V tem zapisu ima J dimenzije energije, spini pa so brezdimenzijski!
 $\langle i,j \rangle$ ↑ izmenjalni integral/sklopikl

d : dimenzija prostora

D : dimenzija spinskega prostora

$D=3$ Heisenbergov, $D=2$ XY, $D=1$ Isingov.

1D Isingov ($D=1, d=1$): ni reda dolgega dosega, ^{pri $T>0$} spontano nastanejo domenske stene, ker je energijska cena $\mathcal{O}(1)$, entropija pa $\mathcal{O}(\ln N)$.

2D Isingov ($D=1, d=2$): točna rešitev znana (Onsager, 1944).

Obstaja fazni prehod v urejeno stanje.

1D Model XY ($D=2, d=1$): se prelika na 1D proste fermione (Jordan-Wigner).

2D Model XY ($D=2, d=2$): Hockert-Thoulessov prehod med dveh fazama brez reda dolgega dosega, ki pa imata različne topološke lastnosti. Magnetni utinci so prosti v eni fazi, v drugi pa tvorijo vezana stanja. Hockert-Thouless Naredava 2016 (po Haldaneu).

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j)$$

1D Heisenbergov ($D=3, d=1$): točna rešitev z Bethejevim nastankom, ser abelajskih enačb. Nima reda dolgega dosega.

2D Heisenbergov ($D=3, d=2$): mediter samo pri $T=0$. Pomemben v kontekstu visokotemperaturnih superprevodnikov.

3D Heisenbergov ($D=3, d=3$): fazni prehod pri temperaturi T_1 dobro raziskan z metodami RG.

4. TEORIJA SPINSKIH VALOV

(4)

$t = 1$ $[S^x, S^y] = i\epsilon_{xyz} S^z$

$$S^+ = S^x + iS^y$$

$$S^- = S^x - iS^y$$

$$[S^z, S^\pm] = \pm S^\pm$$

$$[S^+, S^-] = 2S^z$$

Manjši, bolj je spin, bolj je "kvanten".

$S \rightarrow \infty$ je "klasična limita".

Holstein - Primakoffova transformacija: preslika spinske algebre na bozonsko stanje. Primerno za magnetno vezane sisteme.

$$S^+ = a^\dagger (2S - a^\dagger a)^{1/2}$$

$$S^- = (2S - a^\dagger a)^{1/2} a$$

$$S^z = a^\dagger a - S$$

$$[a, a^\dagger] = 1$$

Komutacijske zveze preide v zvezke Holstein - Primakoff. ur.

$|S^z = -S\rangle$ je bozonski vakuum, $|0\rangle$. Stanje $|S^z = +S\rangle$ je stanje z $n = 2S$ bozoni.

Kvadratni kerri so definirani v bazi, ki je diagonalna glede na $a^\dagger a$:

$$a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle \Rightarrow (2S - a^\dagger a)^{1/2} |n\rangle = (2S - n)^{1/2} |n\rangle$$

Fizična stanja so $n \in \{0, 1, \dots, 2S\}$.

Nefizična stanja z $n > 2S$ so odplejena, ker $S^+ |2S\rangle = a^\dagger (2S - a^\dagger a)^{1/2} |2S\rangle = 0$.

Kvadratni kerri lahko razvijemo:

$$\sqrt{2S - n} = \sqrt{2S} \left(1 - \frac{n}{4S} - \frac{n^2}{32S^2} \dots \right)$$

To je razvoj po $1/S$.
 $S \rightarrow \infty$ je klasična limita.

To bomo uporabili v Hamiltonianu za spinske valove, kjer bomo obdržali člene do kvadratnega. Členi višjega reda opisujejo interakcije med spinskimi valovi.

Pozor: če razvoj odrežemo, s tem slepimo fizična in nefizična stanja. Vseeno uspešna teorija.

Schvingerjani bozoni so druga reprezentacija, ki je bolj uporabna za neurejene sisteme. Uvedemo dva bozona:

$$S^+ = a^\dagger b$$

$$S^- = b^\dagger a$$

$$S^z = \frac{1}{2}(a^\dagger a - b^\dagger b)$$

Fizikalni podprostor $\{ |u_a, u_b\rangle : u_a + u_b = 2S \}$

Uporabiti moramo vez $a^\dagger a + b^\dagger b = 2S$.

H.P. dolimo iz S.B., če enega izmed bozonskih odpravimo s pomočjo vezi.

Flromagnetni Heisenbergov model

$$H = - \sum_{i < j} J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$

Osnovno stanje $|F\rangle = | \downarrow \dots \downarrow \rangle$, $E_0 = -S^2 \sum_{i < j} J_{ij}$, bozonski vakuum.

$$\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j = \frac{1}{2} S_i^+ S_j^- + \frac{1}{2} S_i^- S_j^+ + S_i^z S_j^z \quad i \neq j$$

$$= S a_i^\dagger \left(1 - \frac{a_i^\dagger a_i}{4S} \right) \left(1 - \frac{a_j^\dagger a_j}{4S} \right) a_j$$

$$+ S \left(1 - \frac{a_i^\dagger a_i}{4S} \right) a_i a_j^\dagger \left(1 - \frac{a_j^\dagger a_j}{4S} \right)$$

$$+ (a_i^\dagger a_i - S)(a_j^\dagger a_j - S)$$

$$= S^2 + S(a_i^\dagger a_j + a_j^\dagger a_i - a_i^\dagger a_i - a_j^\dagger a_j)$$

$$+ \left\{ a_i^\dagger a_i a_j^\dagger a_j - \frac{1}{4} a_i^\dagger a_i^\dagger a_i a_j - \frac{1}{4} a_i^\dagger a_j^\dagger a_j a_i \right\} + \mathcal{O}(1/S)$$

Ta dva sta
kompletano konjugirani
izražajo prištevila dveh

$$\left\{ \frac{1}{4} a_j^\dagger a_i^\dagger a_i a_j - \frac{1}{4} a_j^\dagger a_j^\dagger a_j a_i \right\} + \mathcal{O}(1/S)$$

$$H = -S^2 \sum_{i < j} J_{ij} + S \sum_{i < j} J_{ij} (a_i^\dagger a_i + a_j^\dagger a_j - a_i^\dagger a_j - a_j^\dagger a_i) + \mathcal{O}(S^0)$$

klasična
energija
osnovega
stanja
 $\mathcal{O}(S^2)$

Hamiltonian za spinske valove
 H_{sw}

interakcije
med spinskimi
valoni

5.

Fourierova transformacija:

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{q}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{R}_i} a_{\vec{q}}$$

$$a_{\vec{q}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i e^{-i\vec{q} \cdot \vec{R}_i} a_i$$

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \Rightarrow [a_{\vec{q}}, a_{\vec{q}'}^\dagger] = \delta_{\vec{q}, \vec{q}'}$$

$$\text{velja } \frac{1}{N} \sum_i e^{i(\vec{q} - \vec{q}') \cdot \vec{R}_i} = \delta_{\vec{q}, \vec{q}'}$$

$$H_{sw} = S \sum_{\vec{q}} [J(0) - J(\vec{q})] a_{\vec{q}}^\dagger a_{\vec{q}} \Rightarrow \omega_{\vec{q}} = S [J(0) - J(\vec{q})]$$

$$J(\vec{q}) = \sum_j \underbrace{J_{ij}}_{J(\vec{s}_j)} e^{i\vec{q} \cdot \vec{s}_j} \quad \vec{s}_j = \vec{R}_j - \vec{R}_i$$

če imamo center invertije:

$$J(\vec{q}) = \sum_j J(\vec{s}_j) e^{i\vec{q} \cdot \vec{s}_j} = \sum_j J(\vec{s}_j) \cos(\vec{q} \cdot \vec{s}_j) = \sum_j J(\vec{s}_j) \left[1 - \frac{(\vec{q} \cdot \vec{s}_j)^2}{2} + \dots \right]$$

Torej $\omega_{\vec{q}} = \propto q^2$ Magnonski spekter. Magnoni so bozoni, nosijo spin $\Delta S = 1$.

Spinška polarizacija: $\langle S_i^z \rangle = -S + \langle a_i^\dagger a_i \rangle$

$$= -S + V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega_k}{k_B T}} - 1} = -S + g(T^{3/2})$$

$v \ d=3$

V $d=2$ integral divergira. V $d \leq 2$ ni faznega prehoda v

urejeno stanje pri $T > 0$. (MW izrek) $d=2$ je spodnja kritična dimenzija za H.M.
Mermin-Wagner

Zaradi členov višjega reda imajo magnoni končen življenjski čas, niso zares lastna stanja.

5. SPINSKI VALOVI V ANTIFEROMAGNETIH

(Anovos)

V Heisenbergovem antiferomagnetnem klasičnem (Néelovo) stanju ni kvantomehanske lažne stanje zaradi prečnih členov sklopitve $(S_i^+ S_j^- + S_i^- S_j^+)$.

Primer 1: kvadratna

Primer 2: centrirana kvadratna

Bipartitna mreža (A/B). Néelovo stanje $|N\rangle = |\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\dots\rangle$ izberemo za vakuumsko stanje v Holstein-Primakoffovi transformaciji.

Podmreža A ($\downarrow$)

$$S^+ = a^\dagger (2S - a^\dagger a)^{1/2}$$

$$S^- = (2S - a^\dagger a)^{1/2} a$$

$$S^z = a^\dagger a - S$$

Podmreža B ($\uparrow$)

$$S^+ = -(2S - b^\dagger b)^{1/2} b$$

$$S^- = -b^\dagger (2S - b^\dagger b)^{1/2}$$

$$S^z = S - b^\dagger b$$

$$\vec{S}_A(\vec{r}) \cdot \vec{S}_A(\vec{r}') = S^2 + S(a_{\vec{r}}^\dagger a_{\vec{r}'} + a_{\vec{r}'}^\dagger a_{\vec{r}} - a_{\vec{r}}^\dagger a_{\vec{r}} - a_{\vec{r}'}^\dagger a_{\vec{r}'} + \mathcal{O}(S^0))$$

$$\vec{S}_B(\vec{r}) \cdot \vec{S}_B(\vec{r}') = S^2 + S(b_{\vec{r}}^\dagger b_{\vec{r}'} + b_{\vec{r}'}^\dagger b_{\vec{r}} - b_{\vec{r}}^\dagger b_{\vec{r}} - b_{\vec{r}'}^\dagger b_{\vec{r}'} + \mathcal{O}(S^0))$$

$$\vec{S}_A(\vec{r}) \cdot \vec{S}_B(\vec{r}') = -S^2 + S(a_{\vec{r}}^\dagger a_{\vec{r}'} + b_{\vec{r}'}^\dagger b_{\vec{r}} - a_{\vec{r}}^\dagger b_{\vec{r}'} - a_{\vec{r}} b_{\vec{r}'} + \mathcal{O}(S^0))$$

A ležijo na $\vec{r}$, B ležijo na $\vec{r} + \vec{\delta}$ (kristalna mreža z bazo)

$$H = - \sum_{\vec{r}, \vec{r}'} \left[\frac{1}{2} J_{AA}(\vec{r} - \vec{r}') \vec{S}_A(\vec{r}) \cdot \vec{S}_A(\vec{r}') + \frac{1}{2} J_{BB}(\vec{r} - \vec{r}') \vec{S}_B(\vec{r}) \cdot \vec{S}_B(\vec{r}') + J_{AB}(\vec{r} - \vec{r}') \vec{S}_A(\vec{r}) \cdot \vec{S}_B(\vec{r}') \right]$$

$$E_{cl} = S^2 \sum_{\vec{r}, \vec{r}'} \left[-\frac{1}{2} J_{AA}(\vec{r} - \vec{r}') - \frac{1}{2} J_{BB}(\vec{r} - \vec{r}') + J_{AB}(\vec{r} - \vec{r}') \right]$$

Do Tu, 14. 5. 2024

$$H_{sw} = -S \sum_{\vec{r}, \vec{r}'} \left[J_{AA}(\vec{r} - \vec{r}') (a_{\vec{r}}^\dagger a_{\vec{r}'} - a_{\vec{r}} a_{\vec{r}}) + J_{BB}(\vec{r} - \vec{r}') (b_{\vec{r}}^\dagger b_{\vec{r}'} - b_{\vec{r}} b_{\vec{r}}) + J_{AB}(\vec{r} - \vec{r}') (a_{\vec{r}}^\dagger b_{\vec{r}'} + b_{\vec{r}'}^\dagger a_{\vec{r}} - a_{\vec{r}}^\dagger b_{\vec{r}} - a_{\vec{r}} b_{\vec{r}'} + \mathcal{O}(S^0)) \right]$$

Tipično $J_{AA} > 0, J_{BB} > 0$ in $J_{AB} < 0$.

F.T. v $a_{\vec{r}}, b_{\vec{r}}, J_{AA}(\vec{r}), J_{BB}(\vec{r}), J_{AB}(\vec{r})$. ker $\exists$ center inverzije

$$\text{Velja } J_{AA}(\vec{r}) = J_{AA}(-\vec{r}) = [J_{AA}(\vec{r})]^*, \quad J_{AB}(\vec{r}) = [J_{AB}(-\vec{r})]^*$$

$$a_{\vec{r}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{r}'} e^{i\vec{r} \cdot \vec{r}'} a_{\vec{r}'}$$

$$J_{AA}(\vec{r}) = \sum_{\vec{r}'} J_{AA}(\vec{r}') e^{i\vec{r} \cdot \vec{r}'}$$

$$b_{\vec{r}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{r}'} e^{i\vec{r} \cdot (\vec{r}' + \vec{\delta})} b_{\vec{r}'}$$

$$J_{AB}(\vec{r}) = \sum_{\vec{r}'} J_{AB}(\vec{r}') e^{i\vec{r} \cdot (\vec{r}' + \vec{\delta})}$$

Vakuumsko stanje za bozone, (0),
ni lastno stanje. Posledica spin-flip člena. (6)

$$H_{SW} = \sum_k \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ S(J_{AA}(0) - J_{AA}(k) - J_{AB}(0))}}{\Omega_k^{AA}} a_k^\dagger a_k + \underset{\substack{\uparrow \\ S(J_{BB}(0) - J_{BB}(k) - J_{AB}(0))}}{\Omega_k^{BB}} b_k^\dagger b_k + \Delta_k a_k^\dagger b_{-k}^\dagger + \Delta_k^* a_k b_{-k} \right\}$$

$B = \begin{pmatrix} u_k & v_k \\ v_k^* & u_k^* \end{pmatrix}$
 $B^\dagger \sigma_3 B = \sigma_3$
 "pseudounitarna" grupa $U(1,1)$

Bogoljubov:

(PAZI: kanonična, ni pa unitarna!!)

$$a_k = u_k \alpha_k - v_k^* \beta_{-k}^\dagger$$

$$\alpha_k = u_k^* a_k + v_k^* b_{-k}^\dagger$$

$$b_{-k} = u_k \beta_{-k} - v_k^* \alpha_k^\dagger$$

$$\beta_{-k} = u_k^* b_{-k} + v_k^* a_k^\dagger$$

$$[\alpha_k, \alpha_{k'}^\dagger] = [\beta_k, \beta_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'} \quad \text{če} \quad u_k^* u_k - v_k^* v_k = 1.$$

Izberemo $\Omega_k^{AA} = \Omega_k^{BB} = \Omega_k$. Realne količine. Δ_k pa je kompleksen.

Nešani členi $\alpha_k^\dagger \beta_{-k}^\dagger + \alpha_k \beta_{-k}$ odpadejo, če $\tanh(2\theta_k) = \frac{|\Delta_k|}{\Omega_k}$.

$$\eta_k = \frac{1}{2} \arg \Delta_k, \quad u_k = e^{i\eta_k} \cosh \theta_k, \quad v_k = e^{-i\eta_k} \sinh \theta_k.$$

$$\begin{aligned} \sinh(2x) &= 2 \sinh x \cosh x \\ \cosh(2x) &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\ \frac{1}{\cosh^2 x} &= 1 - \tanh^2 x \\ \frac{1}{\sinh^2 x} &= \cosh^2 x - 1 \end{aligned}$$

$$\text{sledi } H_{SW} = \sum_k E_k (\alpha_k^\dagger \alpha_k + \beta_{-k}^\dagger \beta_{-k}) + \sum_k (\underbrace{E_k - \Omega_k}_{\text{kvantni popravek k energiji osmanega stanja, negativen}})$$

$$\cosh 2\theta = \frac{\Omega_k}{E_k}$$

$$E_k = \sqrt{\Omega_k^2 - |\Delta_k|^2}$$

$$\sinh 2\theta = \frac{|\Delta_k|}{E_k}$$

Za kanonično simetrijo velja

$$\Omega_k = SW + SX k^2 + \dots$$

$$\Delta_k = -SW + SY k^2 + \dots$$

$$\left. \begin{aligned} \Omega_k &= SW + SX k^2 + \dots \\ \Delta_k &= -SW + SY k^2 + \dots \end{aligned} \right\} E_k = \hbar c k$$

$$W = - \sum_{\vec{r}} J_{AB}(\vec{r} + \vec{\delta})$$

$$X = \sum_{\vec{r}} J_{AA}(\vec{r} + \vec{\delta}) \vec{r}^2$$

$$Y = \sum_{\vec{r}} J_{AB}(\vec{r} + \vec{\delta}) |\vec{r} + \vec{\delta}|^2$$

$$c = S \sqrt{2W(X+Y)}$$

$$\langle S_R^z \rangle = -S + \langle a_R^\dagger a_R \rangle = -S + \frac{1}{N} \langle a_k^\dagger a_k \rangle$$

$$= -S + \frac{1}{N} \sum_k \langle (u_k^* \alpha_k^\dagger - v_k \beta_{-k}) (u_k \alpha_k - v_k^* \beta_{-k}^\dagger) \rangle$$

$$= -S + \frac{V}{N} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left\{ \frac{\Omega_k}{E_k} \frac{1}{e^{E_k/k_B T} - 1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_k}{E_k} - 1 \right) \right\}$$

Polarizacija zmanjšana tudi pri $T=0$ zaradi kvantnih fluktuacij.

Integral divergira pri $T>0$ za $d \leq 2$ in tudi pri $T=0$ za $d=1$.

6. SPECIFIČNA TOPLOTA ✓ 14.5.2024

Imejmo bozonske vzburitve z $\omega_{\mathbf{q}} = A|\mathbf{q}|^{\sigma}$.

$$E(T) = V_d \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{A q^{\sigma}}{e^{\beta A q^{\sigma}} - 1} = \frac{A V_d \Omega_d}{(2\pi)^d} \left(\frac{k_B T}{A} \right)^{1 + \frac{d}{\sigma}} \int_0^{\infty} du \frac{u^{d/\sigma}}{e^u - 1}$$

$$\Omega_d = 2\pi^{d/2} / \Gamma(d/2) \quad \Omega_1 = 2 \quad \Omega_2 = 2\pi \quad \Omega_3 = 4\pi$$

$$u = \frac{A q^{\sigma}}{k_B T} \quad du = \frac{A}{k_B T} \sigma q^{\sigma-1} dq$$

$$E(T) \propto T^{1+d/\sigma} \Rightarrow C_V \propto T^{d/\sigma}$$

$$d^d \mathbf{q} = \Omega_d q^{d-1} dq$$

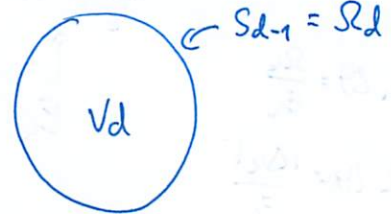
Za FM: $\sigma = 2 \Rightarrow C_V \propto T^{d/2}$

Za AFM: $\sigma = 1 \Rightarrow C_V \propto T^d$ (kot pri fononih,
kjer ima akustična
veja $\omega_{\mathbf{q}} \propto q$)

Ω_d je površina enotske sfere v d dimenzijah.

$$V_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}$$

$$\Omega_{d-1} = \Omega_d$$



$$V_{d+1} = \int_0^1 \Omega_d r^d dr = \frac{1}{d+1} \Omega_d$$

$$\Omega_{d+1} = 2\pi V_d \leftarrow \text{sledi iz lijevline preslice}$$

med enotsko sfero S_{d+1} in $S_1 \times B_d$

↑
ball

$$(x, y, \hat{z}) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \hat{z} \right)$$

$$|(x, y, \hat{z})| = 1$$

Ta presliceva dvanajsteri volumen.

7. ENODIMENZIONALNI SISTEMI

7.

1D $S=1/2$ Heisenbergov model z AFM sklopitrijo

Ni medije zaradi močnih kvantnih fluktuacij. "Kvantna kličnost"

Korrelacijska funkcija upada kot potlačna funkcija (z log. popravkom):

$$\langle g_s | \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j | g_s \rangle \sim (-1)^{i-j} \frac{\log^{1/2} |i-j|}{|i-j|^2}$$

Včasih temu rečemo "kvazi-ureditev" (ker je upadanje počasnejše kot eksponentno, kar niso pričakujemo v uredjenih fazah). Lokalno pa je malo podobno Néelovemu stanju.

Ni zelena simetrije, kljub temu pa obstajajo vztrdnice, katerih energija gre proti nič za $g \rightarrow 0$. Spinski val ($S=1$) razpade na dva "spinona" ($S=1/2$). Frakcionalizacija, podobna tisti v SSH.

↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ vzorec 1

↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ vzorec 2

↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↓ ↓ ↑ ↓ ↑ spin-flip
 $\Delta S = 1$

↓ ↑ ↓ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↓ ↑ dva spinona (domenski steni)
vzorec 1 vzorec 1 vzorec 2
 $\Delta S = -1/2$ $\Delta S = -1/2$

VALENČNE VEZI

Sklopitev z drugim najbližjim sosedom:

$$H = J \sum \vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1} + J' \sum \vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+2}$$

$J' > 0 \rightarrow$ frustracija, ker penalizira vztrdnost spinov na isti podmočji!

Hajmendar-Glash (Girvin) $\downarrow J' = J/2$

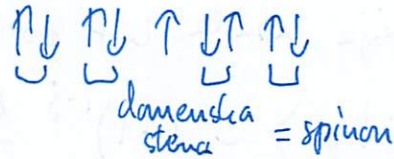
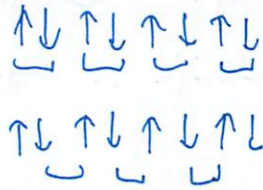
$$H = \frac{J}{2} \sum (\vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1} + \vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j-1} + \vec{S}_{j-1} \cdot \vec{S}_{j+1})$$

$$= \frac{J}{4} \sum (\vec{S}_{j-1} + \vec{S}_j + \vec{S}_{j+1})^2 + \text{const.}$$

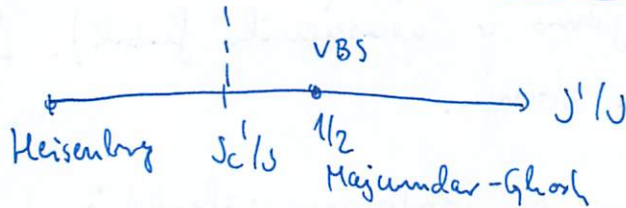
Točno rešljiv!

Osnovno stanje vsakega dvojčka ima inčli $S=1/2$. Če dva izmed teh spinov tvorita singlet, to je pogoj izpolnjen.

Spontano diverzificirano osnovno stanje: kristal iz valenčnih vezi (VBS) zaradi tvorbe singletnih stanj med sosedi.



Flavijana translacijska simetrija, 2x degenerirano osnovno stanje. Vzburitve z $S=1/2$, lončen gap. Umelečije upadajo liho (eksponentno).



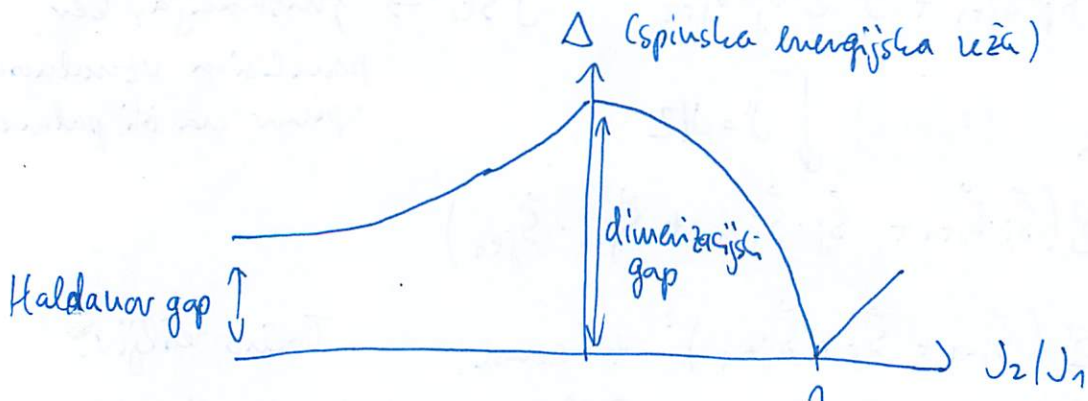
Alternirajoča veriga z J_1, J_2 ; $J_1 > J_2$. Lahko pa se zlepi translacijska simetrija zaradi sklopitve s funkcijami ("spin-peaks").

Expliciten zlom simetrije, osnovno stanje je nedegenerirano VBS. Vzburitve so magnoni (spini ostanejo vezani, ker so povezani z verigo energijsko ugodno ležečih singletov). Umelečije upadajo, ker moramo razcepiti singlet (diverzificirani gap).

$S=1$ veriga. Lahko razumemo tudi kot $J_2 \rightarrow -\infty$ limito prehodnega modela.



Vzburitve imajo gap, ki se tu imenuje Haldanov gap. Obstaja v vseh Heisenbergovih verigah s celostnim S . Spinске korelacije padajo eksponentno.



8. MAGNETNE FRUSTRACIJE



$$S^{\pm}(s, m) = \sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)} \begin{pmatrix} s, m \pm 1 \\ s, m \end{pmatrix}$$

$$\langle s, s | S^z S^z | s, s \rangle \text{ vs } \langle s, s | S^+ S^- | s, s \rangle$$

Trubo magnetne uretke lahko preprečijo frustracije zaradi interakcij, ki med seboj tekmujejo in/ali topologije mreže, nizke koordinacijskega števila. Spina ($s=1/2$ je najbolj kvanten) in nizka koordinacijskega števila.

Trikotna mreža, kagome mreža, piratna mreža in druge nepravilne mreže.

SINGLETI

Na dveh mestih ima singlet $\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$ veliko nižjo energijo kot Néelovo stanje, $-\frac{3}{4}J$ vs $-\frac{1}{4}J$. V singletu so vse komponente spina obratno poravnane, ne samo tista v smeri z. Singlet je maksimalno prepleteno stanje, Néelovo stanje je produktno. Singleti so primer ne-klasičnih korelacij (Bellova stanja).

Če imamo štiri mesta: Néel $-J$, dva singleti $-\frac{3}{2}J$.

Polna kvadratna mreža: Néelovo stanje zmaga. Za pamsiter Néelovega stanja je počešno nekaj frustracije.

Singleti se ne morejo "prekrivati": koncept monogamije prepletenosti (če je A prepleten z B, potem B ne more biti prepleten s C).

Sistemu si lahko znižajo energijo s tvorbo superpozicij VBS

stanj: $|4\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle$. To so RVB (resonating valence bond) stanja. Ring exchange: $P_{(1234)} + P_{(1234)}^{-1}$.

V VBS so spinovi ujeti, dejanske vztrditve so torej magnoni. Posledica tega, da vrhiga singletov med spinoma ne more razbiti.

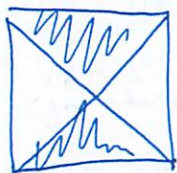
Lahko pa fluktuacije raztopijo VBC stanje in dobimo tekočino valenčnih vezi. RVB spinoma tekočina, ne zveni spinske niti mrežne simetrije. Morda obstaja na kagome mreži. Spinovi postanejo prosti.

5. MAGNETNE GRUPE

Dvobarvna simetrija: neka lastnost, ki lahko zavzame dve vrednosti (recimo magnetni moment).

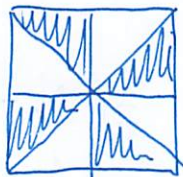
Antisimetrijska operacija, $1', \theta$. Spremeni predznak lastnosti.

V primeru magnetizma lahko to razumemo tudi kot obrat časa.



$4'm'm'$

$\{E, C_2, 2C_4, 2C_2, 2\sigma_d\}$



$4mm'$

$\{E, C_2, 2C_4, 2C_2, 2\sigma_d\}$



$4'mmm'$

$\{E, C_2, 2C_4, 2C_2, 2\sigma_d, 2\sigma_v\}$

Naj bo P navadna točkoma grupa. Recimo ji tudi uobarna grupa. Primerne za nemagnetne materiale in feromagnetne, kjer imajo vsi momenti isto polarizacijo.

$P_M = P \times 1', 1' = \{E, \theta\}$. Sive grupe. V kombinaciji s translacijami se pojavljajo v magnetnih prostorskih grupah. Recimo $T\bar{1}T$, translacija za eno mesto in θ .

Če ima P normalno podgrupo B in indeks 2 , $P = B \cup (P-B)$, $P-B = uB$ za poljubno $u \notin B$, potem definiramo črno-belo grupo Z $P_M = B \cup \theta(P-B)$. Primer je $C_{4v} = 4mm$ (glej zgornj). v 3D jih je 58.

MAGNETNA BRAVAISOVA MREŽA (BARVNA MREŽA)

Ima dve podmreži, črna in bela. Če odmislimo barvo, se uada udeležiti na navadno Bravaisovo mrežo.

5 v 2D in 22 v 3D. V 3D torej skupaj $14 + 22 = 36$ mrež.

Dodaten primitiven vektor $\vec{b}_{BW}$, ki skupaj z θ črno prestlika v belo podmrežo in obratno.

MAGNETNE PROSTORSKE GRUPE

230 uobarnih. 230 siveh. 674 BW z uobarno mrežo. 517 BW z BW mrežo. Skupaj 1191 BW. Vseh torej 1651.

10. MAGNETNE OSCILACIJE

9.

Elektroni v homogenem magnetnem polju. $\mathcal{L} = -e\phi$
 kinetični moment, ni merljiv, odvisen od izbrane umeritve

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} + e\vec{A})^2 + \frac{g\mu_B}{\hbar} \vec{S} \cdot \vec{B} \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$$

Landauova umeritev: $\vec{A} = (0, B_0 x, 0)$

$\vec{\Pi} = \vec{p} + e\vec{A}$ $[\Pi_x, \Pi_z], [\Pi_y, \Pi_z] = 0$ vendar $[\Pi_x, \Pi_y] = -i\hbar e B_0$
 kinetični moment, merljiv, umsko operator ličnosti

Π_x in Π_y ne moremo obedi diagonalizirati z ravnimi valovi.

$$\psi(\vec{r}) = e^{i(k_y y + k_z z)} \varphi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \varphi'' + \frac{m\omega_c^2}{2} (x - x_0)^2 \varphi = \left(\epsilon - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \right) \varphi \quad \omega_c = \frac{eB_0}{m_e} \quad x_0 = \frac{\hbar k_y}{m\omega_c}$$

$$\epsilon_{n k_z \sigma} = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + g\mu_B B_0 \frac{\sigma}{2}$$

Landauovi nivoji

Fermijeva kroglja razpade na cilindre. Fermijeva površina delimo kot presečišče sfere z Landauovimi cilindri. Če spreminjamo B_0 , bodo cilindri periodično pulajali skozi najbolj oddaljeno točko. To vpliva na merljive količine.

Magnetizacija (druz dokaza):

$$M_z = \frac{2}{3} n \frac{\mu_B^2}{\epsilon_F} B_0 \left\{ 1 - \frac{1}{3} + F_{osc}(B_0) \right\}$$

$$F_{osc}(B) = \frac{\pi k_B T}{\mu_B B_0} \sqrt{\frac{\epsilon_F}{\mu_B B_0}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{l}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - l\pi \frac{\epsilon_F}{\mu_B B_0}\right)}{\sinh\left(l\pi \frac{\pi k_B T}{\mu_B B_0}\right)} + \mathcal{O}\left(\frac{\mu_B B_0}{\epsilon_F}\right)$$

Pri čem: Paulijev spinski paramagnetizem zaradi Zeemanovega razcepa.

Dugi člen: Landauov diamagnetizem zaradi ciklotronskega kroženja elektronov.

Če upoštevamo kisloto, delimo se faktor $\left(\frac{m_e}{m^*}\right)^2$. Če je efektivna masa majhna (polprevodniki!), diamagnetizem prevlada. Izmed navadnih kovin izjemat.

Tretji člen: de Haas-van Alphenove oscilacije.

Pri nizki temperaturi, $k_B T \ll \mu_B B_0$.

$$\text{Periodes dolimo iz } 2n = \frac{\pi \epsilon_F}{\mu_B} \frac{1}{B_0^{(1)}} - \frac{\pi \epsilon_F}{\mu_B} \frac{1}{B_0^{(2)}} = \frac{\pi \epsilon_F}{\mu_B} \Delta\left(\frac{1}{B_0}\right).$$

Metoda za merjenje elustematičnih prenosov Fermijevih površin, dolimo zelo podobne in natančne podatke o topologiji in geometriji Fermijevih površin.

12. MODEL XY V ENI DIMENZIJ

Arovas

$$S^+ = S^x + iS^y$$

$$S^- = S^x - iS^y$$

$$H = \sum_{n=1}^{N-1} (J_x S_n^x S_{n+1}^x + J_y S_n^y S_{n+1}^y) + h \sum_{n=1}^N S_n^z$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} J_+ (c_n^\dagger c_{n+1} + c_{n+1}^\dagger c_n) + J_- (c_n^\dagger c_{n+1} + c_{n+1} c_n) + h \sum_{n=1}^N (c_n^\dagger c_n - \frac{1}{2})$$

$$J_{\pm} = \frac{1}{2} (J_x \pm J_y)$$

Če p.r.p., dodamo $\Delta H = J_x S_N^x S_1^x + J_y S_N^y S_1^y$

$$= -\frac{1}{2} e^{i\pi\hat{N}} (J_+ (c_N^\dagger c_1 + c_1^\dagger c_N) + J_- (c_N^\dagger c_1^\dagger + c_1 c_N))$$

$e^{i\pi\hat{N}}$ komutira z vsemi bilinearnimi operatorji ($c^\dagger c^\dagger, c^\dagger c, c c$), ker je to operator fermionske parnosti. Zato pišemo $\eta \equiv e^{i\pi\hat{N}} = \pm 1$

$$c_1 \equiv \begin{cases} -c_{N+1} & \eta = +1 \\ c_{N+1} & \eta = -1 \end{cases}$$

$$e^{i\pi\hat{N}} = -\eta$$

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ikn} c_k$$

$$H = \sum_{k>0} (c_k^\dagger \ c_{-k}) \begin{pmatrix} w_k & \Delta_k \\ \Delta_k^* & -w_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_k \\ c_{-k}^\dagger \end{pmatrix}$$

$$w_k = J_+ \cos k + h$$

$$\Delta_k = iJ_- \sin k$$

$$E_k = \sqrt{w_k^2 + |\Delta_k|^2}$$

11. JORDAN-WIGNERJEVA TRANSFORMACIJA

Prestikava med algebro za $S=1/2$ operacije in algebro brezspinskih fermionov. Uporabno v 1D. Mesta v verigi oštevilčimo, $j=1,2,\dots$

$$S_n^+ = \exp\left(in \sum_{j=1}^{n-1} c_j^\dagger c_j\right) c_n^\dagger$$

$$S_n^- = \exp\left(in \sum_{j=1}^{n-1} c_j^\dagger c_j\right) c_n$$

$$S_n^z = c_n^\dagger c_n - 1/2$$

$\exp(\dots)$ so fazni faktorji, ki popravijo predznake.

$$\begin{array}{cc} \bullet & \oplus \\ \uparrow & \downarrow \end{array}$$

$$c_n^\dagger = \exp\left(in \sum_{j=1}^{n-1} (S_j^z + \frac{1}{2})\right) S_n^+$$

$$c_n = \exp\left(in \sum_{j=1}^{n-1} (S_j^z + \frac{1}{2})\right) S_n^-$$

Jordan-Wignerjeva shema: $\exp\left(in \sum_{j=1}^{n-1} (S_j^z + \frac{1}{2})\right) = \prod_{j=1}^{n-1} \exp(in(S_j^z + \frac{1}{2}))$

Za sosedo velja

$$S_n^+ S_{n+1}^- = c_n^\dagger e^{in c_n^\dagger c_n} c_{n+1}^\dagger = c_n^\dagger c_{n+1}^\dagger$$

$$S_n^- S_{n+1}^+ = c_n e^{in c_n^\dagger c_n} c_{n+1}^\dagger = c_{n+1}^\dagger c_n$$

$$[S_n^\alpha, S_m^\beta] = 0 \quad \text{za } m \neq n$$

Upoštevati smo $c e^{in c^\dagger c} = -c$

$$c^\dagger e^{in c^\dagger c} = c^\dagger$$

$e^{in c^\dagger c}$ ima lastni vrednosti ± 1

Če imamo p.r.p., upoštevamo

$$S_N^+ S_1^- = e^{-in \hat{M}} c_N^\dagger c_1$$

$$S_N^- S_1^+ = e^{-in \hat{M}} c_1^\dagger c_N$$

$$\hat{M} = \sum_{j=1}^N c_j^\dagger c_j$$