

Klasična teorija polja

L. D. Landau in E. M. Liščic

Inštitut za fizikalne naloge, Akademija za znanost ZSSR, Moskva

Prevod: Rok Žitko, IJS

29. december 2003

Kazalo

1	Načelo relativnosti	6
1	Hitrost širjenja interakcije	6
2	Razmik	8
3	Lastni čas	12
4	Lorentzeva transformacija	13
5	Transformacija hitrosti	16
6	Vektorji četverci	18
7	Štiridimenzionalna hitrost	26
2	Relativistična mehanika	28
8	Načelo najmanjše akcije	28
9	Energija in gibalna količina	29
10	Transformacije porazdelitev	33
11	Razpad delcev	34
12	Invariantni sipalni presek	38
13	Elastični trki delcev	40
14	Vrtilna količina	44
3	Naboji v elektromagnetnih poljih	47
15	Osnovni delci v teoriji relativnosti	47
16	Četverni potencial polja	48
17	Gibalne enačbe delca v polju	50
18	Umeritvena invarianca	53
19	Nespremenljivo elektromagnetno polje	53
20	Gibanje v nespremenljivem homogenem električnem polju	55
21	Gibanje v nespremenljivem homogenem magnetnem polju	56
22	Gibanje naboja v nespremenljivem homogenem električnem in magnetnem polju	59
23	Tenzor elektromagnetnega polja	64
24	Lorentzeva transformacija polja	65
25	Invariantne količine polja	67
4	Enačbe elektromagnetnega polja	69
26	Prvi par Maxwellovih enačb	69
27	Akcija za elektromagnetno polje	70
28	Četverec toka	72
29	Ohranitvena enačba	74

30	Drugi par Maxwellovih enačb	76
31	Gostota in pretok energije	78
32	Napetostni tenzor	79
33	Napetostni tenzor elektromagnetnega polja	83
34	Virialni izrek	87
35	Napetostni tenzor makroskopskih teles	89
5	Statično elektromagnetno polje	92
36	Coulombov zakon	92
37	Elektrostatična energija nabojev	93
38	Polje enakomerno premočrtno gibajočega se naboja	95
39	Gibanje v Coulombskem polju	97
40	Dipolni moment	99
41	Multipolni momenti	101
42	Sistem nabojev v zunanjem polju	104
43	Statično magnetno polje	105
44	Magnetni moment	107
45	Larmorjev izrek	109
6	Elektromagnetno valovanje	111
46	Valovna enačba	111
47	Ravno valovanje	113
48	Monokromatsko ravno valovanje	117
49	Spektralni razcep	122
50	Delno polarizirana svetloba	123
51	Fourierjev razcep elektrostatičnega polja	128
52	Lastni nihajni načini polja	129
7	Širjenje svetlobe	133
53	Geometrijska optika	133
54	Jakost	136
55	Kotni ikonali	138
56	Ozki snopi žarkov	140
57	Nastanek slike pri širokih snopih žarkov	145
58	Meje geometrijske optike	146
59	Uklon (difrakcija)	148
60	Fresnelov uklon	153
61	Fraunhoferjev uklon	156
8	Polje gibajočih se nabojev	162
62	Zakasneni potenciali	162
63	Lienard-Wiechertov potencial	164
64	Spektralni razcep zakasnenih potencialov	167
65	Lagrangeva funkcija do členov drugega reda	169

9	Sevanje elektromagnetnega valovanja	173
66	Polje sistema nabojev pri veliki oddaljenosti od sistema	173
67	Sevanje dipola	177
68	Dipolno sevanje ob trku	180
69	Nizkofrekvenčno sevanje ob trku	182
70	Sevanje v primeru Coulombske interakcije	184
71	Kvadrupolno in magnetno dipolno sevanje	191
72	Sevalno polje v bližini izvora	194
73	Sevanje hitrega delca	197
74	Sinhrotronsko sevanje (zavorno sevanje)	201
75	Sevalno dušenje	207
76	Sevalno dušenje v relativističnem primeru	212
77	Spektralni razcep sevanja v ultrarelativističnem primeru	215
78	Sipanje na prostih nabojih	218
79	Sipanje nizkofrekvenčnega valovanja	223
80	Sipanje visokofrekvenčnega valovanja	224
10	Delec v gravitacijskem polju	227
81	Gravitacijska polja v nerelativistični mehaniki	227
82	Gravitacijsko polje v relativistični mehaniki	228
83	Krivočrtne koordinate	231
84	Razdalje in časovni intervali	234
85	Kovariantni odvod	238
86	Povezava med Christoffelovimi simboli in metričnim tenzorjem	242
87	Gibanje delca v gravitacijskem polju	245
88	Nespremenljivo gravitacijsko polje	248
89	Rotacija	254
90	Enačbe elektrodinamike v prisotnosti gravitacijskega polja	256
11	Enačbe gravitacijskega polja	259
91	Krivinski tenzor	259
92	Lastnosti krivinskega tenzorja	262
93	Akcija gravitacijskega polja	268
94	Napetostni tenzor	270
95	Einsteinove enačbe	275
96	Napetostni psevdotenzor gravitacijskega polja	280
97	Sinhroni opazovalni sistem	286
98	Einsteinove enačbe v tetradnem zapisu	291
12	Polje gravitirajočih teles	295
99	Newtonov zakon	295
100	Središčno simetrično gravitacijsko polje	298
101	Gibanje v središčno simetričnem gravitacijskem polju	306
102	Gravitacijski kolaps kroglastega telesa	309
103	Gravitacijski kolaps krogle prahu	314
104	Gravitacijski kolaps teles, ki niso okrogla, in vrtečih se teles	320
105	Gravitacijska polja pri velikih razdaljah od teles	328

106	Enačbe gibanje sistema teles v drugem približku	332
13	Gravitacijski valovi	337
107	Šibki gravitacijski valovi	337
108	Gravitacijski valovi v ukrivljenem četvernem prostoru	339
109	Močni gravitacijski valovi	341
110	Sevanje gravitacijskih valov	344
14	Relativistična kozmologija	347
111	Izotropen prostor	347
112	Zaprta izotropna model	350
113	Odprta izotropna model	354
114	Rdeči premik	356
115	Gravitacijska stabilnost izotropnega vesolja	361
116	Homogen prostor	367
117	Raven anizotropen model	372
118	Nihajoči način približevanja k singularnosti	374
119	Časovna singularnost v splošni kozmološki rešitvi Einsteinovih enačb	378

Poglavje 1

Načelo relativnosti

§1 Hitrost širjenja interakcije

Naravne pojave moramo opisati v *opazovalnem sistemu*. Opazovalni sistem je sestavljen iz koordinatnega sistema, s katerim določimo položaj delca v prostoru, ter iz ur, ki so postavljene v tem sistemu in omogočajo, da določimo čas.

Obstajajo takšni opazovalni sistemi, v katerih se prosto gibajoče se telo (to je takšno telo, na katerega ne delujejo zunanje sile) giblje s konstantno hitrostjo. Takšne opazovalne sisteme imenujemo *inercialni* opazovalni sistemi.

Če se dva opazovalna sistema enakomerno gibljeta eden glede na drugega, in če je eden od sistemov inercialen, potem je inercialen tudi drugi (tudi v tem sistemu bo vsako prosto gibanje premočrtno in nepospešeno). Na ta način lahko dobimo poljubno veliko inercialnih sistemov, ki se vsi gibljejo enakomerno eden glede na drugega.

Empirično vemo, da velja tako imenovano *načelo relativnosti*. Po tem načelu so vsi naravni zakoni enaki v vseh inercialnih opazovalnih sistemih. Z drugimi besedami, enačbe, s katerimi zapišemo te naravne zakone, so invariantne pri transformacijah koordinat in časa iz enega inercialnega sistema v drugega. To pomeni, da se vsaka enačba, ki opisuje zakon narave, zapiše v isti obliki v koordinatah in času različnih inercialnih opazovalnih sistemov.

Interakcije med delci snovi v običajni mehaniki zapišemo s potencialno energijo interakcije, ki je funkcija koordinat interagirajočih delcev. Hitro uvidimo, da pri takšnem opisu interakcij predpostavimo, da se interakcije širijo hipoma.

Poizkusi pa so pokazali, da hipne interakcije v naravi ne obstajajo. Zato je mehanika, ki temelji na podmeni hipne širitve interakcije, do neke mere nenatančna. Dejansko bo sprememba v enem izmed interagirajočih teles učinkovala na druga telesa šele potem, ko mine neki interval časa. Šele po tem intervalu bodo procesi, ki so privedli k začetni spremembi, delovali na drugo telo. Če razdaljo med telesoma delimo s tem časovnim intervalom, dobimo *hitrost širjenja interakcije*.

Strogo vzeto bi morali to hitrost imenovati *največja* hitrost širjenja interakcije. Hitrost določa namreč interval časa, po katerim *začne* sprememba v enem telesu delovati na drugega. Jasno je, da obstoj zgornje meje hitrosti širjenja interakcije pomeni tudi, da je gibanje teles z večjo hitrostjo v naravi nemogoče. Če bi namreč takšno gibanje lahko obstajalo, bi z njegovo pomočjo lahko dosegli, da bi telesa med seboj delovala z interakcijo, katere hitrost bi bila večja od največje možne hitrosti širjenja interakcij.

Interakcije, ki se širijo od enega delca do drugega, pogosto imenujemo “signali”. Prvi delec

pošlje signal in tako “obvesti” drugi delec o spremembah, ki jih je doživel. Hitrost širjenja interakcije je zato tudi *hitrost signala*.

Iz načela relativnosti sledi pomembno dejstvo, da je hitrost širjenja interakcij *enaka* v vseh inercialnih opazovalnih sistemih. Zato je hitrost širjenja interakcij splošna konstanta. Ta konstantna hitrost je tudi hitrost svetlobe v praznem prostoru (kar bomo pokazali kasneje). Svetlobno hitrost običajno označimo s črko c , znaša pa

$$c = 2,998 \times 10^{10} \text{ cm/sec.} \quad (1.1)$$

Ker je ta hitrost visoka, je klasična mehanika v praksi videti zadosti natančna v večini primerov. Hitrosti, s katerimi imamo običajno opravka, so tako majhne v primerjavi s svetlobno hitrostjo, da privzetek, da je svetlobna hitrost neskončna, natančnosti izračunov ne prizadene občutno.

Načelo relativnosti in končnost hitrosti širjenja interakcij skupaj tvorita *Einsteinovo načelo relativnosti* (formuliral ga je Einstein leta 1905). Razlikuje se od Galilejevega načela relativnosti, ki temelji na neskončni hitrosti širjenja interakcij.

Mehanika, ki temelji na Einsteinovem načelu relativnosti (v nadaljevanju bomo pisali preprosto kar načelo relativnosti), se imenuje *relativistična mehanika*. V mejnem primeru, ko so hitrosti teles majhne v primerjavi s svetlobno, lahko učinke končnosti hitrosti širjenja interakcij na gibanje teles zanemarimo. Tedaj relativistična mehanika postane običajna mehanika, ki temelji na podmeni hipnega širjenja interakcije; ta mehanika se imenuje *Newtonova* ali *klasična* mehanika. Prehod iz relativistične v klasično mehaniko lahko formalno dosežemo z limito $c \rightarrow \infty$ v enačbah relativistične mehanike.

Že v klasični mehaniki je razdalja relativna, kar pomeni, da so prostorske razdalje med različnimi dogodki odvisne od opazovalnega sistema, v katerem jih opisujemo. Izjava, da se dva dogodka, ki nista sočasna, pripetita v eni in isti točki v prostoru, ali v splošnem na določeni razdalji eden od drugega, dobi pomen šele tedaj, ko povemo, v katerem opazovalnem sistemu dogodka opisujemo.

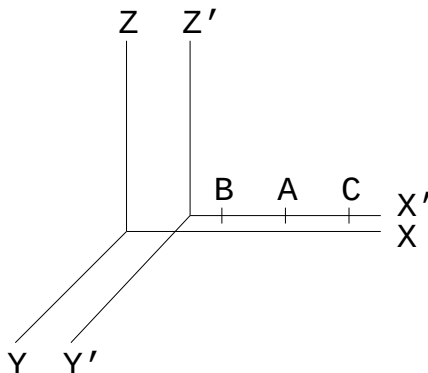
Čas pa je absoluten v klasični mehaniki; z drugimi besedami, privzamemo lahko, da so lastnosti časa neodvisne od opazovalnega sistema; obstaja en sam čas za vse opazovalne sisteme. To pomeni, da če pride do dveh pojavov sočasno z vidika nekega opazovalca, sta pojava sočasna tudi za vse druge opazovalce. V splošnem je interval časa med dvema dogodkoma enak v vseh opazovalnih sistemih.

Hitro lahko pokažemo, da je absolutnost časa v popolnem nasprotju z Einsteinovim načelom relativnosti. Zadostuje, da se spomnimo, da v klasični mehaniki (ki temelji na konceptu absolutnega časa) obstaja splošni zakon o seštevanju hitrosti, po katerem je hitrost sestavljenega gibanja enako (vektorski) vsoti hitrosti, ki to gibanje tvorijo. Ta vsesplošni zakon mora veljati tudi za širjenje interakcij. Od tod bi sledilo, da je hitrost širjenja različna v različnih opazovalnih sistemih, v nasprotju z načelom relativnosti. Kar se tega vprašanja tiče, poizkusi odločno podpirajo načelo relativnosti. Meritve, ki jih je prvi opravil Michelson (1881), so pokazali, da hitrost svetlobe ni niti malo odvisna od smeri širjenja; v skladu s klasično mehaniko bi pričakovali, da bo hitrost svetlobe manjša v smeri gibanja Zemlje kot v nasprotni smeri.

Iz načela relativnosti sledi, da čas ni absoluten. Čas poteka različno v različnih opazovalnih sistemih. Izjava, da je med dvema danima dogodkoma potekel določen časovni interval, dobi pomen šele tedaj, ko povemo, na kateri opazovalni sistem se izjava nanaša. Dogodki, ki so v enem opazovalnem sistemu sočasni, v drugih opazovalnih niso nujno sočasni.

To nam do postalo bolj jasno ob naslednjem primeru.

Oglejmo si dva inercialna opazovalna sistema K in K' s koordinatnimi osmi XYZ oziroma $X'Y'Z'$, pri čemer se sistem K' giblje glede na K vzdolž osi $X(X')$ (slika 1).



Slika 1:

Iz točke A na osi X' pošljemo signal v dve nasprotni si smeri. Ker je hitrost širjenja signala v sistemu K' (kot tudi v vseh drugih inercialnih sistemih) v obeh smereh enaka c , bo signal dosegel točki B in C , ki sta enako oddaljeni od A , sočasno (v sistemu K').

Hitro uvidimo, da ista dogodka (prihod signala v točki B in C) nikakor ne moreta biti sočasna za opazovalca v sistemu K . Hitrost signala glede na sistem K ima namreč po načelu relativnosti enako hitrost c in ker se točka B giblje (glede na sistem K) proti izvoru signala, točka C pa stran od njega, bo v opazovalnem sistemu K signal dosegel točko B prej kot točko C .

Zato vodi Einsteinovo načelo relativnosti k zelo drastičnim in temeljnim spremembam osnovnih pojmov fizike. Pojma prostora in časa, kot ju poznamo iz naših vsakodnevnih izkušenj, sta le približka, ki sta povezana z dejstvom, da imamo v vsakodnevnem življenju opravka le s hitrostmi, ki so majhne v primerjavi s svetlobno hitrostjo.

§2 Razmik

V nadaljevanju bomo pogosto uporabljali pojem *dogodka*. Dogodek opišemo s krajem, kjer se je pripetil, in s časom, ko je do njega prišlo. Zato dogodek, do katerega je prišlo v nekem delcu snovi, opišemo s tremi koordinatami delca in s časom dogodka.

Za lažjo predstavo pogosto uporabljamo namišljeni štiridimenzijski prostor (imenovan tudi *prostor-čas* ali *četverni prostor*), katerega osi označimo s tremi prostorskimi koordinatami in s časom. V tem prostoru dogodke prikažemo s točkami, ki se imenujejo *svetovne točke*. V četvernem prostoru vsakemu delcu ustreza črta, imenovana *svetovnica*. Točke na tej črti določajo koordinate delca za vsak trenutek. Hitro ugotovimo, da delcu, ki se giblje enakomerno premočrtno, ustreza ravna svetovnica, premica.

Sedaj bomo zapisali načelo invariantnosti hitrosti svetlobe v matematični obliki. V ta namen si zamislimo dva opazovalna sistema K in K' , ki se gibljeta eden glede na drugega s konstantno hitrostjo. Izberemo si takšne koordinatne osi, da osi X in X' sovpadata, medtem ko sta osi Y in Z vzporedni z Y' in Z' ; v sistemih K oziroma K' označimo čas z t oziroma z t' .

Ob času t_1 (v sistemu K) pošljemo iz točke s koordinatami x_1, y_1, z_1 signal, ki potuje s svetlobno hitrostjo (to je prvi dogodek). Širjenje tega signala opazujemo v sistemu K . Drugi dogodek naj bo sprejem signala v točki x_2, y_2, z_2 ob času t_2 . Signal potuje s hitrostjo c ; med dogodkoma je prepotoval razdaljo $c(t_2 - t_1)$. Ta razdalja pa je enaka $[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}$. Zato lahko zapišemo naslednjo zvezo med koordinatami dveh dogodkov v sistemu K :

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0. \quad (2.1)$$

Oba dogodka, torej širjenje signala, lahko opazujemo tudi iz sistema K' :

Naj bodo koordinate prvega dogodka v sistemu K' enake x'_1, y'_1, z'_1, t'_1 , koordinate drugega pa x'_2, y'_2, z'_2, t'_2 . Ker je hitrost svetlobe enaka v sistemih K in K' , velja podoben izraz, kot je (2.1):

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2(t'_2 - t'_1)^2 = 0. \quad (2.2)$$

Če so $x_1 y_1 z_1 t_1$ in $x_2 y_2 z_2 t_2$ koordinate *poljubnih* dveh dogodkov, potem količino

$$s_{12} = [c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2]^{1/2} \quad (2.3)$$

imenujemo *razmik* (angl. *interval*) med tema dogodkoma.

Iz načela invariantnosti hitrosti svetlobe sledi, da če je razmik med dvema dogodkoma enak nič v enem koordinatnem sistemu, je enak nič tudi v vseh ostalih.

Če sta dva dogodka neskončno bližnja, potem je razmik ds med njima enak

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.4)$$

Oblika izrazov (2.3) in (2.4) nam omogoča, da razmik formalno razumemo kot razdaljo dveh točk v namišljenem štiridimenzionalnem prostoru (katerega osi označimo z x, y, z in z zmnožkom ct). Obstaja pa osnovna razlika med pravilom za računanje razmika in ustreznim pravilom v običajni geometriji: ko računamo kvadrat razmika seštejemo kvadrate razlik koordinat vzdolž različnih osi z različnimi predznaki in ne z enim samim. *

Kot smo pravkar pokazali, če je $ds = 0$ v enem inercialnem sistemu, je $ds' = 0$ v vseh ostalih. Po drugi strani sta ds in ds' infinitezimalni količini istega reda. Iz teh dveh pogojev sledi, da morata biti ds^2 in ds'^2 sorazmerna:

$$ds^2 = a ds'^2,$$

kjer je koeficient a lahko odvisen le od absolutne vrednosti relativne hitrosti obeh opazovalnih sistemov. Ne more biti odvisen od koordinat niti časa, sicer različne točke v prostoru in različni trenutki časa ne bi bili enakovredni, kar bi bilo v nasprotju s homogenostjo prostora in časa. Prav tako ne more biti odvisen od smeri relativne hitrosti, ker bi to bilo v nasprotju z izotropnostjo prostora.

Imejmo tri opazovalne sisteme K, K_1 in K_2 , in naj bosta V_1 in V_2 hitrosti sistemov K_1 in K_2 glede na sistem K . Tedaj velja

$$ds^2 = a(V_1) ds_1^2, \quad ds^2 = a(V_2) ds_2^2. \quad (2.5)$$

Podobno lahko zapišemo

$$ds_1^2 = a(V_{12}) ds_2^2, \quad (2.6)$$

*Štiridimenzionalno geometrijo, ki jo opisuje kvadratična forma (2.4), je v teorijo relativnosti vpeljal H. Minkowski. To geometrijo imenujemo *psevdo-evklidska*, da jo ločimo od običajne evklidske.

kjer je V_{12} absolutna vrednost hitrosti sistema K_2 glede na sistem K_1 . S primerjavo teh zvez ugotovimo, da mora veljati

$$\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{12}). \quad (2.7)$$

Vendar pa je V_{12} odvisen ne le od absolutnih vrednosti vektorjev $\mathbf{V}_1$ in $\mathbf{V}_2$, temveč tudi od kota med njima. Ta kot se ne pojavlja na levi strani enačbe (2.7). Očitno ta enačba lahko velja le, če je funkcija $a(V)$ kar konstanta, ki mora zaradi te iste enačbe biti enaka ena.

Zato je

$$ds^2 = ds'^2, \quad (2.8)$$

iz enakosti infinitezimalnih razmikov pa sledi še enakost končnih razmikov: $s = s'$.

To je zelo pomemben rezultat: razmik med dvema dogodkoma je enak v vseh inercialnih opazovalnih sistemih, zato je invarianten proti transformacijam iz enega inercialnega sistema v drugega. Ta invariantnost je matematična posledica dejstva, da je hitrost svetlobe konstantna.

Naj bomo ponovno $x_1 y_1 z_1 t_1$ in $x_2 y_2 z_2 t_2$ koordinate dveh dogodkov v nekem opazovalnem sistemu K . Zanima nas, če obstaja takšen koordinatni sistem K' , v katerem se ta dogodka pripetita v isti točki v prostoru.

Vpeljemo zapis

$$t_2 - t_1 = t_{21}, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{12}^2.$$

Razmik med dogodkoma v sistemu K je

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2,$$

v sistemu K' pa

$$s_{12}'^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2,$$

zaradi invariantnosti razmikov pa od tod sledi

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2.$$

Zahtevo, da do dogodkov pride v isti točki v sistemu K' , zapišemo kot $l_{12}' = 0$. Tedaj je

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 > 0.$$

Zaključimo, da opazovalni sistem z iskano lastnostjo obstaja, če je $s_{12}^2 > 0$, torej če je razmik med dogodkoma realno število. Realne razmike imenujemo *časovni* razmiki.

Če je razmik med dogodkoma časoven, torej obstaja opazovalni sistem, v katerem pride do obeh dogodkov na istem mestu. Čas, ki v tem sistemu mine med dogodkoma, je

$$t_{12}' = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} = \frac{s_{12}}{c}. \quad (2.9)$$

Če do obeh dogodkov pride v istem telesu, tedaj je interval med njima vedno časoven, ker se telo v tem času ne more premakniti za razdaljo, večjo od ct_{12} , ker hitrost telesa ne more biti večja od svetlobne. Zato je vedno

$$l_{12} < ct_{12}.$$

Sedaj bi radi vedeli, če obstaja opazovalni sistem, v katerem se dva dogodka pripetita sočasno. Kot prej velja za sistema K in K' zveza $c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2$. Želimo si, da bi veljalo $t_{12}' = 0$, zato je

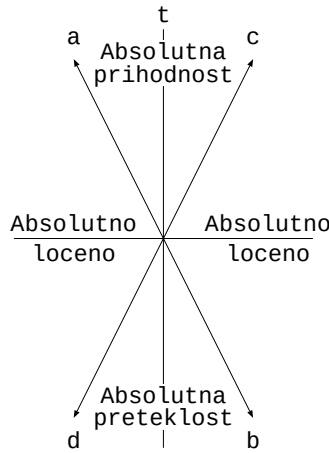
$$s_{12}^2 = -l_{12}'^2 < 0.$$

Iskan opazovalni sistem obstaja le, če je razmik med dogodkoma imaginarno število. Imaginarne razmike imenujemo *prostorski* razmiki.

Če je razmik med dvema dogodkoma prostorski, torej obstaja opazovalni sistem v katerem do obeh dogodkov pride sočasno. Razdalja med točkama, kjer se dogodka pripetita, je

$$l_{12}' = \sqrt{l_{12}^2 - c^2 t_{12}^2} = i s_{12}. \quad (2.10)$$

Delitev razmikov na časovne in prostorske je zaradi invariantnosti razmikov absoluten pojem. To pomeni, da je časovni oziroma prostorski značaj razmika neodvisen od opazovalnega sistema.



Slika 2:

Naj bo nek dogodek O izhodišče časovne in prostorskih koordinat. Z drugimi besedami, v četvernem koordinatnem sistemu, katerega osi so označene z x, y, z, t , je svetovna točka dogodka O koordinatno izhodišče. Oglejmo si v kakšni povezavi so drugi dogodki s točko O . Za lažjo predstavo si bomo mislili, da imamo opravka z eno samo prostorsko dimenzijo in s časom; z njima označimo osi na sliki 2. Enakomerno premočrtno gibanje delca, ki gre skozi točko $x = 0$ ob času $t = 0$, prikažemo s premico, ki gre skozi O , in ki je nagnjena glede na os t pod kotom, katerega tangenta je hitrost delca. Ker je največja možna hitrost c , obstaja največji kot med to premico in osjo t . Na sliki 2 sta prikazani dve črti, ki predstavljata širjenje signala (s svetlobno hitrostjo) v nasprotnih smereh in ki potekata skozi dogodek O (torej skozi točko $x = 0$ ob času $t = 0$). Vse črte, ki predstavljajo gibanje delca, lahko ležijo le na območjih aOc in dOb . Na črtah ab in cd velja $x = \pm ct$. Oglejmo si najprej dogodke, katerih svetovne točke ležijo na območju aOc . Hitro se lahko prepričamo, da za vse točke na tem območju velja $c^2 t^2 - x^2 > 0$. Z drugimi besedami, razmik med poljubnim dogodkom na tem območju in dogodkom O je časoven. Na tem območju je $t > 0$, zato se dogodki na tem območju pripetijo "po" dogodku O . Do dogodkov, ki ju ločuje časovni razmik, ne more priti sočasno v nobenem opazovalnem sistemu. Zato je nemogoče najti opazovalni sistem, v

katerem bi do dogodkov na območju aOc prišlo pred dogodkom O , torej ob času $t < 0$. Zato so vsi dogodki na območju aOc prihodnji dogodki glede na O v vseh opazovalnih sistemih. Zato lahko to območje imenujemo *absolutna prihodnost* za dogodek O .

Podobno ležijo vsi dogodki na območju bOd v *absolutni preteklosti* glede na O ; vsi dogodki na tem območju se pripetijo pred dogodkom O v vseh opazovalnih sistemih.

Sedaj pa si oglejmo območji dOa in cOb . Razmik med poljubnim dogodkom na tem območju in dogodkom O je prostorski. Ti dogodki se zgodijo v drugih prostorskih točkah v vseh opazovalnih sistemih. Zato lahko ta območja imenujemo *absolutno oddaljena* glede na O . Pojmi “sočasen”, “predhoden” in “poznejši” pa so na tem območju relativni. Za vsak dogodek na tem območju obstajajo opazovalni sistemi, v katerem se ta zgodi pred dogodkom O , sistemi v katerih se zgodi po O , in končno en opazovalni sistem, v katerem se zgodi sočasno z O .

Spomnimo naj na to, da še upoštevamo vse tri prostorske koordinate namesto ene same, dobimo namesto dveh sekajočih se črt na sliki 2 “stožec” $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$ v četvernem koordinatnem sistemu x, y, z, t , pri čemer je os stožca os t . (Ta stožec imenujemo *svetlobni stožec*.) Območja absolutne prihodnosti in absolutne preteklosti predstavljata obe notranji območji tega stožca.

Dogodka sta lahko vzročno povezane le, če je razmik med njima časoven; to je neposredna posledica dejstva, da se interakcije ne morejo širiti s hitrostjo, večjo od svetlobne. Kot smo pravkar videli, imata pojma “predhoden” in “poznejši” absoluten pomen natanko za časovno razmaknjene dogodke, kar je potreben pogoj za to, da imata pojma “vzrok” in “posledica” sploh pomen.

§3 Lastni čas

Mislimo si, da v nekem inercialnem opazovalnem sistemu opazujemo ure, ki se glede na nas poljubno gibljejo. Ob vsakem trenutku lahko to gibanje smatramo kot enakomerno. Zato lahko ob vsakem trenutku vpeljemo koordinatni sistem, ki je togo vezan na gibajoče se ure, ki skupaj z urami tvori inercialni opazovalni sistem.

V času infinitezimalnega časovnega intervala dt (kot ga z ure preberemo v našem mirujočem opazovalnem sistemu), se gibajoče ure premaknejo za razdaljo $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Zanima nas, kakšen časovni interval dt' bodo ob tem prikazale gibljive ure. V koordinatnem sistemu, ki je vezan na gibljive ure, te mirujejo, torej $dx' = 0$, $dy' = 0$, $dz' = 0$. Zaradi invariantnosti razmikov je

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2,$$

od koder sledi

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}}. \quad (3.1)$$

Izraz integriramo in dobimo časovni interval, ki ga kažejo gibljive ure po tem, ko preteče čas $t_2 - t_1$ glede na mirujoče ure:

$$t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (3.2)$$

Čas, ki ga lahko razberemo z ure, ki se giblje skupaj z nekim telesom, se imenuje *lastni čas* telesa. Enačbi (3.1) in (3.2) izražata lastni čas s časom v opazovalnem sistemu, iz katerega gibanje opazujemo.

Iz (3.1) in (3.2) je razvidno, da je lastni čas gibajočega se telesa vedno manjši od ustreznega časovnega intervala v sistemu, ki miruje. Drugače povedano, gibajoče ure tečejo počasneje kot tiste, ki mirujejo.

Naj se neke ure gibljejo enakomerno premočrtno glede na inercialni sistem K . Opazovalni sistem K' , ki je vezan na te ure, je tudi inercialen. Z vidika opazovalca v sistemu K , ure v sistemu K' zaostajajo. Velja pa tudi obratno, z vidika sistema K' zaostajajo ure v sistemu K . Vseeno to ni protislovno, v kar se prepričamo tako. Če želimo ugotoviti, da ure v sistemu K' zaostajajo za tistimi v sistemu K , moramo storiti sledeče. Naj ob nekem trenutku ura v K' sovpada z uro v K , in naj bosta ob tem trenutku prikazana časa enaka. Hitrosti gibanja kazalcev na urah v K in K' primerjamo tako, da primerjamo čas, izpisan na eni in isti gibljivi uri v K' , z urami v K . Vendar sedaj primerjamo to uro z *različnimi* urami v K – s tistimi, mimo katerih gre ura v K' ob danem trenutku. Tako ugotovimo, da ura v K' zaostaja za urami v K , s katerimi jo primerjamo. Vidimo, da za primerjavo poteka časa ur v dveh različnih opazovalnih sistemih potrebujemo več ur v enem sistemu in eno samo uro v drugem, zato ta poizkus ni simetričen glede na oba sistema. Ura, ki zaostaja, je vedno tista ura, ki jo primerjamo z različnimi urami v drugem sistemu.

Če imamo dve uri in ena izmed njiju prepotuje sklenjeno pot in se vrne v začetno točko, položaj druge pa se med tem ne spremeni, potem bo seveda gibajoča se ura zaostajala za tisto, ki miruje. Obrnjen sklep, v katerem bi gibljivo uro smatrali kot nepremično (in obratno), ni mogoč, saj se ura, ki potuje po sklenjeni poti, ne giblje enakomerno premočrtno, zato koordinatni sistem, ki je vezan nanjo, ne more biti inercialen.

Ker so zakoni naravi enaki le v inercialnih opazovalnih sistemih, imajo opazovalni sistemi, ki so vezani na nepremične ure (inercialni) ali na gibljive ure (neinercialni), različne lastnosti, zato trditev, da mora zaostajati ura, ki miruje, ni pravilna.

Časovni interval, ki ga kaže ura, je enak integralu

$$\frac{1}{c} \int_a^b ds,$$

ki ga moramo izračunati vzdolž svetovnice ure. Če ura miruje, je svetovnica ravna črta vzporedna z osjo t ; če ura prepotuje zaključeno pot in se vrne v začetno točko, potem bo svetovnica krivulja, ki gre skozi dve točki na ravni svetovnici ure, ki miruje, ti točki pa ustrezata začetku in koncu gibanja. Po drugi strani pa smo ugotovili, da ura, ki miruje, vedno prikaže večji časovni interval kot ura, ki se giblje. Od tod sledi, da integral

$$\int_a^b ds,$$

izračunan med podanim parom svetovnih točk a in b , doseže svojo največjo vrednost, če ga izračunamo vzdolž ravne svetovnice, ki povezuje ti točki. *

§4 Lorentzeva transformacija

Poiskali bi radi enačbe za transformacijo iz enega inercialnega opazovalnega sistema v drugega, torej enačbe se katerimi lahko iz koordinat x, y, z, t nekega dogodka v sistemu K , izračunamo

*Pri tem je seveda predpostavljeno, da sta točki a in b ter krivulja med njima takšni, da so vsi diferenciali ds vzdolž teh krivulj časovni.

Ta lastnost integrala je povezana s psevdo-evklidskim značajem štiridimenzionalne geometrije. V evklidskem prostoru bi integral seveda dosegel najmanjšo vrednost vzdolž ravne črte.

koordinate x', y', z', t' istega dogodka v drugem inercialnem sistemu K' .

V klasični mehaniki je rešitev preprosta. Zaradi absolutnega značaja časa tam velja $t = t'$; če so poleg tega koordinatne osi izbrane, kot je to v navadi (osi X, X' sovpadata, osi Y, Z so vzporedne, gibanje pa je vzdolž X, X'), potem sta koordinati y, z seveda kar enaki y', z' , koordinati x in x' pa se razlikujeta za razdaljo, ki jo je prepotoval en sistem glede na drugega. Če si za izhodišče za merjenje časa izberemo trenutek, ko opazovalna sistema sovpadata, in če je hitrost sistema K' glede na K enaka V , je ta razdalja enaka Vt . Zato je

$$x = x' + Vt, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \quad (4.1)$$

Ta enačba se imenuje *Galilejeva transformacija*. Hitro lahko preverimo, da ta transformacija ne zadovolji zahtev teorije relativnosti, kar smo tudi pričakovali; pri tej transformaciji se razmik med dogodki ne ohranja.

Relativistično transformacijo bomo dobili ravno iz zahteve, da je razmik med dogodkoma invarianten.

Kot smo videli v 2, lahko razmik med dogodkoma smatramo kot razdaljo med ustreznim parom svetovnih točk v četvernem koordinatnem sistemu. Zato lahko rečemo, da iskana transformacija ohranja razdalje v četvernem x, y, z, ct prostoru. Takšne transformacije pa so le vzporedni premiki in zasuki koordinatnega sistema. Vzporedni premiki niso zanimivi, ker vodijo le k premiku izhodišča prostorskih koordinat in k spremembi izhodišča za merjenje časa. Zato moramo iskano transformacijo zapisati kot zasuk četvernega koordinatnega sistema x, y, z, ct .

Vsak zasuk v štiridimenzionalnem prostoru lahko razstavimo na zasuke v ravninah xy, zy, xz, tx, ty, tz (ravno tako, kot lahko vsak zasuk v običajnem prostoru razcepimo na tri zasuke v ravninah xy, zy in xz). V prvih treh zasukih se transformirajo le prostorske koordinate; to so običajni prostorski zasuki.

Oglejmo si zasuk v ravnini tx ; pri tem se koordinati y in z ne spremenita. Ta transformacija mora zato ohraniti razliko $(ct)^2 - x^2$ nespremenjeno, saj je to kvadrat "oddaljenosti" točke (ct, x) od izhodišča. Povezavo med starimi in novimi koordinatami lahko povsem splošno zapišemo z enačbama

$$x = x' \cosh \psi + ct' \sinh \psi, \quad ct = x' \sinh \psi + ct' \cosh \psi, \quad (4.2)$$

kjer je ψ "kot zasuka"; preprosto lahko preizkusimo, da je res $c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2$. Enačba (4.2) se od običajnih enačb za transformacijo koordinatnih osi ob zasuku razlikuje v tem, da tu nastopajo hiperbolične namesto trigonometričnih funkcij. To je razlika med psevdo-evklidsko in evklidsko geometrijo.

Poiščimo enačbo za transformacijo iz inercialnega sistema K v sistem K' , ki se glede na K giblje s hitrostjo V v smeri osi x . Pri tem se očitno spremenita le koordinata x in čas t , zato mora transformacija imeti obliko (4.2). Sedaj moramo le še določiti kot ψ , ki sme biti odvisen le od medsebojne hitrosti V . *

Oglejmo si, kako se v sistemu K giblje izhodišče sistema K' . Pri tem je $x' = 0$ in enačbi (4.2) se zapišeta

$$x = ct' \sinh \psi, \quad ct = ct' \cosh \psi,$$

po deljenju prve enačbe z drugo pa dobimo

$$x/ct = \tanh \psi.$$

*Da se bomo izognili dvournosti, bomo konstantno medsebojno hitrost dveh inercialnih sistemov vedno označevali z V , z v pa hitrost gibajočih se delcev, ki ne bo nujno konstantna.

Količina x/t je ravno hitrost V sistema K' glede na sistem K . Zato je

$$\tanh \psi = \frac{V}{c}.$$

Od tod sledi

$$\sinh \psi = \frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \cosh \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

To vstavimo v (4.2) in dobimo

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (4.3)$$

To je iskana enačba transformacije. Imenuje se *Lorentzeva transformacija* in igra ključno vlogo v nadaljevanju.

Inverzne enačbe, ki izražajo x', y', z', t' z x, y, z, t dobimo, če V preprosto nadomestimo z $-V$ (ker se sistem K giblje s hitrostjo $-V$ glede na sistem K'). Iste enačbe lahko dobimo tudi neposredno, če rešimo enačbe (4.3) za x', y', z', y' .

Iz (4.3) hitro razberemo, da ob prehodu v limito $c \rightarrow \infty$ in h klasični mehaniki, enačba za Lorentzevo transformacijo postane enačba za Galilejevo transformacijo.

Če je v (4.3) $V > c$, postaneta koordinati x in t imaginarni; to je posledica tega, da je gibanje s hitrostjo, večjo od svetlobne, nemogoče. Poleg tega ne moremo uporabljati opazovalnega sistema, ki se giblje s svetlobno hitrostjo – v tem primeru, bi imenovalci v (4.3) postali enaki nič.

Za hitrosti V , ki so majhne v primerjavi s svetlobno, lahko namesto (4.3) uporabimo približne enačbe

$$x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' + \frac{V}{c^2}x'. \quad (4.4)$$

Naj v sistemu K miruje palica, vzporedna z osjo X . Naj bo njena dolžina, merjena v sistemu K , $\Delta x = x_2 - x_1$ (x_2 in x_1 sta koordinati krajišč palice v sistemu K). Določimo dolžino palice v sistemu K' . V ta namen moramo najti koordinati obeh krajišč palice (x'_2 in x'_1) v sistemu K' ob istem času t' . Iz (4.3) dobimo

$$x_1 = \frac{x'_1 + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2 = \frac{x'_2 + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Dolžina palice v sistemu K' je $\Delta x' = x'_2 - x'_1$; x_1 odštejemo od x_2 in dobimo

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Lastna dolžina (angl. *proper length*) palice je njena dolžina v opazovalnem sistemu, v katerem palice miruje. Označimo jo z $l_0 = \Delta x$, njeno dolžino v katerem koli drugem sistemu K' pa z l . Velja

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (4.5)$$

Zato ima palica največjo dolžino v opazovalnem sistemu, v katerem miruje. Njena dolžina v sistemu, v katerem se giblje s hitrostjo V , se zmanjša za faktor $\sqrt{1 - V^2/c^2}$. Ta posledica teorije relativnosti se imenuje *Lorentzevo skrčenje dolžin* (angl. *Lorentz contraction*).

Prečna razsežnost palice se zaradi gibanja ne spremeni, zato se tudi prostornina telesa $\mathcal{V}$ zmanjša za enak faktor:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \quad (4.6)$$

kjer je $\mathcal{V}_0$ *lastna prostornina* (angl. *proper volume*) telesa.

S pomočjo Lorentzeve transformacije lahko ponovno izpeljemo rezultate, ki jih o lastnem času poznamo že iz 3. Naj ura miruje v sistemu K' . Oglejmo si dva dogodka, ki se pripetita v isti točki prostora x', y', z' v sistemu K' . Čas med tema dogodkoma v sistemu K' je $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. Poiščimo sedaj čas Δt , ki med tema dogodkoma mine v sistemu K . Iz (4.3) dobimo

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{V}{c^2}x'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{V}{c^2}x'_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

če odštejemo en čas od drugega pa dobimo

$$t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

kar je povsem v skladu z (3.1).

Lorentzeva transformacija se loči od Galilejeve še v eni lastnosti. Galilejeva transformacija ima lastnost komutativnosti (zamenljivosti), kar pomeni, da rezultat dveh zaporednih Galilejevih transformacij (z različnima hitrostima $\mathbf{V}_1$ in $\mathbf{V}_2$) ni odvisen od vrstnega reda transformiranja. Rezultat dveh Lorentzevih transformacij pa je v splošnem odvisen od vrstnega reda. To je razvidno že povsem matematično iz formalnega opisa teh transformacij kot zasukov v četvernem koordinatnem sistemu: vemo, da je rezultat dveh zasukov (okoli različnih osi) odvisen od vrstnega reda. Edina izjema je primer transformacij z vzporednima vektorjema $\mathbf{V}_1$ in $\mathbf{V}_2$ (ki ustrezata dvema zasukoma v četvernem koordinatnem sistemu okoli ene same osi).

§5 Transformacija hitrosti

V prejšnjem razdelku smo izpeljali enačbe, ki nam iz poznanih koordinat dogodka v enem opazovalnem sistemu omogočajo izračunati koordinate istega dogodka v drugem opazovalnem sistemu. Sedaj bomo poiskali zvezo med hitrostjo snovnega delca v enem opazovalnem sistemu z njegovo hitrostjo v drugem opazovalnem sistemu.

Naj se ponovno sistem K' giblje glede na sistem K vzdolž osi x s hitrostjo V . Naj bo $v_x = dx/dt$ komponenta hitrosti delca v sistemu K in $v'_x = dx'/dt'$ komponenta hitrosti istega delca v sistemu K' . Iz (4.3) dobimo

$$dx = \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Prve tri enačbe delimo s četrto in dobimo zvezo med hitrostima

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'},$$

ki se glasi

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x \frac{V}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + v'_x \frac{V}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + v'_x \frac{V}{c^2}}. \quad (5.1)$$

Te enačbe določajo transformacijo hitrosti, torej pravilo, s katerim seštevamo hitrosti v teoriji relativnosti. V mejnem primeru $c \rightarrow \infty$ se te enačbe pretvorijo v zveze $v_x = v'_x + V$, $v_y = v'_y$, $v_z = v'_z$ iz klasične mehanike.

V posebnem primeru, ko se delec giblje vzporedno z osjo X , velja $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$. Tedaj je $v'_y = v'_z = 0$, $v'_x = v'$, tako da je

$$v = \frac{v' + V}{1 + v' \frac{V}{c^2}}. \quad (5.2)$$

Hitro se prepričamo, da je vsota dveh hitrosti, ki sta obe manjši od svetlobne, ponovno manjša od svetlobne hitrosti.

Ce je hitrost V veliko manjša od svetlobne hitrosti (hitrost v je poljubna), približno velja

$$v_x = v'_x + V \left(1 - \frac{v'^2_x}{c^2}\right), \quad v_y = v'_y - v'_x v'_y \frac{V}{c^2}, \quad v_z = v'_z - v'_x v'_z \frac{V}{c^2}.$$

Te tri enačbe lahko zapišemo kot eno samo vektorsko:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}')\mathbf{v}'. \quad (5.3)$$

Naj poudarimo, da v relativističnem zakonu za seštevanje hitrosti (5.1) obe hitrosti $\mathbf{v}'$ in $\mathbf{V}$, ki ju sestavljamo, v enačbah nastopata nesimetrično (razen če sta obe v smeri osi x). To je povezano s tem, da Lorentzeve transformacije ne komutirajo, o čemer smo govorili v prejšnjem razdelku.

Izberimo si koordinatne osi tako, da hitrost delca ob danem trenutku leži v ravnini XY . Tedaj ima hitrost delca v sistemu K komponente $v_x = v \cos \theta$, $v_y = v \sin \theta$, v sistemu K' pa $v'_x = v' \cos \theta'$, $v'_y = v' \sin \theta'$ (v, v' sta absolutni hitrosti, θ, θ' pa kota glede na osi X, X' v sistemih K in K'). S pomočjo enačbe (5.1) dobimo

$$\tan \theta = \frac{v' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sin \theta'}{v' \cos \theta' + V}. \quad (5.4)$$

Ta enačba opisuje spremembo smeri hitrosti ob transformaciji iz enega opazovalnega sistema v drugega.

Oglejmo si zelo važen posebni primer te enačbe, namreč odklon svetlobe ob transformaciji v nov opazovalni sistem – to je pojav, ki se imenuje (*zvezdna*) *aberracija* (angl. *aberration of light*). V tem primeru je $v = v' = c$, in prejšnja enačba postane

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\frac{V}{c} + \cos \theta'} \sin \theta'. \quad (5.5)$$

Z uporabo transformacijskih enačb (5.1) lahko dobimo tudi $\sin \theta$ in $\cos \theta$:

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c} \cos \theta'} \sin \theta', \quad \cos \theta = \frac{\cos \theta' + \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c} \cos \theta'}. \quad (5.6)$$

V primeru $V \ll c$ dobimo od tod približek, ki je pravilen do členov reda V/c :

$$\sin \theta - \sin \theta' = -\frac{V}{c} \sin \theta' \cos \theta'.$$

Vpeljemo kot $\Delta \theta = \theta' - \theta$ (kot aberacije). V istem redu približka dobimo

$$\Delta \theta = \frac{V}{c} \sin \theta', \quad (5.7)$$

kar je dobro poznana osnovna enačba za zvezdno aberacijo.

§6 Vektorji četverci

Koordinate dogodka (ct, x, y, z) lahko obravnavamo kot komponente štiridimenzionalnega krajevnega vektorja (ali krajše, četvernega krajevnega vektorja) v četvernem prostoru. Komponente bomo označili z x^i , kjer ima indeks i vrednosti 0, 1, 2, 3:

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z.$$

Kvadrat "dolžine" četvernega krajevnega vektorja je

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2.$$

Ne spremeni se pri rotacijah v četvernem koordinatnem sistemu, torej je invarianten tudi proti Lorentzevim transformacijam.

Skupino štirih količin A^0, A^1, A^2, A^3 , ki se transformirajo kot komponente četvernega krajevnega vektorja pri transformacijah četvernega koordinatnega sistema, imenujemo *štiridimenzionalni vektor* ali *četverec* (angl. *four-vector*) A^i . Pri Lorentzevi transformaciji se pretvori kot

$$A^0 = \frac{A'^0 + \frac{V}{c} A'^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A^1 = \frac{A'^1 + \frac{V}{c} A'^0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A^2 = A'^2, \quad A^3 = A'^3. \quad (6.1)$$

Kvadrat velikosti poljubnega četverca je določen po analogiji s kvadratom četvernega krajevnega vektorja:

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2.$$

Zaradi lažjega zapisa vpeljemo dve "vrsti" komponent četvercev, ki jih označimo z A^i in A_i , torej z zgornjim in spodnjim indeksom. Povezana sta z zvezami

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3. \quad (6.2)$$

Količine A^i so *kontravariantne*, A_i pa *kovariantne* komponente četverca. Kvadrat četverca lahko torej zapišemo kot

$$\sum_{i=0}^3 A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3.$$

Takšne vsote običajno napišemo kar kot $A^i A_i$, torej brez znaka za seštevanje. Pri tem velja dogovor, da moramo sešteti po parih enakih indeksov, zato tudi znak za seštevanje ni več potreben. Eden izmed indeksov v paru mora biti zgornji, drugi pa spodnji. Ta dogovor o seštevanju po “tihih” (angl. *dummy*) indeksih je zelo primeren in močno olajša pisanje enačb.

Za štiridimenzionalne indekse, ki tečejo po vrednostih 0, 1, 2, 3, bomo uporabljali latinske črke $i, k, l, \dots$.

Po analogiji s kvadratom četverca lahko tvorimo tudi *skalarni produkt* dveh različnih četvercev:

$$A^i B_i = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3.$$

Očitno lahko to zapišemo kot $A^i B_i$ ali pa kot $A_i B^i$ – rezultat je isti. Tudi v splošnem lahko zamenjamo zgornji in spodnji indeks poljubnega para tih indeksov. *

Produkt $A^i B_i$ je *četverni skalar* (angl. *four-scalar*) – invarianten je proti rotacijam štiridimenzionalnega koordinatnega sistema. To lahko preprosto preverimo z neposrednim računom † vendar je to očitno že vnaprej (zaradi analogije z $A^i A_i$), ker se vsi četverci transformirajo po enakem pravilu.

Komponenta A^0 se imenuje *časovna komponenta*, A^1, A^2, A^3 pa so *prostorske komponente* četverca (po analogiji z četvernim krajevnim vektorjem). Kvadrat četverca je lahko pozitiven, negativen ali enak nič; takšne vektorje imenujemo *časovni*, *prostorski* oziroma *ničelni* (angl. *null*) vektorji (ponovno zaradi analogije z izrazi za razmike). ‡

Pri povsem prostorskih zasukih (pri katerih transformacija ne prizadene časovne osi), tri prostorske komponente četverca A^i tvorijo tridimenzionalni vektor $\mathbf{A}$. Časovna komponenta četverca je tridimenzionalni skalar (glede na prostorske zasuke). Komponente četverca bomo pogosto zapisali v obliki

$$A^i = (A^0, \mathbf{A}).$$

Kovariantne komponente istega četverca so $A_i = (A^0, -\mathbf{A})$, kvadrat četverca pa je $A^i A_i = (A^0)^2 - \mathbf{A}^2$. Za četverni krajevni vektor tako velja

$$x^i = (ct, \mathbf{r}), \quad x_i = (ct, -\mathbf{r}), \quad x^i x_i = c^2 t^2 - \mathbf{r}^2.$$

Pri tridimenzionalnih vektorjih (s koordinatami x, y, z) ne rabimo razlikovati med kontra- in kovariantnimi komponentami. Ko lahko to upoštevamo, ne da bi to vodilo k nejasnosti, bomo njihove komponent zapisali kot A_α ($\alpha = x, y, z$) z grškimi črkami v indeksu. Upoštevali bomo tudi dogovor, da seštejemo po x, y, z , če nastopajo indeksi v parih (na primer $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_\alpha B_\alpha$).

Štiridimenzionalni tenzor (*tenzor četverec*, *četverni tenzor*, angl. *four-tensor*) drugega reda je skupina šestnajstih količin A^{ik} , ki so ob koordinatnih transformacijah pretvorijo kot zmnožek komponent dveh četvercev. Podobno definiramo tudi tenzorje četverce višjega reda.

Komponente tenzorja drugega reda lahko zapišemo v treh oblikah: kovariantni A_{ik} , kontravariantni A^{ik} ali mešani A^i_k . V zadnjem primeru moramo ločiti med A^i_k in A_i^k , torej

*V literaturi pogosta najdemo četverce, zapisane brez indeksov, tako da njihove kvadrate in skalarne produkte zapišejo kot A^2, B^2 . V tej knjigi takšnega zapisa ne bomo uporabljali.

†Upoštevati moramo, da se zakon za transformacijo četverca, zapisanega s kovariantnimi komponentami, v znakih razlikuje od istega zakona na kontravariantne komponente. Namesto (6.1) imamo

$$A_0 = \frac{A'_0 - \frac{V}{c} A'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A_1 = \frac{A'_1 - \frac{V}{c} A'_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A_2 = A'_2, \quad A_3 = A'_3.$$

‡Ničelne vektorje imenujemo tudi *izotropni* vektorji.

moramo biti pazljivi na to, kateri izmed obeh indeksov je zgornji. Povezava med različnimi vrstami komponent je določena s splošnim pravilom: dvigovanje in spuščanje prostorskega indeksa (1, 2, 3) spremeni predznak komponente, dvigovanje in spuščanje časovnega indeksa (0) pa ne. Tako je na primer

$$\begin{aligned} A_{00} &= A^{00}, & A_{01} &= -A^{01}, & A_{11} &= A^{11}, \dots, \\ A_0^0 &= A^{00}, & A_0^1 &= A^{01}, & A_1^0 &= -A^{01}, & A_1^1 &= -A^{11}, \dots \end{aligned}$$

Pri čisto prostorskih transformacijah tvori devet količin $A^{11}, A^{12}, \dots$ tridimenzionalni tenzor. Tri komponente A^{01}, A^{02}, A^{03} tvorijo tridimenzionalni vektor, medtem ko je komponenta A^{00} tridimenzionalni skalar.

Tenzor A^{ik} imenujemo *simetrični tenzor*, če je $A^{ik} = A^{ki}$, in *antisimetrični* ali *poševnosimetrični tenzor*, če je $A^{ik} = -A^{ki}$. Pri antisimetričnem tenzorju so vse diagonalne komponente (torej komponente $A^{00}, A^{11}, \dots$) enake nič, saj mora na primer veljati $A^{00} = -A^{00}$. Pri simetričnem tenzorju A^{ik} sta mešani komponenti A^i_k in A_k^i očitno enaki, zato lahko v takšnih primerih pišemo kar A^i_k , z enim indeksom nad drugim.

V vsaki tenzorski enačbi morata obe strani imeti iste in isto postavljene (zgoraj ali spodaj) proste indekse (za razliko od tih indeksov). Proste indekse v tenzorski enačbi lahko dvigamo in spuščamo, vendar moramo to storiti sočasno na obeh straneh enačbe. "Prepovedano" je enačiti kovariantne in kontravariantne komponente različnih tenzorjev; takšna enačba, tudi če bi slučajno veljala v danem opazovalnem sistemu, ne bi veljala ob prehodu v drug opazovalni sistem.

Iz tenzorskih komponent A^{ik} lahko tvorimo skalar z vsoto

$$A^i_i = A^0_0 + A^1_1 + A^2_2 + A^3_3$$

(tu seveda velja $A^i_i = A_i^i$). Ta vsota se imenuje *sled* (angl. *trace*) tenzorja, operacija s katero jo dobimo pa je *skrčenje* (angl. *contraction*).

Skalarni produkt dveh vektorjev, ki smo ga opisali zgoraj, dobimo s skrčenjem: iz tenzorja $A^i B_k$ dobimo skalar $A^i B_i$. V splošnem skrčitev poljubnega para indeksov zniža red tenzorja za 2. Tenzor A^i_{kli} je na primer tenzor drugega reda, $A^i_k B^k$ je četverec, A^{ik}_{ik} pa je skalar, etc.

Enotski četverni tenzor δ^i_k je po definiciji tisti tenzor, za katerega velja

$$\delta^k_i A^i = A^k \quad (6.3)$$

za vsak četverec A^i . Komponente tega tenzorja so

$$\delta^k_i = \begin{cases} 1, & \text{če } i = k \\ 0, & \text{če } i \neq k \end{cases} \quad (6.4)$$

Če dvignemo en indeks ali spustimo drugega v tenzorju δ^k_i , dobimo kontra- ali kovariantni tenzor g^{ik} oziroma g_{ik} , ki se imenuje *metrični tenzor*. Tenzorja g^{ik} in g_{ik} imata iste komponente, ki jih lahko zapišemo v matrični obliki

$$(g^{ik}) = (g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

(indeks i označuje vrstice, k pa stolpce, in sicer po vrsti 0, 1, 2, 3). Očitno je

$$g_{ik}A^k = A_i, \quad g^{ik}A_k = A^i. \quad (6.6)$$

Skalarni produkt dveh četvercev lahko torej zapišemo v obliki

$$A^iA_i = g_{ik}A^iA^k = g^{ik}A_iA_k. \quad (6.7)$$

Tenzorji δ_k^i , g_{ik} , g^{ik} so posebni, ker so njihove komponente enake v vseh opazovalnih sistemih. Tudi *popolnoma antisimetrični enotski tenzor* četrtega reda e^{iklm} ima to lastnost. To je tenzor, katerega komponente sprevržejo predznak pri zamenjavi para indeksov, od nič različne komponente pa so enake ± 1 . Iz lastnosti antisimetričnosti sledi, da so vse komponente z dvema enakima indeksoma enake nič, zato so edine od nič različne komponente tiste, pri katerih so vsi štirje indeksi različni. Določimo

$$e^{0123} = +1 \quad (6.8)$$

(zato je $e_{0123} = -1$). Tedaj so vse od nič različne komponente e^{iklm} enake $+1$ ali -1 , odvisno od tega, ali lahko števila i, k, l, m uredimo po vrsti 0, 1, 2, 3 s sodim ali lihim številom zamenjav (transpozicij). Število takšnih komponent je $4! = 24$. Zato je

$$e^{iklm}e_{iklm} = 24. \quad (6.9)$$

Pri zasukih koordinatnega sistema se količine e^{iklm} obnašajo kot tenzor; če pa spremenimo predznak ene ali treh koordinat se komponente e^{iklm} ne spremenijo, saj smo zahtevali, da so enake v vseh opazovalnih sistemih, medtem ko bi nekatere izmed komponent pravega tenzorja morale spremeniti predznak. Zato strogo vzeto e^{iklm} ni tenzor, temveč *pseudotenzor*. Pseudotenzorji poljubnega reda, na primer *pseudoskalarji*, se obnašajo kot tenzorji pri vseh transformacijah koordinat, razen pri tistih, ki jih ne moremo zapisati kot zaporedje zasukov, torej pri zrcaljenjih (to so spremembe znaka koordinat, ki jih ne moremo opisati kot zasuke).

Zmnožki $e^{iklm}e^{prst}$ tvorijo tenzor osmega reda, ki je pravi tenzor; po skrčitvi enega ali več parov indeksov dobimo tenzorje ranga 6, 4 in 2. Vsi ti tenzorji se zapišejo enako v vseh opazovalnih sistemih. Zato lahko njihove komponente zapišemo s kombinacijami zmnožkov komponent enotskega tenzorja δ_k^i , ki je edini pravi tenzor, katerega komponente so enake v vseh opazovalnih sistemih. Te kombinacije lahko hitro dobimo, če upoštevamo simetrije, ki jih morajo imeti kombinacije pri permutaciji indeksov. *

*Za poznejšo uporabo navedimo naslednje enačbe:

$$e^{iklm}e_{prst} = - \begin{vmatrix} \delta_p^i & \delta_r^i & \delta_s^i & \delta_t^i \\ \delta_p^k & \delta_r^k & \delta_s^k & \delta_t^k \\ \delta_p^l & \delta_r^l & \delta_s^l & \delta_t^l \\ \delta_p^m & \delta_r^m & \delta_s^m & \delta_t^m \end{vmatrix}, \quad e^{iklm}e_{prsm} = - \begin{vmatrix} \delta_p^i & \delta_r^i & \delta_s^i \\ \delta_p^k & \delta_r^k & \delta_s^k \\ \delta_p^l & \delta_r^l & \delta_s^l \end{vmatrix},$$

$$e^{iklm}e_{prlm} = -2(\delta_p^i\delta_r^k - \delta_r^i\delta_p^k), \quad e^{iklm}e_{pklm} = -6\delta_p^i.$$

Koeficiente v teh izrazih lahko preverimo z vrednostjo skrčitve po vseh indeksih, ki mora biti enaka (6.9).

Iz teh pravil sledita enačbi

$$e^{prst}A_{ip}A_{kr}A_{ls}A_{mt} = -Ae_{iklm},$$

$$e^{iklm}e^{prst}A_{ip}A_{kr}A_{ls}A_{mt} = 24A,$$

kjer je A determinanta, ki jo tvorijo količine A_{ik} .

Če je A^{ik} antisimetrični tenzor, sta tenzor A^{ik} in psevdotenzor $A^{*ik} = \frac{1}{2}e^{iklm}A_{lm}$ med seboj *dualna*. Podobno je $e^{iklm}A_{lm}$ antisimetrični psevdotenzor tretjega reda, ki je dualen četvercu A^i . Zmnožek $A^{ik}A_{ik}^*$ dualnih tenzorjev je psevdoskalar.

Omenimo še nekaj podobnih lastnosti tridimenzionalnih vektorjev in tenzorjev. Popolnoma antisimetrični enotski psevdotenzor tretjega reda je skupina količin $e_{\alpha\beta\gamma}$, ki spremenijo predznak pri zamenjavi dveh indeksov. Edine od nič različne komponente $e_{\alpha\beta\gamma}$ so tiste s tremi različnimi indeksi. Določimo $e_{xyz} = 1$; ostale komponente so 1 ali -1 , odvisno od tega, ali lahko zaporedje α, β, γ uredimo kot x, y, z s sodim ali lihim številom zamenjav. *

Zmnožki $e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\nu}$ tvorijo pravi tridimenzionalni tenzor šestega reda in jih zato lahko izrazimo s produkti komponent tridimenzionalnega enotskega tenzorja $\delta_{\alpha\beta}$. †

Pri zrcaljenju koordinatnega sistema, torej pri spremembi predznaka pri vseh koordinatah, komponente običajnega vektorja prav tako spremenijo predznak. Takšni vektorji so *polarni* vektorji. Komponente vektorja, ki ga lahko zapišemo kot vektorski produkt dveh polarnih vektorjev, pri zrcaljenju (inverziji) ne spremenijo predznaka. To so *aksialni* vektorji. Skalarni produkt polarnega in aksialnega vektorja ni pravi skalar, temveč psevdoskalar, ki pri inverziji spremeni predznak. Aksialen vektor je psevdovektor, ki je dualen nekemu antisimetričnemu tenzorju. Če je $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, potem velja

$$C_\alpha = \frac{1}{2}e_{\alpha\beta\gamma}C_{\beta\gamma}, \text{ kjer je } C_{\beta\gamma} = A_\beta B_\gamma - A_\gamma B_\beta.$$

Sedaj si oglejmo četverne tenzorje. Prostorske komponente ($i, k = 1, 2, 3$) antisimetričnega tenzorja A^{ik} sestavljajo (glede na povsem prostorske transformacije) tridimenzionalni antisimetrični tenzor; iz zgoraj povedanega sledi, da jih lahko izrazimo s komponentami tridimenzionalnega aksialnega vektorja. Glede na te iste transformacije tvorijo komponente A^{01}, A^{02}, A^{03} tridimenzionalni polarni vektor. Zato lahko komponente antisimetričnega četvernega tenzorja zapišemo kot matriko

$$(A^{ik}) = \begin{vmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{vmatrix}, \quad (6.10)$$

kjer sta glede na prostorske transformacije $\mathbf{p}$ in $\mathbf{a}$ polarni in aksialni vektor. Pri naštevanju komponent antisimetričnega četvernega tenzorja bomo komponente zapisali v obliki

$$A^{ik} = (\mathbf{p}, \mathbf{a});$$

* Da se komponente četvernega tenzorja e^{iklm} ne spremenijo pri zasukih štiridimenzionalnega koordinatnega sistema, in da se komponente tridimenzionalnega tenzorja $e_{\alpha\beta\gamma}$ ne spremenijo pri zasukih prostorskih osi, je posledica splošnega pravila: poljubni popolnoma antisimetrični tenzor reda, ki je enak številu dimenzij prostora, v katerem je definiran, je invarianten proti zasukom koordinatnega sistema v tem prostoru.

† Navedimo uporabne enačbe:

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\nu} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} \\ \delta_{\beta\lambda} & \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} \\ \delta_{\gamma\lambda} & \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} \end{vmatrix}.$$

Po skrčitvi tega tenzorja po enem, dveh in treh parih indeksov dobimo še

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\gamma} &= \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda}, \\ e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\beta\gamma} &= 2\delta_{\alpha\lambda}, \\ e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\gamma} &= 6. \end{aligned}$$

kovariantne komponente istega tenzorja pa so

$$A_{ik} = (-\mathbf{p}, \mathbf{a}).$$

Na koncu si oglejmo še operacije odvajanja in integriranja v štiridimenzionalni tenzorski analizi.

Četverni gradient skalarja ϕ je četverec

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \Delta \phi \right).$$

Zapomniti si moramo, da so ti odvodi kovariantne komponente četverca. Diferencial skalarja

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} dx^i$$

je tudi skalar; iz tega zapisa (ki je skalarni produkt dveh četvercev) je naša trditev očitna.

V splošnem moramo operacijo odvajanja po koordinatah x^i , $\partial/\partial x^i$, smatrati kot kovariantne komponente operatorskega četverca. Tako je na primer divergenca četverca $\partial A^i/\partial x^i$, pri kateri odvajamo kontravariantne komponente A^i , skalarna količina. *

V tridimenzionalnem prostoru lahko integriramo po prostornini, ploskvah in krivuljah. V štiridimenzionalnem prostoru imamo štiri vrste integralov:

(1) Integral po krivulji v četvernem prostoru. Diferencialna količina je diferencial dolžine, četverec dx^i .

(2) Integral po (dvodimenzionalni) ploskvi v četvernem prostoru. V tridimenzionalnih prostorih so projekcije ploščine paralelograma, ki ga razpenjata vektorja $d\mathbf{r}$ in $d\mathbf{r}'$, na koordinatne ploskve $x_\alpha x_\beta$ enake $dx_\alpha dx'_\beta - dx_\beta dx'_\alpha$. Podobno je v četvernem prostoru diferencial ploščine podan z antisimetričnim tenzorjem drugega reda $df^{ik} = dx^i dx'^k - dx^k dx'^i$, katerega komponente so projekcije diferencialne ploščine na koordinatne ploskve. V tridimenzionalnem prostoru lahko namesto tenzorja $df_{\alpha\beta}$ uporabimo dualni vektor df_α : $df_\alpha = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} df_{\beta\gamma}$. Z geometrijskega vidika je to vektor, ki je pravokoten na diferencialno ploskev in po velikosti enak ploščini diferencialne ploskve. V četvernem prostoru ne moremo sestaviti takšnega vektorja, lahko pa vpeljemo tenzor df^{*ik} , ki je dualen tenzorju df^{ik} ,

$$df^{*ik} = \frac{1}{2} e^{iklm} df_{lm}. \quad (6.11)$$

*Če odvajamo po "kovariantnih koordinatah" x_i , potem so odvodi

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}, -\Delta \phi \right)$$

kontravariantne komponente četverca. To obliko bomo uporabljali le v posebnih primerih, na primer pri zapisu kvadrata četvernega gradienta $(\partial\phi/\partial x^i)(\partial\phi/\partial x_i)$.

V literaturi pogosto najdemo parcialne odvode po koordinatah zapisane z oznakami

$$\partial^i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Pri takšnem zapisu operatorjev za odvajanje je kovariantni ali kontravariantni značaj količin, ki jih dobimo, ekspliciten. Obstaja še en okrajšan zapis odvodov, kjer zapišemo indeks, pred katerim stoji vejica:

$$\phi_{,i} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}, \quad \phi^{,i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}.$$

Tudi pri tem zapisu je značaj dobljenih količin ekspliciten.

Z geometrijskega vidika ta tenzor opisuje diferencialno ploskev, ki je po velikosti enaka in “pravokotna” na diferencialno ploskev df^{ik} ; vsi diferencialni odseki krivulj, ki ležijo v tej ploskvici, so pravokotni na vse diferencialne odseke krivulj, ki ležijo v df^{ik} . Očitno je $df^{ik} df_{ik}^* = 0$.

(3) Integral po hiperploskvi, torej po tridimenzionalni mnogoterosti. V tridimenzionalnem prostoru je prostornina paralelepipeda, ki ga razpenjajo trije vektorji, enaka determinanti tretjega reda, ki jo sestavimo iz komponent vektorjev. Po analogiji dobimo projekcije prostornine paralelepipeda (torej “ploščine” hiperploskve), ki jo razpenjajo trije četverci dx^i , dx'^i , dx''^i ; podajajo jih determinante

$$dS^{ikl} = \begin{vmatrix} dx^i & dx'^i & dx''^i \\ dx^k & dx'^k & dx''^k \\ dx^l & dx'^l & dx''^l \end{vmatrix},$$

ki tvorijo tenzor tretjega reda, ki je antisimetričen v vseh svojih indeksih. Kot diferencial pri integriranju po hiperploskvah je bolj primerno uporabiti četverec dS^i , ki je dualen tenzorju dS^{ikl} :

$$dS^i = -\frac{1}{6} e^{iklm} dS_{klm}, \quad dS_{klm} = e_{nkml} dS^n. \quad (6.12)$$

Velja na primer

$$dS^0 = dS^{123}, \quad dS^1 = dS^{023}, \dots$$

Geometrijsko je dS^i četverec, ki je po velikosti enak “površini” hiperploskvice in pravokoten nanjo (torej je pravokoten na vse krivulje znotraj hiperploskvice). Poseben primer je $dS^0 = dx dy dz$, torej diferencialna tridimenzionalna prostornina dV , ki je projekcija diferencialne hiperploskve na hiper-ravnino $x^0 = \text{konst.}$

(4) Integral po štiridimenzionalni prostornini; diferencialna količina je skalar

$$d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c dt dV. \quad (6.13)$$

To je skalar, saj je očitno, da se prostornina območja četvernega prostora pri zasukih koordinatnega sistema ne spremeni. *

Z izreki, ki so podobni Gaussovemu in Stokesovemu v tridimenzionalni vektorski analizi, lahko pretvarjamo štiridimenzionalne integrale.

Integral po sklenjeni hiperploskvi lahko pretvorimo v integral po četverni prostornini, ki jo hiperploskev omejuje, z zamenjavo integracije po dS_i z operatorjem

$$dS_i \rightarrow d\Omega \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (6.14)$$

Integral vektorja A^i lahko zapišemo kot

$$\oint A^i dS_i = \int \frac{\partial A^i}{\partial x^i} d\Omega. \quad (6.15)$$

*Pri transformaciji nabora integracijskih spremenljivk x^0, x^1, x^2, x^3 v nove spremenljivke x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 , se integracijski diferencial spremeni v $J d\Omega'$, kjer je $d\Omega' = dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3$, J pa je Jacobijeva determinanta transformacije:

$$J = \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}$$

Pri linearnih transformacijah oblike $x'^i = a_k^i x^k$, je Jacobijeva determinanta enaka determinanti $|a_k^i|$, ki ima vrednost 1 pri zasukih koordinatnega sistema; zato je $d\Omega$ invarianten.

Ta enačba je posplošitev Gaussovega izreka.

Integral po dvodimenzionalni ploskvi lahko pretvorimo v integral po hiperploskvi, ki jo ploskev "razpenja", če nadomestimo integracijo po df_{ik}^* z operatorjem

$$df_{ik}^* \rightarrow dS_i \frac{\partial}{\partial x^k} - dS_k \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (6.16)$$

Integral antisimetričnega tenzorja A^{ik} je na primer

$$\frac{1}{2} \int A^{ik} df_{ik}^* = \frac{1}{2} \int \left(dS_i \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} - dS_k \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^i} \right) = \int dS_i \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k}. \quad (6.17)$$

Integral po štiridimenzionalni sklenjeni krivulji lahko pretvorimo v integral po ploskvi, ki jo krivulja omejuje. V ta namen uporabimo zamenjavo

$$dx^i \rightarrow df^{ki} \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (6.18)$$

Integral četverca je na primer

$$\oint A_i dx^i = \int df^{ki} \frac{\partial A}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \int df^{ik} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right), \quad (6.19)$$

kar je posplošitev Stokesovega izreka.

NALOGE

NALOGA 1. Ugotovi, kako se pretvorijo komponente simetričnega tenzorja četverca A^{ik} ob Lorentzevi transformaciji (6.1).

Rešitev: Komponente tenzorja obravnavamo kot zmnožke komponent dveh četvercev in dobimo

$$A^{00} = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left(A'^{00} + 2 \frac{V}{c} A'^{01} + \frac{V^2}{c^2} A'^{11} \right), \quad A^{11} = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left(A'^{11} + 2 \frac{V}{c} A'^{01} + \frac{V^2}{c^2} A'^{00} \right),$$

$$A^{22} = A'^{22}, \quad A^{23} = A'^{23}, \quad A^{12} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \left(A'^{12} + \frac{V}{c} A'^{02} \right),$$

$$A^{01} = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left[A'^{01} \left(1 + \frac{V^2}{c^2} \right) + \frac{V}{c} A'^{00} + \frac{V}{c} A'^{11} \right],$$

$$A^{02} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \left(A'^{02} + \frac{V}{c} A'^{12} \right),$$

in analogne enačbe za A^{33} , A^{13} in A^{03} .

NALOGA 2. Enako za antisimetrični tenzor A^{ik} .

Rešitev: Ker se koordinati x^2 in x^3 ne spremenita, se tenzorska komponenta A^{23} tudi ne spremeni, komponente A^{12} , A^{13} in A^{02} , A^{03} pa se transformirata kot x^1 in x^0 :

$$A^{23} = A'^{23}, \quad A^{12} = \frac{A'^{12} + \frac{V}{c} A'^{02}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A^{02} = \frac{A'^{02} + \frac{V}{c} A'^{12}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

in podobno še za A^{13} in A^{03} .

Če nas zanimajo le vrteži dvodimenzionalnega koordinatnega sistema v ravnini x^0x^1 , tvorijo komponente $A^{01} = -A^{10}$, $A^{00} = A^{11} = 0$ antisimetrični tenzor drugega reda, ta red pa je enak dimenzionalnosti prostora. Zato (glej opombo na strani *) se te komponente ob transformaciji ne spremenijo in velja

$$A^{01} = A'^{01}.$$

§7 Štiridimenzionalna hitrost

Iz običajnega tridimenzionalnega vektorja hitrosti lahko sestavimo četverec. Ta *četverna hitrost* (angl. *four-velocity*) delca je četverec

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}. \quad (7.1)$$

Njegove komponente bomo dobili s pomočjo (3.1)

$$ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

kjer je v običajna tridimenzionalna hitrost delca. Zato je

$$u^1 = \frac{dx^1}{ds} = \frac{dx}{c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_x}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

ipd. Od tod dobimo

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{v}}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (7.2)$$

Pozor: četverna hitrost je brezdimenzijska količina!

Komponente četverne hitrosti med seboj niso neodvisne. Iz $dx_i dx^i = ds^2$ sledi

$$u^i u_i = 1. \quad (7.3)$$

Z geometrijskega vidika je u^i enotski četverec, ki je tangento na svetovnico delca.

Zaradi podobnosti z definicijo četverne hitrosti, lahko drugi odvod

$$w^i = \frac{d^2 x^i}{ds^2} = \frac{du^i}{ds}$$

imenujemo četverni pospešek. Odvod enačbe (7.3) je

$$u_i w^i = 0, \quad (7.4)$$

kar pomeni, da sta četverna hitrost in pospešek med seboj "pravokotna".

NALOGA

NALOGA Opiši relativistično enakomerno pospešeno gibanje, torej premočrtno gibanje, za katerega je pospešek w v lastnem opazovalnem sistemu (ob vsakem trenutku) konstanten.

Rešitev: V opazovalnem sistemu, v katerem je hitrost delca enaka nič, $v = 0$, so komponente četverca pospeška enake $w^i = (0, w/c^2, 0, 0)$ (kjer je w običajni tridimenzionalni pospešek, ki kaže v smeri osi x). Relativistično invariantni zapis pogoja enakomernega pospeška mora zahtevati, da je četverni skalar, ki ustreza w^2 v lastnem opazovalnem sistemu, konstanten:

$$w^i w_i = \text{konst} \equiv -\frac{w^2}{c^4}.$$

V “nepremičnem” opazovalnem sistemu, v katerem opazujemo gibanje, izpišemo izraz za $w^i w_i$ in dobimo enačbo

$$\frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = w, \quad \text{ali} \quad \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = wt + \text{konst}.$$

Postavimo $v = 0$ ob $t = 0$ in sledi $\text{konst} = 0$, zato je

$$v = \frac{wt}{\sqrt{1 + \frac{w^2 t^2}{c^2}}}.$$

Ponovno integriramo in postavimo $x = 0$ ob $t = 0$, pa dobimo

$$x = \frac{c^2}{w} \left(\sqrt{1 + \frac{w^2 t^2}{c^2}} - 1 \right).$$

Za $wt \ll c$ postaneta ti enačbi enaki klasičnima izrazoma $v = wt$ in $x = wt^2/2$. Ko pa gre $wt \rightarrow \infty$, hitrost teži proti konstantni vrednosti c .

Lastni čas enakomerno pospešenega delca je podan z integralom

$$\int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \frac{c}{w} \sinh^{-1} \left(\frac{wt}{c} \right).$$

Ko gre $t \rightarrow \infty$, lastni čas narašča mnogo počasneje kot t v skladu z zakonom $c/w \ln(2wt/c)$.

Poglavje 2

Relativistična mehanika

§8 Načelo najmanjše akcije

Pri obravnavi gibanja delcev snovi se bomo oprli na načelo najmanjše akcije. Kot že vemo, je *načelo najmanjše akcije* trditev, da za vsak mehanski sistem obstaja nek integral S , imenovan *akcija*, ki ima najmanjšo vrednost takrat, ko ga izračunamo za dejansko gibanje, torej tedaj, ko je njegova variacija δS enaka nič. *

Integral akcije za prosti delec snovi (to je delec, na katerega ne delujejo zunanje sile) bomo dobili upoštevajoč dejstvo, da ta integral ne sme biti odvisen od izbire opazovalnega sistema, torej mora biti invarianten proti Lorentzevim transformacijam. Zato mora biti odvisen od skalarja. Poleg tega je jasno, da mora biti integrand diferencialna količina prvega reda. Edini tovrstni skalar, ki ga lahko zapišemo za prosti delec, je razmik ds , ali αds , kjer je α neka konstanta. Za delec mora akcija torej imeti obliko

$$S = -\alpha \int_a^b ds,$$

kjer je $\int_a^b$ integral po svetovnici delca med dvema dogodkoma: ob prvem dogodku je delec v začetnem položaju ob času t_1 , od drugem pa v končnem položaju ob času t_2 . Integriramo torej med dvema svetovnima točkama delca. Konstanta α opredeljuje delec, mora pa biti pozitivna za vse različne delce. Kot smo videli v 3, ima $\int_a^b ds$ največjo vrednost vzdolž ravne svetovnice; če integriramo po ukrivljeni svetovnici ima lahko integral poljubno majhno vrednost. Zato integral $\int_a^b ds$ s pozitivnim predznakom ne more imeti minimuma; integral s predznakom pa minimum seveda ima, in sicer vzdolž ravne svetovnice.

Integral akcije lahko zapišemo kot integral po času

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt.$$

Koeficient L pred dt je *Lagrangeva funkcija* mehanskega sistema. S pomočjo (3.1) dobimo

$$S = - \int_{t_1}^{t_2} \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt,$$

*Stroga različica načela najmanjše akcije pravi, da mora biti integral S minimalen le za neskončno kratke odseke integracijske poti. Za končno dolge odseke lahko trdimo le to, da mora biti S ekstremen, vendar ne nujno minimalen. (Glej *Mehanika*, §2.)

kjer je v hitrost delca snovi. Od tod dobimo Lagrangevo funkcijo delca:

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Količina α , kot rečeno, opredeljuje delec. V klasični mehaniki delec opredelimo z njegovo maso m . Poiščimo torej zvezo med α in m . V limiti $c \rightarrow \infty$ mora naš izraz za L iti proti klasičnemu izrazu $L = \frac{1}{2}mv^2$. Funkcijo L razvijemo po potencah v/c . Če zanemarimo člene višjega reda, velja

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}.$$

Konstantni členi v Lagrangevi funkciji nimajo vpliva na gibalno enačbo in jih lahko izpustimo. Izpustimo torej αc v izrazu za L , s primerjavo s klasično vrednostjo $L = mv^2/2$ pa dobimo $\alpha = mc$.

Akcija za prost delec snovi je torej

$$S = -mc \int_a^b ds, \quad (8.1)$$

Lagrangeva funkcija pa je

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (8.2)$$

§9 Energija in gibalna količina

Gibalna količina delca je vektor $\mathbf{p} = \partial L / \partial \mathbf{v}$ ($\partial L / \partial \mathbf{v}$ je simbolični zapis vektorja, katerega komponente so odvodi L po ustreznih komponentah vektorja $\mathbf{v}$). Z (8.2) dobimo

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (9.1)$$

Za majhne hitrosti $v \ll c$, ali v limiti $c \rightarrow \infty$, postane ta izraz enak klasičnemu $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Pri $v = c$ je gibalna količina neskončna.

Odvod gibalne količine po času je sila, ki deluje na delec. Mislimo si, da se spreminja le smer hitrosti delca, torej da je sila pravokotna na hitrost. Tedaj je

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (9.2)$$

Če pa se spreminja le velikost hitrosti, torej če je sila vzporedna s hitrostjo, potem velja

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (9.3)$$

Ugotovimo, da je razmerje med silo in pospeškom različno v obeh primerih.

Energija $\mathcal{E}$ delca je definirana z *

$$\mathcal{E} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L.$$

*Glej *Mehanika*, §6.

Vstavimo izraza (8.2) in (9.1) za L in $\mathbf{p}$ in dobimo

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (9.4)$$

Ta zelo pomembna enačba med drugim pokaže tudi to, da v relativistični mehaniki energija prostega delca ne postane enaka nič pri $v = 0$, temveč ima končno vrednost

$$\mathcal{E} = mc^2. \quad (9.5)$$

To količino imenujemo *mirovna energija* (angl. *rest energy*) delca.

Pri majhnih hitrostih ($v/c \ll 1$) dobimo z razvojem (9.4) po potencah v/c

$$\mathcal{E} \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2},$$

ki se od klasičnega izraza za kinetično energijo delca razlikuje za mirovno energijo.

Poudariti moramo, da čeprav govorimo o “delcih”, nikjer nismo predpostavili, da gre za “elementarne delce”. Zato dobljene enačbe veljajo tudi za telesa, sestavljena iz velikega števila delcev, pri katerih m predstavlja celotno maso telesa, v pa hitrost gibanja telesa kot celote. Enačba (9.5) tako velja za poljubno telo, ki kot celota miruje. Poudariti moramo, da je v relativistični mehaniki energija prostega telesa (torej tudi energija poljubnega izoliranega sistema) povsem določena količina, ki je vedno pozitivna in ki je neposredno povezana z maso telesa. Spomnimo se, da je v klasični mehaniki energija telesa določena le do poljubne konstante, ki je lahko pozitivna ali negativna.

Energija mirujočega telesa poleg mirovnih energij sestavnih delcev vključuje tudi kinetično energijo delcev ter energijo njihovih medsebojnih interakcij. Zato mc^2 ni enako $\sum m_a c^2$ (kjer so m_a mase delcev), in m ni enako $\sum m_a$. V relativistični mehaniki zakon o ohranitvi mase ne velja: masa sestavljenega telesa ni enaka vsoti mas njegovih sestavnih delov. Velja le zakon o ohranitvi energije, ki vključuje tudi mirovne energije delcev.

Kvadriramo (9.1) in (9.4) in s primerjavo rezultatov dobimo naslednjo zvezo med energijo in gibalno količino delca:

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2. \quad (9.6)$$

Energija, izražena z gibalno količino, se imenuje Hamiltonova funkcija $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = c\sqrt{p^2 + m^2 c^2}. \quad (9.7)$$

Pri nizkih hitrostih je $p \ll mc$ in približno velja

$$\mathcal{H} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m},$$

to pa je, če odmislimo mirovno energijo, poznan klasični izraz za Hamiltonovo funkcijo.

Iz (9.1) in (9.4) dobimo naslednjo zvezo med energijo, gibalno količino in hitrostjo delca:

$$\mathbf{p} = \mathcal{E} \frac{\mathbf{v}}{c^2}. \quad (9.8)$$

Pri $v = c$ postaneta gibalna količina in energija neskončni. To pomeni, da se delec z od nič različno maso m ne more gibati s svetlobno hitrostjo. Vseeno pa lahko v relativistični mehaniki obstajajo delci z maso nič, ki se gibljejo s hitrostjo svetlobe. * Za takšne delce velja

$$p = \frac{\mathcal{E}}{c}, \quad (9.9)$$

kar sledi iz (9.8). Ista enačba približno velja tudi za delce z od nič različno maso v *ultrarelativističnem* približku, ko je energija delca $\mathcal{E}$ velika v primerjavi z njegovo mirovno energijo mc^2 .

Zapišimo sedaj vse izpeljane enačbe v invariantni štiridimenzionalni obliki. Po načelu najmanjše akcije je

$$\delta S = -mc \delta \int_a^b ds = 0.$$

Variacijo δS izračunamo tako, da upoštevamo $ds = \sqrt{dx_i dx^i}$, in dobimo

$$\delta S = -mc \int_a^b \frac{dx_i \delta x^i}{ds} = -mc \int_a^b u_i \delta x^i.$$

Integriramo po delih in sledi

$$\delta S = -mc u_i \delta x^i \Big|_a^b + mc \int_a^b \delta x^i \frac{du^i}{ds} ds. \quad (9.10)$$

Gibalne enačbe dobimo, kot že vemo, s primerjavo različnih poti med dvema istima robnima točkama, zato na mejah velja $(\delta x^i)_a = (\delta x^i)_b = 0$. Dejansko pot potem dobimo iz pogoja $\delta S = 0$. Iz (9.10) tako dobimo enačbe $du_i/ds = 0$; tako v štiridimenzionalni obliki zapišemo, da ima delec konstantno hitrost.

Variacijo akcije kot funkcije koordinat izračunamo tako, da pritrdimo točko a , tako da je $(\delta x^i)_a = 0$. Druga točka je spremenljiva, dopustne pa so samo dejanske poti delca, torej tiste, ki so rešitve gibalne enačbe. V tem primeru je integral v enačbi (9.10) za δS enak nič. Namesto $(\delta x^i)_b$ pišemo kar δx^i in tako dobimo

$$\delta S = -mc u_i \delta x^i. \quad (9.11)$$

Četverec

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i} \quad (9.12)$$

se imenuje *četverec gibalne količine* (angl. *momentum four-vector*). Iz mehanike nam je znano, da so odvodi $\partial S/\partial x$, $\partial S/\partial y$ in $\partial S/\partial z$ tri komponente vektorja gibalne količine $\mathbf{p}$, medtem ko je odvod $-\partial S/\partial t$ energija delca $\mathcal{E}$. Zato so kovariantne komponente četverca gibalne količine $p_i = (\mathcal{E}/c, -\mathbf{p})$, kontravariantne komponente pa so [†]

$$p^i = (\mathcal{E}/c, \mathbf{p}). \quad (9.13)$$

*Na primer kvanti svetlobe in nevtrini.

[†]Obstaja uporaben mnemoničen pripomoček, s katerim si lažje zapomnimo definicije fizikalnih četvercev: *kontravariantne* komponente so tiste, ki so povezane z ustreznimi tridimenzionalnimi vektorji ($\mathbf{r}$ za x^i in $\mathbf{p}$ za p^i) s "pravilnim" pozitivnim predznakom.

Iz (9.11) je razvidno, da so komponente četverca gibalne količine prostega delca

$$p^i = mc u^i. \quad (9.14)$$

Če vstavimo komponente četverca hitrosti iz (7.2), vidimo, da res dobimo izraza (9.1) in (9.4) za $\mathbf{p}$ in $\mathcal{E}$.

V relativistični mehaniki sta gibalna količina in energija komponenti enega samega četverca. Od tod takoj dobimo enačbe za transformacijo gibalne količine in energije ob prehodu iz enega inercialnega sistema v drugega. V splošno pravilo za pretvorbo četvercev (6.1) vstavimo (9.13) in dobimo

$$p_x = \frac{p'_x + \frac{V}{c^2} \mathcal{E}'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \quad \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}' + V p'_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (9.15)$$

kjer so p_x, p_y, p_z komponente tridimenzionalnega vektorja $\mathbf{p}$.

Iz definicije četverca gibalne količine (9.14) in identitete $u^i u_i = 1$ dobimo kvadrat četverca za prosti delec:

$$p_i p^i = m^2 c^2. \quad (9.16)$$

Če v to enačbo vstavimo (9.13), ponovno dobimo (9.6).

Po analogiji z običajno vpeljavo sile je četverec sile definiran kot odvod

$$g^i = \frac{dp^i}{ds} = mc \frac{du^i}{ds}. \quad (9.17)$$

Komponente četverca zadostijo identiteti $g_i u^i = 0$. Komponente četverca sile lahko zapišemo tudi z običajnim tridimenzionalnim vektorjem sile $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt$:

$$g^i = \left(\frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{f}}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (9.18)$$

Časovna komponenta je povezana z delom, ki ga sila opravi.

Relativistično Hamilton-Jacobijevo enačbo dobimo, če nadomestimo p_i z odvodi $-\partial S/\partial x^i$ v enačbi (9.16):

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{\partial S}{\partial x^i} \equiv g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} = m^2 c^2, \quad (9.19)$$

vsoto pa lahko tudi razpišemo in dobimo

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 = m^2 c^2. \quad (9.20)$$

Opišimo še prehod v mejni primer klasične mehanike v enačbi (9.19). Najprej se spomnimo prehoda v klasično mehaniko pri enačbi (9.7): energija delca v relativistični mehaniki vsebuje člen mc^2 , ki ga v klasični mehaniki ni. To moramo upoštevati tudi tu. Glede na to, da je akcija S povezana z energijo z $\mathcal{E} = -(\partial S/\partial t)$, moramo pri prehodu v klasično mehaniko zamenjati S z novo akcijo S' , definirano z

$$S = S' - mc^2 t.$$

To vstavimo v (9.20) in dobimo

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{1}{2mc^2} \left(\frac{\partial S'}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial S'}{\partial t} = 0.$$

v limiti $c \rightarrow \infty$ ta enačba postane enaka klasični Hamilton-Jacobijevi enačbi.

§10 Transformacije porazdelitev

V številnih nalogah v fiziki imamo opravka s porazdelitvenimi funkcijami po gibalnih količinah delcev: $f(\mathbf{p}) dp_x dp_y dp_z$ je število delcev, ki imajo gibalno količino s komponentami v intervalih dp_x, dp_y, dp_z (na kratko lahko rečemo tudi, da je to število delcev v majhni prostornini prostora gibalnih količin, $d^3\mathbf{p} \equiv dp_x dp_y dp_z$). Zanima nas, kako se spremeni porazdelitvena funkcija, ko se preselimo iz enega opazovalnega sistema v drugega.

Na poti do rešitve si najprej oglejmo transformacijske lastnosti majhne prostornine $dp_x dp_y dp_z$. Če vpeljemo štiridimenzionalni koordinatni sistem, katerega osi označujejo komponente četverca gibalne količine delca, potem lahko $dp_x dp_y dp_z$ smatramo za ničelno komponento diferencialne ploščine na hiperploskvi, definirani z enačbo $p^i p_i = m^2 c^2$. Diferencialna ploščina na hiperploskvi je četverec, ki je na hiperploskev pravokoten; v našem primeru smer pravokotnice očitno sovпада s smerjo četverca p_i . Od tod sledi, da je kvocient

$$\frac{dp_x dp_y dp_z}{\mathcal{E}} \quad (10.1)$$

invariantna količina, saj gre za kvocient istih komponent dveh vzporednih četvercev. *

Število delcev $f dp_x dp_y dp_z$ je očitno invarianta, saj ni odvisno od izbire opazovalnega sistema. Zapišemo ga v obliki

$$f(\mathbf{p}) \mathcal{E} \frac{dp_x dp_y dp_z}{\mathcal{E}}$$

in če upoštevamo invariantnost kvocienta (10.1), ugotovimo, da je zmnožek $f(\mathbf{p}) \mathcal{E}$ invarianten. Zato je porazdelitvena funkcija v sistemu K' povezana s tisto v sistemu K po enačbi

$$f'(\mathbf{p}') = \frac{f(\mathbf{p}) \mathcal{E}}{\mathcal{E}'}, \quad (10.4)$$

kjer moramo $\mathbf{p}$ in $\mathcal{E}$ izraziti z $\mathbf{p}'$ in $\mathcal{E}'$ s pomočjo transformacije (9.15).

Vrnimo se k invariantnemu izrazu (10.1). Če vpeljemo "krogelne koordinate" v prostoru gibalnih količin, potem lahko diferencialno prostornino $dp_x dp_y dp_z$ zapišemo kot $p^2 dp d\Omega$,[†]

*Integriranje po (10.1) lahko zapišemo v štiridimenzionalni obliki s pomočjo funkcije δ (glej opombo na dnu strani †) kot integracijo po

$$\frac{2}{c} \delta(p_i p^i - m^2 c^2) d^4 p, \quad d^4 p = dp^0 dp^1 dp^2 dp^3. \quad (10.2)$$

Pri tem smatramo štiri komponente p^i kot neodvisne spremenljivke, paziti pa moramo na to, da je p^0 vedno pozitivna količina. Dokaz enačbe (10.2) je očitno iz naslednjega zapisa funkcije delta, ki se ponavlja v njej:

$$\delta(p^i p_i - m^2 c^2) = \delta \left((p_0)^2 - \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} \right) = \frac{c}{2\mathcal{E}} \left[\delta \left(p_0 + \frac{\mathcal{E}}{c} \right) + \delta \left(p_0 - \frac{\mathcal{E}}{c} \right) \right], \quad (10.3)$$

kjer je $\mathcal{E} = c\sqrt{p^2 + m^2 c^2}$. To enačbo pa dobimo iz formule (V), ki jo najdemo med opombami na strani †.

kjer je do diferencialni prostorski kot okoli smeri vektorja $\mathbf{p}$. Ker je $p dp = \mathcal{E} d\mathcal{E}/c^2$ [to sledi iz (9.6)], velja

$$\frac{p^2 dp d\Omega}{\mathcal{E}} = \frac{p d\mathcal{E} d\Omega}{c^2}.$$

Ugotovimo, da je tudi izraz

$$p d\mathcal{E} d\Omega \quad (10.5)$$

invarianten.

Pojem porazdelitvenih funkcij igra pomembno vlogo v kinetični teoriji plinov: zmnožek $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) dp_x dp_y dp_z dV$ je število delcev v diferencialni prostornini dV , ki imajo gibalno količino v intervalih dp_x, dp_y, dp_z . Funkcija $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ se imenuje porazdelitvena funkcija v *faznem prostoru* (to je prostor koordinat in gibalne količine delca), zmnožek diferencialov $d\tau = d^3p dV$ pa je diferencialna prostornina v tem prostoru. Poiskali bomo transformacijski zakon za to funkcijo.

Poleg opazovalnih sistemov K in K' imejmo še opazovalni sistem K_0 , v katerem delci z izbrano gibalno količino mirujejo; lastno prostornino dV_0 območja, v katerem se delci nahajajo, je definiran v tem sistemu. Hitrosti sistemov K in K' glede na sistem K_0 sta po definiciji enaki hitrostim v in v' , ki jih imajo delci v sistemih K in K' . Zato je po (4.6)

$$dV = dV_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad dV' = dV_0 \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}},$$

od koder sledi

$$\frac{dV}{dV'} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}'},$$

To pomnožimo z enačbo $d^3p/d^3p' = \mathcal{E}/\mathcal{E}'$ in dobimo

$$d\tau = d\tau', \quad (10.6)$$

kar pomeni, da je diferencialna prostornina faznega prostora invariantna količina. Ker je tudi število delcev $f d\tau$ nujno invarianta, zaključimo, da je tudi sama porazdelitvena funkcija v faznem prostoru invarianta:

$$f'(\mathbf{r}', \mathbf{p}') = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (10.7)$$

kjer sta $\mathbf{r}', \mathbf{p}'$ povezana z $\mathbf{r}, \mathbf{p}$ z običajno Lorentzevo transformacijo.

§11 Razpad delcev

Obravnavajmo spontan razpad telesa z maso M v dva dela z masama m_1 in m_2 . Zakon o ohranitvi energije ob razpadu, uporabljen v opazovalnem sistemu, v katerem telo na začetku miruje, je *

$$M = \mathcal{E}_{10} + \mathcal{E}_{20}, \quad (11.1)$$

*V §§11-13 postavimo $c = 1$. To pomeni, da smo si za enoto za merjenje časa izbrali hitrost svetlobe, in da sta dimenziji dolžine in časa s tem postali enaki. Ta izbira je zelo primerna v relativistični mehaniki in poenostavi pisanje enačb. Ker pa ta knjiga vsebuje tudi veliko nerelativistične teorije, tega sistema enot ne bomo uporabljali, razen če bo to eksplicitno povedano.

Enačbe, v katerih je $c = 1$, ni težko pretvoriti v enačbe z običajnimi enotami: hitrost c vstavimo, tako da dobimo prave enote.

kjer sta $\mathcal{E}_{10}$ in $\mathcal{E}_{20}$ energiji nastalih delcev. Ker je $\mathcal{E}_{10} > m_1$ in $\mathcal{E}_{20} > m_2$, je lahko enačba (11.1) izpolnjena le, če velja $M > m_1 + m_2$. To pomeni, da lahko telo spontano razpade le na dela, katerih vsota mas je manjša od mase telesa. Če pa velja $M < m_1 + m_2$ je telo stabilno (glede na obravnavani razpad) in ne more samodejno razpasti. V tem primeru lahko do razpada pride le, če telesu od zunaj dovedemo energijo, večjo od njegove “vezavne energije” ($m_1 + m_2 - M$).

Pri razpadih se ohranita tako energija kot gibalna količina. Ker je začetna gibalna količina telesa enaka nič, mora biti enaka nič tudi vsota gibalnih količin nastalih delcev: $\mathbf{p}_{10} + \mathbf{p}_{20} = 0$. Od tod sledi $p_{10}^2 = p_{20}^2$, ali

$$\mathcal{E}_{10}^2 - m_1^2 = \mathcal{E}_{20}^2 - m_2^2. \quad (11.2)$$

Enačbi (11.1) in (11.2) enolično določata energiji nastalih delcev:

$$\mathcal{E}_{10} = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}, \quad \mathcal{E}_{20} = \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M}. \quad (11.3)$$

Tej nalogi je “obratna” naloga, v kateri računamo celotno energijo M dveh delcev, ki trčita, v opazovalnem sistemu, v katerem je njuna celotna gibalna količina enaka nič. (Takšen sistem imenujemo tudi “težiščni sistem”, ali “sistem T ”). Izračun te količine je kriterij, s katerim lahko določimo, do katerih neelastičnih procesov trka (pri katerih se spremeni notranje stanje trkajočih delcev) lahko pride, in če lahko “nastanejo” novi delci. Do takšnih dogodkov lahko pride le, če je masa nastalih delcev manjša od M .

Naj se v začetnem (“laboratorijskem”) opazovalnem sistemu delec z maso m_1 in energijo $\mathcal{E}_1$ zaleti v delec z maso m_2 , ki miruje. Celotna energija obeh delcev je

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 + m_2,$$

njuna skupna gibalna količina pa je $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1$. Oba delca skupaj obravnavajmo kot en sam sestavljen sistem. Hitrost njunega gibanja kot celote je po (9.8) enaka

$$V = \frac{\mathbf{p}}{\mathcal{E}} = \frac{\mathbf{p}_1}{\mathcal{E}_1 + m_1}. \quad (11.4)$$

Ta količina je hitrost sistema T glede na laboratorijski sistem (sistem L).

Maso M lahko določimo tudi brez transformacije iz enega opazovalnega sistema v drugega. Namesto tega uporabimo enačbo (9.6), ki velja tako za sestavljene sisteme kot za posamezne delce. Velja torej

$$M^2 = \mathcal{E}^2 - p^2 = (\mathcal{E}_1 + m_2)^2 - (\mathcal{E}_1^2 - m_1^2),$$

od koder dobimo

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathcal{E}_1. \quad (11.5)$$

NALOGE

NALOGA 1. Delec s hitrostjo V v letu razpade na dva delca. Določi zvezo med kotoma, pod katerima delca odletita, in njunima energijama.

Rešitev: Naj bo $\mathcal{E}_0$ enega izmed nastalih delcev v težiščnem sistemu [torej $\mathcal{E}_{10}$ ali $\mathcal{E}_{20}$ v (11.3)], $\mathcal{E}$ pa energija istega delca v laboratorijskem sistemu, θ pa kot, pod katerim odleti delec v sistemu L (glede na smer vektorja $\mathbf{V}$). Z enačbami za pretvorbo dobimo

$$\mathcal{E}_0 = \frac{\mathcal{E} - Vp \cos \theta}{\sqrt{1 - V^2}},$$

tako da je

$$\cos \theta = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 \sqrt{1 - V^2}}{V \sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2}}. \quad (1)$$

Iz te enačbe razberemo, da lahko energijo $\mathcal{E}$ izračunamo iz $\cos \theta$ iz kvadratne enačbe

$$\mathcal{E}^2(1 - V^2 \cos^2 \theta) - 2\mathcal{E}\mathcal{E}_0\sqrt{1 - V^2} + \mathcal{E}_0^2(1 - V^2) + V^2 m^2 \cos^2 \theta = 0, \quad (2)$$

ki ima en pozitiven koren (če hitrost v_0 nastalega delca v težiščnem sistemu zadošča pogoju $v_0 > V$) ali dva korena (če je $v_0 < V$).

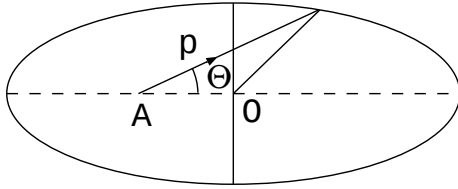
Izvor te nedoločenosti je razviden iz naslednje geometrijske konstrukcije. Po (9.15) se komponente gibalne količine v sistemu L izražajo s količinami v sistemu T po enačbah

$$p_z = \frac{p_0 \cos \theta + \mathcal{E}_0 V}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad p_y = p_0 \sin \theta.$$

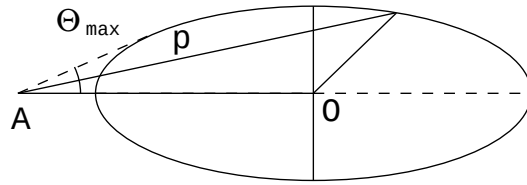
Če izločimo θ_0 , dobimo

$$p_y^2 + (p_z \sqrt{1 - V^2} - \mathcal{E}_0 V^2)^2 = p_0^2.$$

Kot enačba spremenljivk p_z, p_y je to enačba elipse s polosema $p_0/\sqrt{1 - V^2}$ in p_0 , katere središče (točka



(a) $V < v_0$



(b) $V > v_0$

O na sliki 2.3(a)) je zamaknjena za razdaljo $\mathcal{E}_0 V/\sqrt{1 - V^2}$ iz točke $\mathbf{p} = 0$ (točka A na sliki 2.3(a)). *

Če je $V > p_0/\mathcal{E}_0 = v_0$, točka A leži izven elipse (slika 2.3(b)), zato ima lahko pri danem kotu θ_0 vektor $\mathbf{p}$ (in zato tudi energija $\mathcal{E}$) dve različni vrednosti. Iz konstrukcije je tudi razvidno, da v tem primeru kot θ ne sme biti večji od $\theta_{\max}$ (kar ustreza takšni smeri vektorja $\mathbf{p}$, da je ta tangenta na elipso). Vrednost kota $\theta_{\max}$ najlažje določimo analitično iz pogoja, da je diskriminanta kvadratne enačbe (2) enaka nič:

$$\sin \theta_{\max} = \frac{p_0 \sqrt{1 - V^2}}{mV}.$$

NALOGA 2. Določi porazdelitev po energijah nastalih delcev v laboratorijskem sistemu.

Rešitev: V težiščnem sistemu so nastali delci porazdeljeni izotropno po vseh smereh. To pomeni, da je število delcev, ki odletijo v diferencialni prostorski kot $d\Omega_0 = 2\pi \sin \theta_0 d\theta_0$, enak

$$dN = \frac{1}{4\pi} d\Omega_0 = \frac{1}{2} |d \cos \theta_0|. \quad (1)$$

Energija v laboratorijskem sistemu je podana s količinami, ki se nanašajo na težiščni sistem, z

$$\mathcal{E} = \frac{E_0 + p_0 V \cos \theta_0}{\sqrt{1 - V^2}}$$

*V klasični limiti elipsa postane krožnica (glej *Mehanika*, § 16).

in zavzema vrednosti na intervalu od

$$\frac{\mathcal{E}_0 - Vp_0}{\sqrt{1 - V^2}}, \text{ do } \frac{\mathcal{E}_0 + Vp_0}{\sqrt{1 - V^2}}.$$

Če $d|\cos\theta_0|$ izrazimo z $d\mathcal{E}$, dobimo normalizirano porazdelitev po energijah (za vsakega izmed obeh vrst nastalih delcev):

$$dN = \frac{1}{2Vp_0} \sqrt{1 - V^2} d\mathcal{E}. \quad (2)$$

NALOGA 3. Določi razpon vrednosti kota (v laboratorijskem sistemu) med smerema nastalih delcev v primeru razpada na dva identična delc (angl. *separation angle*).

Rešitev: V težiščnem sistemu delca odletita v nasprotnih smereh, zato je $\theta_{10} = \pi - \theta_{20} \equiv \theta_0$. Povezava med koti v težiščnem in laboratorijskem sistemu je podana z (5.4):

$$\cot \theta_1 = \frac{v_0 \cos \theta_0 + V}{v_0 \sin \theta_0 \sqrt{1 - V^2}}, \quad \cot \theta_2 = \frac{-v_0 \cos \theta_0 + V}{v_0 \sin \theta_0 \sqrt{1 - V^2}},$$

(ker je v tem primeru $v_{10} = v_{20} = v_0$). Iskani kot je $\Theta = \theta_1 + \theta_2$ in s preprostim računom dobimo

$$\cot \Theta = \frac{V^2 - v_0^2 + V^2 v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2V v_0 \sqrt{1 - V^2} \sin \theta_0}.$$

Če poiščemo ekstreme tega izraza, dobimo naslednje možne razpone kot Θ :

$$\text{za } V < v_0: \quad 2 \tan^{-1} \left(\frac{v_0}{V} \sqrt{1 - V^2} \right) < \Theta < \pi;$$

$$\text{za } v_0 < V < \frac{v_0}{\sqrt{1 - v_0^2}}: \quad 0 < \Theta < \sin^{-1} \sqrt{\frac{1 - V^2}{1 - v_0^2}} < \frac{\pi}{2};$$

$$\text{za } V > \frac{v_0}{\sqrt{1 - v_0^2}}: \quad 0 < \Theta < 2 \tan^{-1} \left(\frac{v_0}{V} \sqrt{1 - V^2} \right) < \frac{\pi}{2}.$$

NALOGA 4. Poišči kotno porazdelitev v laboratorijskem sistemu za razpad v delce brez mase.

Rešitev: Po (5.6) je zveza med izhodnim kotom v težiščnem in laboratorijskem sistemu za delce brez mase enaka

$$\cos \theta_0 = \frac{\cos \theta - V}{1 - V \cos \theta}.$$

Če ta izraz vstavimo v enačbo (1) v drugi nalogi, dobimo

$$dN = \frac{(1 - V^2) d\theta}{4\pi(1 - V \cos \theta)^2}.$$

NALOGA 5. Poišči porazdelitev po kotih ločitve v laboratorijskem sistemu za razpad v dva delca brez mase.

Rešitev: Zveza med izhodnima kotoma θ_1, θ_2 v laboratorijskem sistemu in kotoma $\theta_{10} \equiv \theta_0, \theta_{20} = \pi - \theta$ v težiščnem sistemu je podana z (5.6), zato za kot ločitve velja

$$\cos \Theta = \frac{2V^2 - 1 - V^2 \cos^2 \theta_0}{1 - V^2 \cos^2 \theta_0},$$

obratno pa velja

$$\cos \theta_0 = \sqrt{1 - \frac{1 - V^2}{V^2} \cot^2 \frac{\Theta}{2}}.$$

Ta izraz vstavimo v enačbo (1) iz druge naloge in dobimo

$$dn = \frac{1 - V^2}{16\pi V} \frac{d\Theta}{\sin^3 \frac{\Theta}{2} \sqrt{V^2 - \cos^2 \frac{\Theta}{2}}}.$$

Kot Θ zavzame vrednosti od π do $\Theta_{\min} = 2 \cos^{-1} V$.

NALOGA 6. Kolikšna je največja energija, ki jo lahko odnese edem izmed nastalih delcev, če mirujoči delec z maso M razpade na tri delce z masami m_1 , m_2 in m_3 .

Rešitev: Delec m_1 ima največjo energijo, če ima sistem drugih dveh delcev m_2 in m_3 najmanjšo možno maso; ta je enaka vsoti $m_2 + m_3$ (in ustreza primeru, ko se ta delca gibljeta skupaj z enako hitrostjo). Tako smo poenostavili nalogo na razpad telesa na dva delca in iz enačbe (11.3) dobimo

$$\mathcal{E}_{1,\max} = \frac{M^2 + m_1^2 - (m_2 + m_3)^2}{2M}.$$

§12 Invariantni sipalni presek

Pojave sipanja opišemo z njihovimi *invariantnimi sipalnimi preseki*, ki določajo število trkov določene vrste, do katerih pride v curkih trkajočih se delcev.

Imejmo dva curka delcev; z n_1 in n_2 bodo označili gostoti delcev (torej število delcev na enoto prostornine), z $\mathbf{v}_1$ in $\mathbf{v}_2$ pa hitrosti delcev. V opazovalnem sistemu, v katerem delec 2 miruje (torej v *mirovnem sistemu* delca 2) imamo opravka s sipanjem curka delcev 1 na mirujoči tarči. Pri običajni vpeljavi sipalnega preseka σ je število trkov, do katerih pride v prostornini dV in v času dt enako

$$d\nu = \sigma v_{\text{rel}} n_1 n_2 dV dt,$$

kjer je v_{rel} hitrost delca 1 v mirovnem sistemu delca 2 (kar je natanko definicija relativne hitrosti dveh delcev v relativistični mehaniki).

Število $d\nu$ je že po svoji naravi invariantna količina. Zapisali bi ga radi v obliki, ki velja v poljubnem opazovalnem sistemu:

$$d\nu = A n_1 n_2 dV dt, \tag{12.1}$$

kjer je A količina, ki bi jo radi določili. Njeno vrednost v mirovnem sistemu enega izmed delcev že poznamo in znaša $v_{\text{rel}} \sigma$. Z σ bomo vedno označevali sipalni presek v mirovnem sistemu enega izmed delcev, ki je po definiciji invariantna količina. Po definiciji je invariantna tudi relativna hitrost v_{rel} .

V izrazu (12.1) je produkt $dV dt$ invarianta. Zato mora biti invarianten tudi zmnožek $A n_1 n_2$.

Zakon za pretvorbo gostote delcev n sledi iz dejstva, da je število delcev v izbrani majhni prostornini dV , torej $n dV$, invarianta. Zapišemo $n dV = n_0 dV_0$ (indeks 0 se nanaša na mirovni sistem delcev) in uporabimo enačbo (4.6) za transformacijo prostornine. Tako dobimo

$$n = \frac{n_0}{\sqrt{1 - v^2}} \tag{12.2}$$

ali $n = n_0 \mathcal{E}/m$, kjer je $\mathcal{E}$ energija, m pa masa delcev.

Ker je An_1n_2 invarianta, iz zgornjega sledi, da je invarianten tudi izraz $A\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2$. Ta pogoj lahko zapišemo tudi v bolj uporabni obliki, kot

$$A \frac{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}{p_{1i}p_2^i} = A \frac{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2} = \text{invarianta}, \quad (12.3)$$

kjer je imenovalac invarianten, saj je enak zmnožku četvercev gibalne količine dveh delcev.

V mirovnem sistemu delca 2 je $\mathcal{E}_2 = m_2$ in $\mathbf{p}_2 = 0$, zato je invariantna količina (12.3) enaka kar A . V tem opazovalnem sistemu pa velja tudi $A = \sigma v_{\text{rel}}$. V poljubnem opazovalnem sistemu je zato

$$A = \sigma v_{\text{rel}} \frac{p_{1i}p_2^i}{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}. \quad (12.4)$$

Ta izraz bi radi zapisali v lepši obliki. Najprej v_{rel} izrazimo z gibalnima količinama in hitrostima delcev v poljubnem opazovalnem sistemu. V ta namen upoštevamo, da je v mirovnem sistemu delca 2

$$p_{1i}p_2^i = \frac{m_1}{\sqrt{1 - v_{\text{rel}}^2}} m_2.$$

Od tod sledi

$$v_{\text{rel}} = \sqrt{1 - \frac{m_1^2 m_2^2}{(p_{1i}p_2^i)^2}}. \quad (12.5)$$

Količino $p_{1i}p_2^i = \mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2$ izrazimo s hitrostima $\mathbf{v}_1$ in $\mathbf{v}_2$ z uporabo enačb (9.1) in (9.4):

$$p_{1i}p_2^i = m_1 m_2 \frac{1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\sqrt{(1 - v_1^2)(1 - v_2^2)}},$$

in to vstavimo v (12.5). Po preprostih pretvorbah dobimo naslednji izraz z relativno hitrost

$$v_{\text{rel}} = \frac{\sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)^2}}{1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2} \quad (12.6)$$

(opazimo lahko, da je ta izraz simetričen na zamenjavo $\mathbf{v}_1$ in $\mathbf{v}_2$, torej da je velikost relativne hitrosti neodvisna od izbire delca, glede na katerega jo računamo).

NALOGA

NALOGA Kaj je “diferencial ločne dolžine” v relativističnem “prostoru hitrosti”?

Rešitev: Iskani diferencial dl_v je relativna hitrosti dveh točk s hitrostima $\mathbf{v}$ in $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$. Iz (12.6) tako dobimo

$$dl_v^2 = \frac{(d\mathbf{v})^2 - (\mathbf{v} \times d\mathbf{v})^2}{(1 - v^2)^2} = \frac{dv^2}{(1 - v^2)^2} + \frac{v^2}{1 - v^2} (d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\phi^2),$$

kjer sta θ in ϕ polarni kot in azimut smeri hitrosti $\mathbf{v}$. Če namesto v vpeljemo novo spremenljivko, definirano z enačbo $v = \tanh \chi$, se diferencial ločne dolžine zapiše:

$$dl_v^2 = d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\phi^2).$$

Z geometrijskega vidika je to diferencial ločne dolžine v tridimenzionalnem prostoru Lobačevskega, torej v prostoru s konstantno negativno ukrivljenostjo (glej (11.12)).

§13 Elastični trki delcev

Oglejmo si *elastični trk* delcev z vidika relativistične mehanike. Gibalni količini in energiji vpadnih delcev (z masama m_1 in m_2) označimo z $\mathbf{p}_1, \mathcal{E}_1$ in $\mathbf{p}_2, \mathcal{E}_2$; s črticami označimo te količine po trku. Zakon o ohranitvi gibalne količine in energije ob trku lahko zapišemo kot enačbo za ohranitev četverca gibalne količine:

$$p_1^i + p_2^i = p_1'^i + p_2'^i. \quad (13.1)$$

S to enačbo lahko zapišemo invariantne količine, ki bodo koristne v nadaljevanju. V ta namen zapišemo (13.1) kot

$$p_1^i + p_2^i - p_1'^i = p_2'^i.$$

in kvadriramo obe strani (to pomeni, da izračunamo skalarni produkt vsake strani same s seboj). Kvadrata četvercev gibalne količine p_1^i in $p_1'^i$ sta enaka m_1^2 , kvadrata od p_2^i in $p_2'^i$ pa sta enaka m_2^2 . Zato velja

$$m_1^2 + p_{1i}p_2^i - p_{1i}p_1'^i - p_{2i}p_1'^i = 0. \quad (13.2)$$

Če na podoben način kvadriramo enačbo $p_1^i + p_2^i - p_2'^i = p_1'^i$, dobimo

$$m_2^2 + p_{1i}p_2^i - p_2^ip_2'^i - p_{1i}p_2'^i = 0. \quad (13.3)$$

Oglejmo si trk v opazovalnem sistemu (sistemu L), v katerem eden izmed delcev (m_2) pred trkom miruje. Tedaj je $\mathbf{p}_2 = 0, \mathcal{E}_2 = m_2$, skalarni produkti v (13.2) pa so

$$\begin{aligned} p_{1i}p_2^i &= \mathcal{E}_1 m_2, \\ p_{2i}p_1'^i &= m_2 \mathcal{E}_1', \\ p_{1i}p_1'^i &= \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_1' - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_1' = \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_1' - p_1 p_1' \cos \theta_1, \end{aligned} \quad (13.4)$$

kjer je θ_1 kot, pod katerim se sipa vpadni delec m_1 . Te izraze vstavimo v (13.2) in dobimo

$$\cos \theta_1 = \frac{\mathcal{E}_1'(\mathcal{E}_1 + m_2) - \mathcal{E}_1 m_2 - m_1^2}{p_1 p_1'}. \quad (13.5)$$

Podobno dobimo iz (13.3)

$$\cos \theta_2 = \frac{(\mathcal{E}_1 + m_2)(\mathcal{E}_2' - m_2)}{p_1 p_2'}, \quad (13.6)$$

kjer je θ_2 kot med gibalno količino, ki jo dobi drugi delec, $\mathbf{p}_2'$, in gibalno količino vpadnega delca, $\mathbf{p}_1$.

Enačbi (13.5)-(13.6) povezujeta sipalna kota obeh delcev v sistemu L s spremembami njunih energij ob trku. Če ti enačbi obrnemo, lahko energiji $\mathcal{E}_1'$ in $\mathcal{E}_2'$ izrazimo s kotoma θ_1 in θ_2 . Zato v (13.6) vstavimo $p_1 = \sqrt{\mathcal{E}_1^2 - m_1^2}$ in $p_2' = \sqrt{(\mathcal{E}_2')^2 - m_2^2}$ in obe strani kvadriramo. Po preprostemu izračunu dobimo

$$\mathcal{E}_2' = m_2 \frac{(\mathcal{E}_1 + m_2)^2 + (\mathcal{E}_1^2 - m_1^2) \cos^2 \theta_2}{(\mathcal{E}_1 + m_2)^2 - (\mathcal{E}_1^2 - m_1^2) \cos^2 \theta_2}. \quad (13.7)$$

Če obrnemo enačbo (13.5), v splošnem dobimo zelo zapleteno enačbo za $\mathcal{E}_1'$, izraženo z θ_1 .

Če je $m_1 > m_2$, torej če je vpadni delec težji od tarče, potem sipalni kot θ_1 ne more preseči neke maksimalne vrednosti. S preprostimi računi lahko ugotovimo, da je ta vrednost podana z enačbo

$$\sin \theta_{1 \max} = \frac{m_2}{m_1}, \quad (13.8)$$

ki je enaka ustrezni klasični enačbi.

Enačbi (13.5)-(13.6) se poenostavita, če ima vpadni delec maso nič: $m_1 = 0$, od koder sledi $p_1 = \mathcal{E}_1$, $p'_1 = \mathcal{E}'_1$. V tem primeru zapišemo enačbo za energijo vpadnega delca po trku, izraženo s kotom odklona delca, kot

$$\mathcal{E}'_1 = \frac{m_2}{1 - \cos \theta_1 + \frac{m_2}{\mathcal{E}_1}}. \quad (13.9)$$

Vrnimo se k splošnemu primeru trka delcev s poljubnima masama. Trk najlažje obravnavamo v težiščnem sistemu T . Količine v tem sistemu označimo z dodatnim indeksom 0. Velja $\mathbf{p}_{10} = -\mathbf{p}_{20} \equiv \mathbf{p}_0$. Ker se gibalna količina ohranja, se ob trku gibalni količini delcev preprosto zasukata, ostaneta enaki po velikosti in kažeta v nasprotnih smereh. Zaradi ohranitve energije se ne spremeni niti velikost vsake izmed gibalnih količin.

Naj bo χ sipalni kot v težiščnem sistemu – to je kot, za katerega se gibalni količini $\mathbf{p}_{10}$ in $\mathbf{p}_{20}$ ob trku zasukata. Ta količina povsem določa proces sipanja v težiščnem sistemu, posledično pa tudi v vseh ostalih opazovalnih sistemih. Primerna je tudi pri opisu trka v laboratorijskem sistemu, saj jo lahko uporabimo kot edini parameter, ki ostane nedoločen po tem, ko upoštevamo ohranitev gibalne količine in energije.

Končni energiji obeh delcev v laboratorijskem sistemu bomo zapisali s tem parametrom. Vrnemo se k izrazu (13.2), le da tokrat zapišemo produkt $p_i p'^i_2$ v sistemu T :

$$p_i p'^i_2 = \mathcal{E}_{10} \mathcal{E}'_{10} - \mathbf{p}_{10} \cdot \mathbf{p}'_{10} = \mathcal{E}_{10}^2 - p_0^2 \cos \chi = p_0^2 (1 - \cos \chi) + m_1^2$$

(v sistemu T se energiji delcev ob trku ne spremenita: $\mathcal{E}'_{10} = \mathcal{E}_{10}$). Ostale produkte izračunamo v sistemu L , torej uporabimo izraze (13.4). Tako dobimo $\mathcal{E}'_1 - \mathcal{E}_1 = -(p_0^2/m_2)(1 - \cos \chi)$. Sedaj moramo p_0^2 zapisati s količinami, ki se nanašajo na sistem L . To dosežemo, če izenačimo vrednost invariante $p_i p^i_2$ v sistemih L in T :

$$\mathcal{E}_{10} \mathcal{E}_{20} - \mathbf{p}_{10} \cdot \mathbf{p}_{20} = \mathcal{E}_1 m_2,$$

ali

$$\sqrt{(p_0^2 + m_1^2)(p_0^2 + m_2^2)} = \mathcal{E}_1 m_2 - p_0^2.$$

Iz te enačbe izrazimo p_0^2 :

$$p_0^2 = \frac{m_2^2(\mathcal{E}_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 \mathcal{E}_1}. \quad (13.10)$$

Končno dobimo

$$\mathcal{E}'_1 = \mathcal{E}_1 - \frac{m_2(\mathcal{E}_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 \mathcal{E}_1} (1 - \cos \chi). \quad (13.11)$$

Energijo drugega delca dobimo iz ohranitvenega zakona: $\mathcal{E}_1 + m_2 = \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2$. Od tod sledi

$$\mathcal{E}'_2 = m_2 + \frac{m_2(\mathcal{E}_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 \mathcal{E}_1} (1 - \cos \chi). \quad (13.12)$$

Drugi člen v teh dveh enačbah je energija, ki jo izgubi prvi delec in se prenese na drugega. Največ energije se prenese, ko je $\chi = \pi$, in sicer

$$\mathcal{E}'_{2\max} - m_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}'_{1\min} = \frac{2m_1(\mathcal{E}_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathcal{E}_1}. \quad (13.13)$$

Razmerje med najmanjšo kinetično energijo vpadnega delca po trku in njegovo začetno energijo je

$$\frac{\mathcal{E}'_{1\min} - m_1}{\mathcal{E}_1 - m_1} = \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathcal{E}_1}. \quad (13.14)$$

V mejnem primeru majhnih hitrosti, ko je $\mathcal{E} \approx m + mv^2/2$, postane to razmerje konstantno:

$$\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2.$$

V limiti visokih energij $\mathcal{E}_1$ gre izraz (13.14) proti nič; količina $\mathcal{E}'_{1\min}$ gre proti konstantni limitni vrednosti, ki znaša

$$\mathcal{E}'_{1\min} = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2m_2}.$$

Predpostavimo, da je $m_2 \gg m_1$, torej da je masa vpadnega delca majhna v primerjavi z maso tarče. V klasični mehaniki lahko lažji delec prenese le majhen del svoje energije (glej *Mehanika*, §17). To pa ne velja več v relativistični mehaniki. Iz enačbe (13.14) je razvidno, da je lahko za zadosti visoke energije $\mathcal{E}_1$ delež prenesene energije blizu 1. Za to ni zadosti, da je hitrost prvega delca blizu 1, temveč mora veljati $\mathcal{E}_1 \sim m_2$: lažji delec mora torej imeti energijo, ki je istega velikostnega reda kot mirovna energija težkega delca.

Podobno velja za $m_2 \ll m_1$, ko se težek delec zaleti v lahkega. Tudi tu bi bila v klasični mehaniki prenesena energija zanemarljivo majhna. Delež prenesene energije postane občuten šele pri energijah velikostnega reda $\mathcal{E}_1 \sim m_1^2/m_2$. Vidimo, da tu ne gre preprosto za hitrosti, ki so istega reda kot svetlobna hitrost, temveč mora biti energija velika v primerjavi z m_1 : oprava imamo z ultrarelativističnim primerom.

NALOGE

NALOGA 1. Trikotnik ABC na sliki 13 je sestavljen iz vektorja gibalne količine $\mathbf{p}$ vpadnega delca in iz gibalnih količin $\mathbf{p}'_1$, $\mathbf{p}'_2$ delcev po trku. Poišči množico točk C (geometrijsko najdišče ali *locus*), ki ustrezajo vsem mogočim vrednostim $\mathbf{p}'_1$, $\mathbf{p}'_2$.

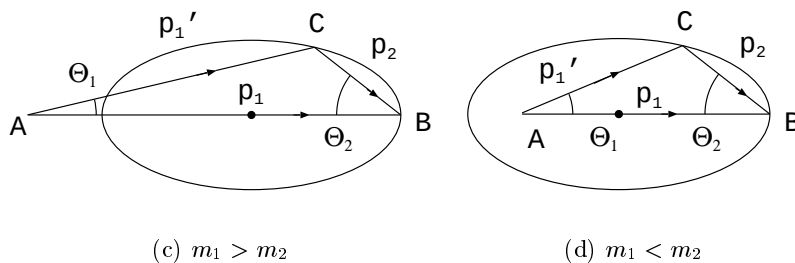
Rešitev: Iskana krivulja je elipsa, katere polos lahko določimo z uporabo rezultatov v prve naloge v § 11. V tisti nalogi je bila namreč opisana konstrukcija vektorjev $\mathbf{p}$ v laboratorijskem sistemu, ki jih dobimo iz poljubno usmerjenih vektorjev $\mathbf{p}_0$ z enako dolžino p_0 v težiščnem sistemu.

Ker so absolutne vrednosti gibalnih količin trkajočih delcev enake v težiščnem sistemu in se ob trku ne spremenijo, imamo tu oprava s podobno konstrukcijo za vektor $\mathbf{p}'_1$, za katerega je

$$p_0 \equiv p_{10} = p_{20} = \frac{m_2 V}{\sqrt{1 - V^2}}$$

v težiščnem sistemu, v katerem je V hitrost delca m_2 v težiščnem sistemu, po velikosti enak hitrosti težišča, $V = p_1/(\mathcal{E}_1 + m_2)$ [glej (11.4)]. Tako ugotovimo, da sta mala in velika polos elipse enaki

$$p_0 = \frac{m_2 p_1}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathcal{E}_1}}, \quad \frac{p_0}{\sqrt{1 - V^2}} = \frac{m_2 p_1 (\mathcal{E}_1 + m_2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathcal{E}_1}$$



[prvi izraz je seveda enak enačbi (13.10)].

Pri $\theta_1 = 0$ vektor $\mathbf{p}_1'$ sovpada z $\mathbf{p}_1$, zato je razdalja AB enaka p_1 . S primerjavo p_1 z dolžino velike polosi elipse zlahka ugotovimo, da točka A leži izven elipse, če je $m_1 > m_2$ [slika 2.3(c)], ali v njeni notranjosti, če je $m_1 < m_2$ [slika 2.3(d)].

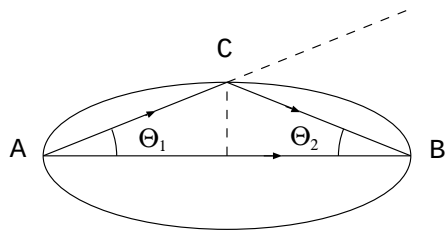
NALOGA 2. Določi najmanjši kot ločitve $\Theta_{\min}$ dveh delcev po trku, če sta masi obeh delcev enaki ($m_1 = m_2 \equiv m$).

Rešitev: Če je $m_1 = m_2$, točka A na skici leži na elipsi, najmanjši kot ločitve pa ustreza slučaju, ko točka C leži na krajišču male osi (slika 3). Iz skice je razvidno, da je $\tan(\Theta_{\min}/2)$ enak razmerju dolži polosi. Dobimo

$$\tan \frac{\Theta_{\min}}{2} = \sqrt{\frac{2m}{\mathcal{E}_1 + m}},$$

ali

$$\cos \Theta_{\min} = \frac{\mathcal{E}_1 - m}{\mathcal{E}_1 + 3m}.$$



Slika 3:

NALOGA 3. Za primer trka dveh delcev z enako maso m izrazi $\mathcal{E}'_1$, $\mathcal{E}'_2$ in χ s sipalnim kotom θ_1 v laboratorijskem sistemu.

Rešitev: Če obrnemo enačbo (13.5), dobimo

$$\mathcal{E}'_1 = m \frac{(\mathcal{E}_1 + m) + (\mathcal{E}_1 - m) \cos^2 \theta_1}{(\mathcal{E}_1 + m) - (\mathcal{E}_1 - m) \cos^2 \theta_1}, \quad \mathcal{E}'_2 = m + \frac{(\mathcal{E}_1^2 - m^2) \sin^2 \theta_1}{2m + (\mathcal{E}_1 - m) \sin^2 \theta_1}.$$

To primerjamo z izrazom za $\mathcal{E}'_1$, zapisanim kot funkcijo spremenljivke χ :

$$\mathcal{E}'_1 = \mathcal{E}_1 - \frac{\mathcal{E}_1 - m}{2}(1 - \cos \chi),$$

in dobimo sipalni kot v težiščnem sistemu

$$\cos \chi = \frac{2m - (\mathcal{E}_1 + 3m) \sin^2 \theta_1}{2m + (\mathcal{E}_1 - m) \sin^2 \theta_1}.$$

§14 Vrtilna količina

Že iz klasične mehanike vemo, da se v izoliranem sistemu poleg energije in gibalne količine ohranja tudi vrtilna količina, torej vektor

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$

kjer sta $\mathbf{r}$ in $\mathbf{p}$ krajevni vektor in gibalna količina delca; seštevamo po vseh delcih, iz katerih je sestavljen sistem. Ohranitev vrtilne količine je posledica tega, da se zaradi izotropnosti prostora Lagrangeva funkcija izoliranega sistema na spremeni, če sistem zasukamo kot celoto.

Če podobno izpeljavo ponovimo v štiridimenzionalni obliki, dobimo relativistični izraz za vrtilno količino. Z x^i označimo koordinate enega izmed delcev sistema. Opravimo štiridimenzionalen zasuk v četvernem prostoru. Pri tem koordinate x^i dobijo nove vrednosti x'^i . Veljati mora, da so razlike $x'^i - x^i$ linearne funkcije

$$x'^i - x^i = x_k \delta\Omega^{ik} \quad (14.1)$$

z infinitezimalnimi koeficienti $\delta\Omega^{ik}$. Komponente tenzorja $\delta\Omega_{ik}$ so med seboj povezane z zvezami, ki so posledica tega, da se ob zasuku krajevni vektor ne spremeni, zato mora veljati $x'_i x'^i = x_i x^i$. Vstavimo x'^i iz (14.1) in zanemarimo člen, ki je kvadraten po $\delta\Omega_{ik}$, saj je višjega reda. Dobimo

$$x^i x^k \delta\Omega_{ik} = 0.$$

Ta enačba mora veljati za poljuben x^i . Ker je $x^i x^k$ simetrični tenzor, mora biti $\delta\Omega_{ik}$ antisimetrični tenzor (ker je zmnožek simetričnega in antisimetričnega tenzorja očitno identično enak nič). Zapišemo lahko torej

$$\delta\Omega_{ki} = -\delta\Omega_{ik}. \quad (14.2)$$

Ob infinitezimalni spremembi koordinat začetne točke a in končne točke b na trajektoriji se akcija spremeni za (glej (9.11)):

$$\delta S = - \sum p^i \delta x_i|_a^b$$

(seštevamo po vseh telesih v sistemu). Pri zasukih, ki jih sedaj obravnavamo, je $\delta x_i = \delta\Omega_{ik} x^k$, zato je

$$\delta S = -\delta\Omega_{ik} \sum p^i x^k|_a^b.$$

Če tenzor $\sum p^i x^k$ razcepimo na simetrični in antisimetrični del, potem prvi prispevek (pomnožen z antisimetričnim tenzorjem) h končnemu rezultatu ne prispeva. Z antisimetričnim delom pa lahko zapišemo prejšnjo enakost v obliki

$$\delta S = -\delta\Omega_{ik} \frac{1}{2} \sum (p^i x^k - p^k x^i)|_a^b. \quad (14.3)$$

V izoliranem sistemu je akcija invarianta in se ob četvernem zasuku ne spremeni. Koeficient količine Ω_{ik} v izrazu (14.3) mora zato biti enak nič:

$$\sum (p^k x^k - p^k x^i)_b = \sum (p^i x^k - p^k x^i)_a.$$

Od tod sledi, da se v izoliranem sistemu tenzor

$$M^{ik} = \sum (x^i p^k - x^k p^i) \quad (14.4)$$

ohranja. Ta antisimetrični tenzor se imenuje *četrtni tenzor vrtilne količine* (angl. *four-tensor of angular momentum*). Prostorske komponente tega tenzorja so enake komponentam vektorja tridimenzionalne vrtilne količine $\mathbf{M} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{p}$:

$$M^{23} = M_x, \quad -M^{13} = M_y, \quad M^{12} = M_z.$$

Komponente M^{01}, M^{02}, M^{03} tvorijo vektor $\sum(t\mathbf{p} - \mathcal{E}\mathbf{r}/c^2)$. Komponente tenzorja M^{ik} lahko torej zapišemo kot

$$M^{ik} = \left[c \sum \left(t\mathbf{p} - \frac{\mathcal{E}\mathbf{r}}{c^2} \right), -\mathbf{M} \right]. \quad (14.5)$$

(Primerjaj z (6.10).)

Ker se v izoliranem sistemu M^{ik} ohranja, med drugim velja

$$\sum \left(t\mathbf{p} - \frac{\mathcal{E}\mathbf{r}}{c^2} \right) = \text{konst.}$$

Ker se ohranja tudi celotna energija $\mathcal{E}$, lahko to enačbo zapišemo v obliki

$$\frac{\sum \mathcal{E}\mathbf{r}}{\sum \mathcal{E}} - \frac{c^2 \sum \mathbf{p}}{\sum \mathcal{E}} t = \text{konst.}$$

(Količine, ki se nanašajo na različne delce, so v enačbi upoštevane ob istem času t).

Od tod sledi, da se krajevni vektor

$$\mathbf{R} = \frac{\sum \mathcal{E}\mathbf{r}}{\sum \mathcal{E}} \quad (14.6)$$

premika enakomerno s hitrostjo

$$\mathbf{V} = \frac{c^2 \sum \mathbf{p}}{\sum \mathcal{E}}, \quad (14.7)$$

ki je natanko enaka hitrosti gibanja sistema kot celote. [Ta hitrost povezuje celotno energijo in celotno gibalno količino v skladu z enačbo (9.8).] Enačba (14.6) je relativistična definicija koordinat *težišča* (angl. *center of inertia*) sistema. Če so hitrosti vseh delcev majhne v primerjavi z c , potem približno velja $\mathcal{E} \approx mc^2$ in iz (14.6) dobimo običajen klasični izraz

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m\mathbf{r}}{\sum m}.$$

*

Komponente vektorja (14.6) niso prostorske komponente nobenega četverca in se zato ob transformaciji opazovalnega sistema na transformirajo kot koordinate točke. Zato v različnih opazovalnih sistemih ležijo težišča sistema v različnih točkah.

NALOGA

*Medtem ko klasična enačba za težišče velja tako za interagirajoče kot za neinteragirajoče delce, enačba (14.6) velja le, če interakcije zanemarimo. V relativistični mehaniki moramo težišče sistema interagirajočih delcev definirati tako, da eksplicitno vključimo gibalno količino in energijo polja, ki ga delci proizvajajo.

NALOGA Poišči povezavo med vrtilno količino $\mathbf{M}$ telesa (sistema delcev) v opazovalnem sistemu K , v katerem se telo giblje s hitrostjo $\mathbf{V}$, in njegovo vrtilno količino $\mathbf{M}^{(0)}$ v opazovalnem sistemu K_0 , v katerem telo kot celota miruje; v obeh primerih naj bo gibalna količina definirana glede na isto točko – težišče telesa v sistemu K_0 . *ralca naj spomnimo, da čeprav je v sistemu K_0 (kjer velja $\sum \mathbf{p} = 0$) vrtilna količina neodvisna od izbire točke, glede na katero jo definiramo, to ne velja za sistem K (kjer je $\sum \mathbf{p} \neq 0$), saj je v tem primeru vrtilna količina odvisna od te izbire (glej *Mehanika*, § 9).

Rešitev: Sistem K_0 se giblje glede na sistem K s hitrostjo $\mathbf{V}$; naj ta hitrost kaže vzdolž osi X . Iskane komponente M^{ik} se transformirajo po enačbah (glej drugo nalogo v § 6):

$$M^{12} = \frac{M^{(0)12} + \frac{V}{c}M^{(0)02}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad M^{13} = \frac{M^{(0)13} + \frac{V}{c}M^{(0)03}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad M^{23} = M^{(0)23}.$$

Ker smo izhodišče postavili v težišču telesa (v sistemu K_0), v tem sistemu velja $\sum \mathbf{r} = 0$. Ker poleg tega v tem sistemu velja še $\sum \mathbf{p} = 0$, dobimo $M^{(0)02} = M^{(0)03} = 0$. Z uporabo povezave med komponentami M^{ik} in vektorjem $\mathbf{M}$, za slednjega dobimo

$$M_x = M_x^{(0)}, \quad M_y = \frac{M_y^{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad M_z = \frac{M_z^{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

*B

Poglavje 3

Naboji v elektromagnetnih poljih

§15 Osnovni delci v teoriji relativnosti

Interakcije med delci lahko opišemo s pomočjo *polja* sile. Namesto da bi rekli, da delec deluje na drug delec, raje rečemo, da delec okoli sebe ustvari polje; določena sila potem deluje na vsak drug delec, ki se v tem polju nahaja. V klasični mehaniki je polje le uporaben način opisa interakcije med delci. V teoriji relativnosti pa ima zaradi končne hitrosti širjenja interakcij ta pojem veliko globlji pomen. Sile, ki delujejo na delec ob danem trenutku niso določene s položaji ostalih delcev ob istem trenutku. Sprememba položaja enega izmed delcev bo imela vpliv na druge delce šele po nekem časovnem intervalu. To pomeni, da je polje del fizikalne realnosti in ne le način opisovanja. V relativistični mehaniki ne smemo govoriti o neposredni interakciji med delci, ki so med seboj oddaljeni. Do interakcij lahko ob nekem trenutku pride le med dvema “soseščima” točkama v prostoru: interakcije so dotikalne (kontaktne). Smiselno lahko govorimo le o interakciji nekega delca s poljem in o posledični interakciji polja z drugim delcem.

Obravnavali bomo dve vrsti polj, gravitacijska in elektromagnetna. Gravitacijska polja si bomo ogledali v poglavjih od 10 do 14, ostala poglavja pa so posvečena elektromagnetnim poljem.

Preden si ogledamo interakcije delcev z elektromagnetnim poljem, bomo na kratko spregovorili o pojmu “delca” v relativistični mehaniki.

V klasični mehaniki lahko vpeljemo pojem togega telesa, ki se pod nobenim pogojem ne deformira. V teoriji relativnosti bi lahko kot toga smatrali tista telesa, ki se ne spreminjajo v opazovalnem sistemu, v katerem mirujejo. Hitro pa se lahko prepričamo, da je zaradi zakonov relativistične mehanike obstoj takšnih teles v splošnem nemogoč.

Predstavljajmo si na primer okrogel disk, ki se vrti okoli svoje osi, in predpostavimo, da je tog. Opazovalni sistem, v katerem disk miruje, vsekakor ni inercialen. Za vsak infinitezimalen sestavni del diska pa lahko vpeljemo inercialen sistem, v katerem ta del ob danem trenutku miruje; za različne sestavne dele diska, ki imajo različne hitrosti, bodo tudi ti sistemi različni. Oglejmo si infinitezimalne odseke ločne dolžine, ki ležijo v smeri izbranega krajevnega vektorja. Ker je disk tog, bo dolžina vsakega izmed teh odsekov (v ustreznem inercialnem opazovalnem sistemu) enaka dolžini, ki bi jo odsek imel v mirujočem disku. Isto dolžino bi izmeril tudi opazovalec, ki miruje, in mimo katerega bi se izbran odsek gibal ob danem trenutku, saj je vsak odsek pravokoten na svojo hitrost in zato ni podvržen Lorentzevem skrčenju. Zato je celotna dolžina polmera diska, kot jo izmeri mirujoči opazovalec, enaka kot

bi bila pri mirujočem disku. Po drugi strani pa je dolžina vsakega infinitezimalno kratkega odseka v smeri obsega diska podvržena Lorentzevi skrčitvi, zato je dolžina celotnega obsega (kot jo izmeri mirujoči opazovalec in ki je enaka vsoti dolžin vseh odsekov) manjša, ko je dolžina obsega mirujočega diska. Pridemo do zaključka, da se mora zaradi vrtenja diska spremeniti razmerje med obsegom in polmerom (kot ga izmeri mirujoči opazovalec), in to ni več enako 2π . Ta rezultat je nesmiseln, kar pomeni, da disk dejansko ne more biti tog in da je pri vrtenju pride do kompleksne deformacije, ki je odvisna od elastičnih lastnosti materiala, in katerega je disk narejen.

Da toga telesa ne morejo obstajati, lahko pokažemo tudi drugače. Predpostavimo, da tego telo spravimo v gibanje z delovanjem zunanje sile, ki prijemlje v eni sami točki. Če bi telo bilo tego, bi se vse točke začele gibati istočasno kot točka, v kateri sila deluje; v nasprotnem primeru bi se telo deformiralo. Zaradi teorije relativnosti pa to ni mogoče, ker se sila v neki točki prenese na ostale s končno hitrostjo, zato se ne morejo vse točke začeti gibati ob istem času.

Od tod lahko potegnemo več sklepov o “osnovnih” delcih, to so takšni delci, katerih stanje lahko povsem opišemo, če podamo njihove tri koordinate in tri komponente hitrosti njihovega gibanja kot celote. Očitno je, da če bi osnovni delec imel končno razsežnost v prostoru, ne bi smel biti deformabilen, saj je pojem deformabilnosti povezan z možnostjo neodvisnega gibanja posameznih delov telesa. Vendar pa smo ugotovili, da je v teoriji relativnosti obstoj togih teles nemogoč.

Zaključimo torej, da v klasični (nekvantni) relativistični mehaniki osnovnim delcem ne moremo pripisati končne razsežnosti. Z drugimi besedami, v okviru klasične teorije moramo osnovne delce smatrati kot točkaste. *

§16 Četverni potencial polja

Za delec, ki se giblje v vnaprej podanem elektromagnetnem polju, je akcija sestavljena iz dveh prispevkov: iz akcije (8.1) za prosti delec in iz člena, ki opisuje interakcijo delca s poljem. Slednji člen mora vsebovati količine, ki opisujejo delec, in količine, ki opisujejo polje.

Izkaže se [†]aslednje trditve moramo smatrati v določeni meri kot posledice eksperimentalnih podatkov. Oblike akcije za delec v elektromagnetnem polju ne moremo določiti na osnovi splošnih razmislekov (kot je na primer zahteva o relativistični invariantnosti). Ti bi v enačbi (16.1) dopuščali člene oblike $\int A ds$, kjer je A skalarna funkcija.

Da ne bo nesporazuma, naj ponovimo, da se tu ukvarjamo s klasično (in ne kvantno) teorijo, zato se ne oziramo na pojave, ki so povezani z lastno vrtilno količino delcev (spinom). , da so lastnosti delca pri njegovih interakcijah z elektromagnetnim poljem povsem določene z enim samim parametrom, *nabojem* delca e . Naboj je lahko pozitiven, negativen ali pa enak nič. Lastnosti polja so opisane s četvercem A_i , *četvernim potencialom* (angl. *four-potential*), katerega koordinate so funkcije koordinat in časa. Te količine se v akciji pojavljajo v obliki

$$-\frac{e}{c} \int_a^b A_i dx^i,$$

kjer moramo vrednosti funkcije A_i vzeti v točkah na svetovnici delca. Faktor $1/c$ smo vpeljali zaradi prikladnosti. Poudariti moramo, da vse dokler nimamo enačb, ki povezujejo naboj ali

*Kvantna mehanika to močno spremeni, vendar je tudi v tem primeru izjemno težko vpeljati karkoli drugega kot točkovne interakcije.

[†]N

potenciale z že poznanimi količinami, smemo enote za merjenje teh novih količin poljubno izbrati. *

Akcija za naboj v elektromagnetnem polju je zato

$$S = \int_a^b \left(-mc \, ds - \frac{e}{c} A_i \, dx^i \right). \quad (16.1)$$

Prostorske komponente četvernega potenciala A^i tvorijo tridimenzionalni vektor $\mathbf{A}$, ki se imenuje *vektorski potencial* polja. Časovna komponenta se imenuje *skalarni potencial*; označimo ga z $A^0 = \phi$. Zato je

$$A^i = (\phi, \mathbf{A}). \quad (16.2)$$

Integral akcije lahko zapišemo v obliki

$$S = \int_a^b \left(-mc \, ds + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} - e\phi \, dt \right).$$

Vpeljemo $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ in pretvorimo integrand tako, da so vsi integrali izračunani po času t :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi \right) dt. \quad (16.3)$$

Integrand je kar Lagrangeva funkcija za delec v elektromagnetnem polju

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi. \quad (16.4)$$

Ta funkcija se loči od Lagrangeve funkcije za prosti delec (8.2) po tem, da vsebuje člena $(e/c)\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi$, ki opisujeta interakcijo naboja s poljem.

Odvod $\partial L / \partial \mathbf{v}$ je kanonični moment (angl. *generalized momentum*) delca; označimo ga z $\mathbf{P}$. Če odvod izračunamo, dobimo

$$\mathbf{P} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}. \quad (16.5)$$

Tu smo z $\mathbf{p}$ označili gibalno količino (angl. *ordinary momentum*) delca.

Iz Lagrangeve funkcije lahko izračunamo Hamiltonovo funkcijo delca v polju s pomočjo splošne enačbe

$$\mathcal{H} = \mathbf{v} \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L.$$

Vstavimo (16.4) in dobimo

$$\mathcal{H} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\phi. \quad (16.6)$$

Vendar pa moramo Hamiltonovo funkcijo zapisati kot funkcijo kanoničnega momenta delca, in ne kot funkcijo hitrosti.

*O izbiri enot je govora v §27.

Iz (16.5) in (16.6) je razvidno, da je zveza med $\mathcal{H} - e\phi$ in $\mathbf{P} - (e/c)\mathbf{A}$ enaka, kot zveza med $\mathcal{H}$ in $\mathbf{p}$ v odsotnosti polja, torej

$$\left(\frac{\mathcal{H} - e\phi}{c}\right)^2 = m^2 c^2 + \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2, \quad (16.7)$$

ali

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2} + e\phi. \quad (16.8)$$

Pri nizkih hitrostih, torej v klasični mehaniki, Lagrangeva funkcija (16.4) postane

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi. \quad (16.9)$$

V tem približku je

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A},$$

in dobimo naslednji izraz za Hamiltonovo funkcijo

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\phi. \quad (16.10)$$

Končno zapišimo še Hamilton-Jacobijevo enačbo za delec v elektromagnetnem polju. Dobimo jo, če v enačbi, ki določa Hamiltonovo funkcijo, nadomestimo $\mathbf{P}$ z $\partial S/\partial \mathbf{r}$ in $\mathcal{H}$ z $-(\partial S/\partial t)$. Tako iz (16.7) dobimo

$$\left(\nabla S - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\phi\right)^2 + m^2 c^2 = 0. \quad (16.11)$$

§17 Gibalne enačbe delca v polju

Na naboj v polju deluje sila polja, sočasno pa tudi delec deluje na polje in ga spreminja. Vendarle, če naboj e ni velik, lahko vpliv naboja na polje zanemarimo. V tem primeru obravnavamo gibanje delca v vnaprej podanem polju in predpostavimo, da polje samo ni odvisno od koordinat ali hitrosti naboja. Natančne pogoje, ki jim mora naboj zadostiti, da ga lahko smatramo kot zadosti majhnega, bomo opisali kasneje (glej §75). V nadaljevanju bomo privzeli, da so ti pogoji izpolnjeni.

Poiskati moramo torej gibalne enačbe naboja v podanem elektromagnetnem polju. Te enačbe dobimo z variiranjem akcije, zato so enake Lagrangevim enačbam

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}, \quad (17.1)$$

kjer je L podan z enačbo (16.4).

Odvod $\partial L/\partial \mathbf{v}$ je moment iz enačbe (16.5). Desno stran enačbe (17.1) zapišemo kot

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \nabla L = \frac{e}{c} \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - e \nabla \phi.$$

Uporabimo enačbo iz vektorske analize

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}),$$

kjer sta $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ poljubna vektorja. To pravilo uporabimo za količino $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$ in upoštevamo, da moramo po $\mathbf{r}$ odvajati pri konstantni hitrosti. Tako dobimo

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{e}{c}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - e\nabla\phi. \quad (17.2)$$

Lagrangevo enačbo lahko torej zapišemo v obliki

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A} \right) = \frac{e}{c}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - e\nabla\phi.$$

Totalni diferencial $(d\mathbf{A}/dt)dt$ je sestavljen iz dveh prispevkov: iz spremembe vektorskega potenciala po času v fiksni točki prostora, $(\partial\mathbf{A}/\partial t)dt$, in iz spremembe zaradi premika iz ene točke prostora v drugo, oddaljeno za $d\mathbf{r}$. Ta prispevek je enak $(d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{A}$. Dobimo torej

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}.$$

To vstavimo v prejšnji izraz in končno dobimo

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{e}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - e\nabla\phi + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (17.3)$$

To je gibalna enačba delca v elektromagnetnem polju. Na levi strani stoji odvod gibalne količine delca po času. Zato je izraz na desni strani enačbe (17.3) sila, ki deluje na naboj v elektromagnetnem polju. Sila je sestavljena iz dveh prispevkov. Prvi (prvi in drugi člen v enačbi 17.3) ni odvisen od hitrosti delca, drugi prispevek (tretji člen) pa je odvisen od hitrosti, in sicer je sorazmeren s hitrostjo in kaže v pravokotni smeri nanjo.

Sila prve vrste, preračunana na enoto naboja, se imenuje *jakost električnega polja* (angl. *electric field intensity*); označimo jo z $\mathbf{E}$. Po definiciji je torej

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi. \quad (17.4)$$

Faktor, ki je pomnožen z $\mathbf{v}/c$ pri sili druge vrste, se imenuje *jakost magnetnega polja* (angl. *magnetic field intensity*). Označimo jo z $\mathbf{H}$. Po definiciji je torej

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (17.5)$$

Če je v elektromagnetnem polju $\mathbf{E} \neq 0$, vendar $\mathbf{H} = 0$, potem imamo opravka z električnim poljem; če je $\mathbf{E} = 0$ in $\mathbf{H} \neq 0$, pa je to magnetno polje. V splošnem je elektromagnetno polje superpozicija električnega in magnetnega polja.

Omenimo naj še, da je $\mathbf{E}$ polarni vektor, $\mathbf{H}$ pa aksialni.

Gibalno enačbo za naboj v elektromagnetnem polju lahko sedaj zapišemo kot

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}. \quad (17.6)$$

Izraz na desni se imenuje *Lorentzeva sila*. Prvi člen (sila, s katero na naboj deluje električno polje) ni odvisen od hitrosti naboja, in kaže v smeri polja $\mathbf{E}$. Drugi člen (sila, s katero na naboj deluje magnetno polje) je sorazmeren s hitrostjo in kaže v smeri, ki je pravokotna na hitrost in na magnetno polje $\mathbf{H}$.

Pri hitrostih, ki so majhne v primerjavi s svetlobno, je gibalna količina $\mathbf{p}$ približno enaka klasičnemu izrazu $m\mathbf{v}$, in gibalno enačbo (17.6) lahko zapišemo v obliki

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}. \quad (17.7)$$

Sedaj bomo izpeljali enačbo za hitrost spreminjanja kinetične energije delca *, torej odvod

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{kin}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

Hitro se lahko prepričamo, da je

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{kin}}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Vstavimo $d\mathbf{p}/dt$ iz (17.6) in upoštevamo, da je $\mathbf{v} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{v} = 0$, pa dobimo

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{kin}}}{dt} = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}. \quad (17.8)$$

Hitrost spreminjanja kinetične energije je enaka delu, ki ga opravi polje nad delcem na enoto časa. Iz (17.8) je razvidno, da je to delo enako zmnožku hitrosti in sile, s katero električno polje deluje na delec. Delo, ki ga polje opravi v času dt , torej ob premiku naboja za razdaljo $d\mathbf{r}$, je očitno enako $e\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$.

Poudariti moramo, da na naboje opravlja delo le električno polje; magnetno polje ne opravi nič dela nad nabojem, ki se v njem giblje. To je posledica dejstva, da je sila, s katero magnetno polje deluje na delec, vedno pravokotna na hitrost delca.

Enačbe mehanike se invariantne proti spremembi smeri časa, torej na zamenjavo prihodnosti in preteklosti. Drugače povedano, mehanika je enaka v obeh časovnih smereh: če je neko gibanje po zakonih mehanike mogoče, potem je mogoče tudi obrnjeno gibanje, pri katerem gre sistem skozi enaka stanja v obratnem vrstnem redu.

Hitro lahko preverimo, da to velja tudi za elektromagnetno polje v teoriji relativnosti. V tem primeru pa moramo poleg zamenjave $t \rightarrow -t$ spremeniti tudi predznak magnetnega polja. Vidimo, da se gibalne enačbe (17.6) ne spremenijo, če naredimo zamenjavo

$$t \rightarrow -t, \quad \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{H}. \quad (17.9)$$

Iz (17.4) in (17.5) sledi, da se ob tem skalarni potencial ne spremeni, vektorski potencial pa spremeni predznak:

$$\phi \rightarrow \phi, \quad \mathbf{A} \rightarrow -\mathbf{A}. \quad (17.10)$$

Če je možno neko gibanje v elektromagnetnem polju, potem je možno tudi obrnejo gibanje v polju, pri katerem je obrnjena smer polja $\mathbf{H}$.

NALOGA

NALOGA Izrazi pospešek delca z njegovo hitrostjo, ter z jakostma električnega in magnetnega polja.

Rešitev: V gibalno enačbo (17.6) vstavimo $\mathbf{p} = \mathbf{v}\mathcal{E}_{\text{kin}}/c^2$ in uporabimo izraz (17.8) za $d\mathcal{E}_{\text{kin}}/dt$. Dobimo

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \right).$$

* S "kinetično" energijo dejansko mislimo energijo (9.4), ki vsebuje tudi mirovno energijo.

§18 Umeritvena invarianca

Oglejmo si, do kakšne mere sta potenciala enolično določena. Najprej poudarimo to, da je polje opredeljeno z njegovim učinkom na gibanje nabojev, ki se nahajajo v njem. V gibalni enačbi (17.6) ne nastopata potenciala, temveč jakosti polja $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$. Zato sta dve polji fizikalno enaki, če sta opisani z enakima vektorjema $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$.

Če sta potenciala ϕ in $\mathbf{A}$ vnaprej podana, poten sta polji $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ enolično določeni preko zvez (17.4) in (17.5). Vseeno pa lahko enakemu polju ustrezajo različni potenciali. To dokažemo tako, da vsaki komponenti potenciala dodamo količino $-\partial f/\partial x^k$, kjer je f poljubna funkcija koordinat in časa. Potencial A_k torej postane

$$A'_k = A_k - \frac{\partial f}{\partial x^k}. \quad (18.1)$$

Zaradi te spremembe se v integralu akcije (16.1) pojavi dodatni člen

$$\frac{e}{c} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k = d\left(\frac{e}{c} f\right), \quad (18.2)$$

ki je totalni diferencial in zato ne vpliva na gibalno enačbo (glej *Mehanika*, §2).

Če namesto četverca potenciala ločeno zapišemo skalarni in vektorski potencial, namesto x^i pa koordinate ct, x, y, z , poten lahko štiri enačbe (18.1) zapišemo v obliki

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f, \quad \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (18.3)$$

Hitro se lahko prepričamo, da se električno in magnetno polje, določena z enačbama (17.4) in (17.5), dejansko ne spremenita, če zamenjamo $\mathbf{A}$ in ϕ z $\mathbf{A}'$ in ϕ' iz (18.3). Zato transformacija (18.1) ne spremeni elektromagnetnega polja. Potenciala nista enolično določena; vektorski je določen do gradienta poljubne funkcije natančno, skalarni pa do časovnega odvoda iste funkcije natančno.

Vidimo, da lahko na primer prištejemo poljuben konstanten vektor k vektorskemu potencialu in poljubno konstanto k skalarnemu potencialu. To je razvidno iz dejstva, da definiciji polj $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ vsebujeta le odvode potencialov $\mathbf{A}$ in ϕ , zato dodatne konstante ne vplivajo na jakosti polja.

Fizikalni pomen imajo samo tiste količine, ki so invariantne proti transformaciji potencialov (18.3); zato morajo biti proti tej transformaciji invariantne vse enačbe. Ta invarianca se imenuje *umeritvena invarianca* (angl. *gauge invariance*, nem. *eichinvarianz*). *

Ker potenciali niso enolični, imamo na voljo svobodno izbiro, s katero lahko zahtevamo, da potenciali zadostijo enemu dodatnemu pogoju. Poudariti moramo, da si lahko izberemo en dodatni pogoj, ker si lahko poljubno izberemo eno funkcijo f v (18.3). Vedno si lahko potenciala izberemo tako, da je skalarni potencial ϕ enak nič. Če vektorski potencial ni enak nič, potem ga v splošnem ne moremo postaviti na nič, saj pogoj $\mathbf{A} = 0$ predstavlja tri dodatne pogoje (za tri komponente vektorja $\mathbf{A}$).

§19 Nespremenljivo elektromagnetno polje

Nespremenljivo elektromagnetno polje je takšno polje, ki se ne spreminja s časom. Očitno si lahko potenciala nespremenljivega polja izberemo tako, da sta ta odvisna le od koordinate,

* Poudariti moramo, da je invarianca povezana s podmeno, da je naboja e v enačbi (18.2) konstanten. Zato sta umeritvena invarianca enačb elektrodinamike in ohranitev naboja tesno povezani.

ne pa od časa. Nespremenljivo magnetno polje je kot prej enako $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$. Nespremenljivo električno polje pa je enako

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi. \quad (19.1)$$

Nespremenljivo električno polje je torej določeno izključno s skalarnim potencialom, nespremenljivo magnetno polje pa izključno z vektorskim potencialom.

V prejšnjem razdelku smo pokazali, da potenciala nista enolično določena. Vendar pa se lahko hitro prepričamo, da če opišemo elektromagnetno polje s potencialoma, ki nista časovno odvisna, potem lahko k skalarnemu potencialu dodamo le poljubno konstanto (ki ni odvisna od koordinat ali časa), ne da bi s tem spremenili polje. Običajno si ϕ izberemo tako, da ima določeno vrednost v neki točki v prostoru; najbolj pogosto si ničlo potenciala ϕ izberemo v neskončnosti. Tedaj je predhodno omenjena poljubna konstanta določena in skalarni potencial polja je enolično določen.

Po drugi strani pa podobno kot prej vektorski potencial ni enolično določen niti pri nespremenljivem elektromagnetnem polju; prištejemo mu namreč lahko gradient poljubne funkcije koordinat.

Izračunajmo energijo naboja v nespremenljivem elektromagnetnem polju. Če je polje nespremenljivo, potem tudi Lagrangeva funkcija ni eksplicitno odvisna od časa. Kot že vemo, se v tem primeru energija ohranja in je po vrednosti enaka Hamiltonovi funkciji.

Po (16.6) velja

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\phi. \quad (19.2)$$

Zaradi prisotnosti polja se v izrazu za energijo pojavi dodatni člen $e\phi$, ki predstavlja potencialno energijo naboja v polju. Poudariti moramo dejstvo, da je energija odvisna le od skalarnega potenciala, ne pa od vektorskega. To pomeni, da magnetno polje ne vpliva na energijo delca. Energijo delca lahko spremeni le električno polje. To je povezano s tem, da lahko na naboj opravi delo le električno polje, ne pa tudi magnetno.

Če je jakost polja enaka v vseh točkah prostora, potem takšno polje imenujemo enakomerno (homogeno). Skalarni potencial homogenega električnega polja lahko zapišemo z jakostjo polja v obliki

$$\phi = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}. \quad (19.3)$$

Ker je $\mathbf{E} = \text{konst}$, velja $\nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}) = (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \mathbf{E}$.

Vektorski potencial homogenega magnetnega polja lahko zapišemo z jakostjo polja v obliki

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{H} \times \mathbf{r}. \quad (19.4)$$

Ker je $\mathbf{H} = \text{konst}$, lahko s pomočjo enačb, ki jih poznamo iz vektorske analize, pokažemo, da velja

$$\nabla \times (\mathbf{H} \times \mathbf{r}) = \mathbf{H}\nabla \cdot \mathbf{r} - (\mathbf{H} \cdot \nabla)\mathbf{r} = 2\mathbf{H}$$

(pri tem upoštevamo, da je $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$).

Vektorski potencial homogenega polja lahko zapišemo tudi kot

$$A_x = -Hy, \quad A_y = A_z = 0. \quad (19.5)$$

(os z je v smeri polja H). Preprosto lahko preverimo, da tudi pri tej izbiri potenciala $\mathbf{A}$ velja $H = \nabla \times \mathbf{A}$. V skladu s transformacijskim pravilom (18.3), se potenciala (19.4) in (19.5)

med seboj razlikujeta za gradient neke funkcije: enačbo (19.5) dobimo iz enačbe (19.4), če prištejemo ∇f , kjer je $f = -xyH/2$.

NALOGA

NALOGA Zapiši variacijsko načelo za tir delca (Maupertuisovo načelo) v nespremenljivem elektromagnetnem polju v okviru relativistične mehanike.

Rešitev: Maupertuisovo načelo je trditev, da če se energija delca ohranja (gibanje v nespremenljivem polju), lahko tir določimo iz variacijske enačbe

$$\delta \int \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

kjer je $\mathbf{P}$ posplošena gibalna količina delca, izražena z energijo in diferenciali koordinat, integrirati pa moramo po tiru delca. *lej *Mehanika*, § 44. Vstavimo $\mathbf{P} = \mathbf{p} + (e/c)\mathbf{A}$ in upoštevamo, da smeri $\mathbf{p}$ in $d\mathbf{r}$ sovpadata. Dobimo

$$\delta \int \left(p dl + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \right) = 0,$$

kjer je $dl = \sqrt{d\mathbf{r}^2}$ diferencial ločne dolžine. Iz enačbe

$$p^2 + m^2 c^2 = \left(\frac{\mathcal{E} - e\phi}{c} \right)^2$$

določimo p in končno dobimo

$$\delta \int \left[\sqrt{\left(\frac{\mathcal{E} - e\phi}{c} \right)^2 - m^2 c^2} dl + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \right] = 0.$$

§20 Gibanje v nespremenljivem homogenem električnem polju

Oglejmo si gibanje naboja e v nespremenljivem homogenem električnem polju $\mathbf{E}$. Polje naj kaže v smeri osi X . Delec se očitno giblje v ravnini. Ta ravnina naj bo XY . Gibalne enačbe (17.6) postanejo

$$\dot{p}_x = eE, \quad \dot{p}_y = 0$$

(s piko označujemo odvajanje po t), tako da je

$$p_x = eEt, \quad p_y = p_0. \quad (20.1)$$

Izhodišče za merjenje časa si izberemo v trenutku, ko je $p_x = 0$; p_0 je gibalna količina delca v tistem trenutku.

Kinetična energija delca (energija brez potencialne energije delca v polju) je $\mathcal{E}_{\text{kin}} = c\sqrt{m^2 c^2 + p^2}$. Vstavimo (20.1) in dobimo

$$\mathcal{E}_{\text{kin}} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_0^2 + (ceEt)^2} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}, \quad (20.2)$$

*G

kjer je $\mathcal{E}_0$ energija ob času $t = 0$.

Po (9.8) je hitrost delca enaka $\mathbf{v} = \mathbf{p}c^2/\mathcal{E}_{\text{kin}}$. Hitrost $v_x = \dot{x}$ je torej

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_x c^2}{\mathcal{E}_{\text{kin}}} = \frac{c^2 e E t}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}}.$$

Izraz integriramo in dobimo

$$x = \frac{1}{eE} \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}. \quad (20.3)$$

Integracijsko konstanto postavimo na nič. *

Koordinato y določimo tako, da upoštevamo

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p_y c^2}{\mathcal{E}_{\text{kin}}} = \frac{p_0 c^2}{\sqrt{(\mathcal{E}_0)^2 + (ceEt)^2}},$$

od koder dobimo

$$y = \frac{p_0 c}{eE} \sinh^{-1} \left(\frac{ceEt}{\mathcal{E}_0} \right). \quad (20.4)$$

Enačbo trajektorije dobimo, če t izrazimo z y iz (20.4) in to vstavimo v (20.3). Tako dobimo

$$x = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \cosh \frac{eEy}{p_0 c}. \quad (20.5)$$

V homogenem električnem polju se naboj torej giblje po verižnici.

Če je hitrost delca $v \ll c$, potem velja $p_0 = mv_0$, $\mathcal{E}_0 = mc^2$, izraz (20.5) pa lahko razvijemo po potencah $1/c$. Če obdržimo le člene najvišjega reda dobimo

$$x = \frac{eE}{2mv_0^2} y^2 + \text{konst},$$

in ugotovimo, da se delec giblje po paraboli, kar je dobro poznan rezultat iz klasične mehanike.

§21 Gibanje v nespremenljivem homogenem magnetnem polju

Obravnavajmo gibanje naboja e v homogenem magnetnem polju $\mathbf{H}$. Polje naj kaže v smeri osi Z . Gibalno enačbo

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}$$

zapišemo v drugačni obliki, tako da vanjo vstavimo gibalno količino iz enačbe (9.8)

$$\mathbf{p} = \frac{\mathcal{E} \mathbf{v}}{c^2},$$

*Ta rezultat (za $p_0 = 0$) je enak rešitvi nalogi relativističnega gibanja s konstantnim "lastnim pospeškom" $w_0 = eE/m$ (glej nalogo v §7). Pri gibanju v električnem polju je konstantnost pospeška povezana s tem, da električno polje ne spremeni Lorentzevih transformacij, katerih hitrost V je v smeri polja (glej §24).

kjer je $\mathcal{E}$ energija delca, ki je v magnetnem polju konstantna. Enačba gibanje je torej

$$\frac{\mathcal{E}}{c^2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}, \quad (21.1)$$

ali po komponentah:

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega v_x, \quad \dot{v}_z = 0, \quad (21.2)$$

kjer smo vpeljali okrajšavo

$$\omega = \frac{ecH}{\mathcal{E}}. \quad (21.3)$$

Drugo enačbo (21.2) pomnožimo z i in in jo prištejemo k prvi:

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i\omega(v_x + iv_y).$$

Rešitev je

$$v_x + iv_y = ae^{-i\omega t}, \quad (21.4)$$

kjer je a kompleksna konstanta. Zapišemo jo lahko v obliki $a = v_{0t}e^{-i\alpha}$, kjer sta v_{0t} in α realni količini. Sledi

$$v_x + iv_y = v_{0t}e^{-i(\omega t + \alpha)},$$

če ločimo realni in imaginarni del, pa dobimo

$$v_x = v_{0t} \cos(\omega t + \alpha), \quad v_y = v_{0t} \sin(\omega t + \alpha). \quad (21.5)$$

Konstanti v_{0t} in α sta določeni z začetnimi pogoji; α je začetna faza, v_{0t} pa je hitrost delca v XY ravnini, kar je razvidno iz (21.5), saj velja

$$v_{0t} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (21.6)$$

Ta hitrost se s časom ne spreminja.

Iz (21.5) dobimo z integriranjem

$$x = x_0 + r \sin(\omega t + \alpha), \quad y = y_0 + r \cos(\omega t + \alpha), \quad (21.7)$$

kjer je

$$r = \frac{v_{0t}}{\omega} = \frac{v_{0t}\mathcal{E}}{ecH} = \frac{cp_t}{eH} \quad (21.8)$$

(p_t je projekcija gibalne količine na ravnino XY). Iz tretje enačbe (21.2) dobimo $v_z = v_{0z}$, zato je

$$z = z_0 + v_{0z}t. \quad (21.9)$$

Iz (21.7) in (21.9) je razvidno, da se naboj giblje v homogenem magnetnem polju po vijačnici, katere os kaže v smeri magnetnega polja, njen polmer r pa je podan z (21.8). Hitrost delca se s časom ne spreminja. V posebnem primeru, ko je $v_{0z} = 0$, torej ko je komponenta hitrosti naboja v smeri polja enaka nič, se delec giblje po krogu v ravnini, ki je pravokotna na polje.

Iz enačb razberemo, da je količina ω kotna frekvenca vrtenja delca v ravnini, pravokotni na polje.

Če je hitrost delca nizka, potem približno velja $\mathcal{E} = mc^2$. Frekvenca ω je tedaj enaka

$$\omega = \frac{eH}{mc}. \quad (21.10)$$

Sedaj bomo privzeli, da je magnetno polje homogeno, vendar se počasi spreminja njegova jakost in smer. Oglejmo si, kako se v tem primeru spremeni gibanje delca.

Iz klasične mehanike vemo, da kadar se pogoji gibanja počasi spreminjajo, potem nekatere količine, imenovane adiabatске invariante, ostanejo konstantne. Ker je gibanje v ravnini, ki je pravokotna na magnetno polje, periodično, je adiabatска invarianta integral

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{P}_t \cdot d\mathbf{r}, \quad (21.11)$$

ki ga izračunamo po celotni periodi gibanja, torej v tem primeru po obsegu kroga ($\mathbf{P}_t$ je projekcija kanonične gibalne količine na ravnino, ki je pravokotna na $\mathbf{H}^*$). Vstavimo $\mathbf{P}_t = \mathbf{p}_t + (e/c)\mathbf{A}$ in dobimo

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{P}_t \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{p}_t \cdot d\mathbf{r} + \frac{e}{2\pi c} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}.$$

Gibalna količina je $\mathbf{p}_t$ ima konstantno velikost in kaže v smeri $d\mathbf{r}$; v drugem členu uporabimo Stokesov izrek in upoštevamo, da je $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{H}$.[†] Dobimo:

$$I = rp_t - \frac{e}{2c} H r^2 = \frac{cp_t^2}{2eH}. \quad (21.12)$$

Od tod je razvidno, da se pri počasnem spreminjanju H tangentna gibalna količina p_t spreminja sorazmerno z $\sqrt{H}$.

Ta rezultat lahko uporabimo tudi v drugem primeru, ko se delec giblje po vijačnici v magnetnem polju, ki ni povsem homogeno (polje mora biti takšno, da se spremeni le malo na razdalji, primerljivi s polmerom in korakom vijačnice). Takšno gibanje lahko smatramo kot gibanje po krožni orbiti, ki se s časom premika, glede na orbito pa se polje spreminja s časom, vendar je ves čas homogeno. Rečemo lahko, da se komponenta gibalne količine, ki je prečna na polje, spreminja kot $p_t = \sqrt{CH}$, kjer je C konstanta, H pa neka funkcija koordinat. Po drugi strani pa se energija delca (in posledično kvadrat gibalne količine p^2) ne spreminja, tako kot pri vsakem drugem gibanju v magnetnem polju. Zato se vzdolžna komponenta gibalne količine spreminja po enačbi

$$p_l^2 = p^2 - p_t^2 = p^2 - CH(x, y, z). \quad (21.13)$$

Ker mora vedno veljati $p_l^2 \geq 0$, delec ne more predreti v področja, kjer je polje zadosti veliko ($CH > p^2$). Pri gibanju v smeri naraščajoče jakosti polja se polmer vijačne trajektorije

^{*}Glej *Mehanika*, §49. Tudi v splošnem so integrali $\int p dq$, izračunani po periodi izbrane koordinate q , adiabatске invariante. V našem primeru sta periodi obeh koordinat v ravnini, ki je pravokotna na $\mathbf{H}$, enaki, zato smo integral I zapisali kot vsoto ustreznih dveh adiabatских invariant. Vendarle pa vsaka izmed teh dveh invariant sama po sebi nima posebnega pomena, saj je odvisna od izbire vektorskega potenciala polja, ki pa ni enolična. Neenoličnost adiabatских invariant je posledica dejstva, da kadar je magnetno polje homogeno po celotnem prostoru, potem niti načeloma ne moremo določiti električnega polja, ki bi se pojavilo zaradi sprememb v $\mathbf{H}$, saj je to odvisno od specifičnih pogojev v neskončnosti.

[†]Naboj se pri dani smeri polja $\mathbf{H}$ vrti v obratni smeri urinega kazalca, če gledamo v smeri $\mathbf{H}$. Od tod negativni predznak v drugem členu.

zmanjšuje kot p_t/H (in je torej sorazmeren z $1/\sqrt{H}$), korak vijačnice pa kot p_l . Ko dosežemo mejno točko, kjer je $p_l = 0$, se delec odbije: še vedno se bo vrtel v isti smeri, vendar se bo gibal v nasprotni smeri gradienta polja.

Zaradi nehomogenosti polja se lahko pojavi še en pojav – počasno prečno premikanje (angl. *drift*) smernega središča (angl. *guiding center*; tako imenujemo središče krožne orbite) vijačne trajektorije delca; ta pojav si bomo ogledali v tretji nalogi naslednjega razdelka.

NALOGA

NALOGA Izračunaj frekvenco nihanja nabitega prostorskega nihala, ki leži v nespremenljivem homogenem magnetnem polju; lastna frekvenca nihanja nihala (v odsotnosti polja) je ω_0 .

Rešitev: Enačbe vsiljenega nihanja nihala v magnetnem polju (ki je usmerjeno v smeri osi Z) so:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eH}{mc} \dot{y}, \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = -\frac{eH}{mc} \dot{x}, \quad \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0.$$

Drugo enačbo pomnožimo z i in jo prištejemo k prvi. Dobimo

$$\ddot{\zeta} + \omega_0^2 \zeta = -\frac{eH}{mc} \dot{\zeta},$$

kjer je $\zeta = x + iy$. Od tod lahko razberemo, da je frekvenca nihanja nihala v ravnini, pravokotni na polje, enaka

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{eH}{mc} \right)^2} \pm \frac{eH}{2mc}.$$

Če je polje H šibko, se ta izraz poenostavi v

$$\omega = \omega_0 \pm eH/2mc.$$

Nihanje v smeri polja je nespremenjeno.

§22 Gibanje naboja v nespremenljivem homogenem električnem in magnetnem polju

Končno si oglejmo še gibanje naboja v primeru, ko sta prisotna tako električno in magnetno polje, ki sta nespremenljiva in homogena. Omejili se bomo na primer, ko je hitrost majhna ($v \ll c$), tako da je gibalna količina podana s klasičnim izrazom $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$; kot bomo videli kasneje, mora zaradi tega biti električno polje šibko v primerjavi z magnetnim.

Polje $\mathbf{H}$ naj kaže v smeri osi Z , ravnina, ki je napeta na vektorja $\mathbf{H}$ in $\mathbf{E}$, pa naj bo ravnina YZ . Gibalno enačbo

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}$$

lahko razpišemo po komponentah kot

$$m\ddot{x} = \frac{e}{c}\dot{y}H, \quad m\ddot{y} = eE_y - \frac{e}{c}\dot{x}H, \quad m\ddot{z} = eE_z. \quad (22.1)$$

Iz tretje enačbe je razvidno, da se v smeri osi Z naboj giblje enakomerno pospešeno, saj velja

$$z = \frac{eE_z}{2m}t^2 + v_{0z}t. \quad (22.2)$$

Drugo enačbo (22.1) pomnožimo z i in jo prištejemo k prvi. Dobimo

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\dot{y}) + i\omega(\dot{x} + i\dot{y}) = i\frac{e}{m}E_y$$

($\omega = eH/mc$). Integral te enačbe, pri čemer kot neznano funkcijo smatramo $\dot{x} + i\dot{y}$, je enak vsoti integrala iste enačbe brez desne strani in partikularne rešitve enačbe z nehomogenim členom. Splošna rešitev je $ae^{-i\omega t}$, partikularna rešitev pa je $eE_y m\omega = cE_y/H$. Zato je

$$\dot{x} + i\dot{y} = ae^{-i\omega t} + \frac{cE_y}{H}.$$

Konstanta a je v splošnem kompleksna. Zapišemo jo kot $a = be^{i\alpha}$, kjer sta b in α realni števili. Vidimo, da lahko s primerno izbiro izhodišča za merjenje časa dosežemo, da je a realen, saj lahko fazo α tako izničimo. Funkcijo $\dot{x} + i\dot{y}$ razbijemo na realni in imaginarni del in dobimo

$$\dot{x} = a \cos \omega t + \frac{cE_y}{H}, \quad \dot{y} = -a \sin \omega t. \quad (22.3)$$

Ko je $t = 0$, kaže vektor hitrosti v smeri osi X .

Komponenti hitrosti delca sta periodični funkciji časa. Njuni povprečni vrednosti sta

$$\bar{x} = \frac{cE_y}{H}, \quad \bar{y} = 0. \quad (22.4)$$

Povprečno hitrost gibanja v prekrizanih električnem in magnetnem polju pogosto imenujemo *drift* hitrost. Smer te hitrosti je pravokotna na obe polji in je neodvisna od naboja delca. Zapišemo jo lahko v vektorski obliki:

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{c\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{H^2}. \quad (22.5)$$

Pri vseh enačbah v tem razdelku smo privzeli, da je hitrost delca majhna v primerjavi s svetlobno hitrostjo. Če naj bo ta pogoj izpolnjen, morata jakosti električnega in magnetnega polja zadovoljiti naslednjo zahtevo:

$$\frac{E_y}{H} \ll 1, \quad (22.6)$$

pri čemer sta absolutni velikosti E_y in H lahko poljubni.

Če enačbo (22.3) ponovno integriramo, in če si integracijske konstante izberemo tako, da ob času $t = 0$ delec leži na osi Z ($x = y = 0$), dobimo

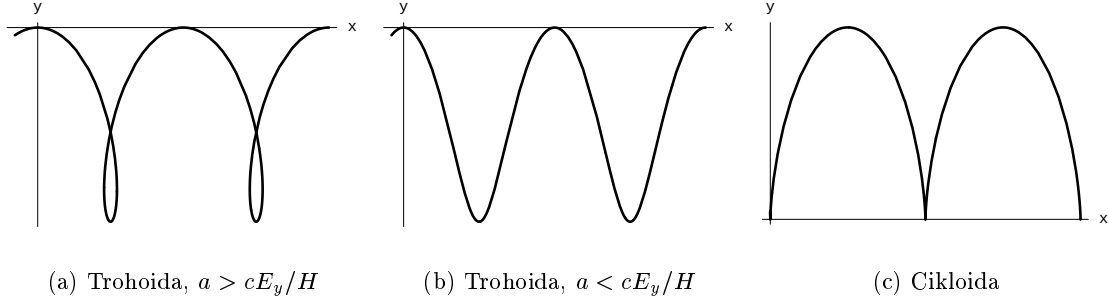
$$x = \frac{a}{\omega} \sin \omega t + \frac{cE_y}{H}t, \quad y = \frac{a}{\omega} (\cos \omega t - 1). \quad (22.7)$$

Če ti enačbi smatramo kot parametrični enačbi krivulje, ugotovimo, da opisujeta krivuljo imenovano trohoida. Odvisno od tega, ali je a po absolutni vrednosti večji oziroma manjši od količine cE_y/H , ima projekcija trajektorije na ravnino XY obliki, prikazani na sliki 3.4(a) oziroma na sliki 3.4(b).

Če je $a = -cE_y/H$, potem lahko (22.7) zapišemo v obliki

$$\begin{aligned} x &= \frac{cE_y}{\omega H}(\omega t - \sin \omega t), \\ y &= \frac{cE_y}{\omega H}(1 - \cos \omega t), \end{aligned} \quad (22.8)$$

kar pomeni, da je projekcija trajektorije na ravnino XY cikloida (slika 3.4(c)).



NALOGE

NALOGA 1. Kako se giblje relativistični nabiti delec v vzporednem električnem in magnetnem polju?

Rešitev: Magnetno polje nima vpliva na gibanje vzdolž skupne smeri polj $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ (os Z), zato je to gibanje določeno samo z električnim poljem; po § 20 torej dobimo

$$z = \frac{\mathcal{E}_{\text{kin}}}{eE}, \quad \mathcal{E}_{\text{kin}} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}.$$

Gibanje v ravnini XY je opisano z enačbama

$$\dot{p}_x = \frac{e}{c}Hv_y, \quad \dot{p}_y = -\frac{e}{c}Hv_x,$$

ali

$$\frac{d}{dt}(p_x + ip_y) = -i\frac{eH}{c}(v_x + iv_y) = -\frac{ieHc}{\mathcal{E}_{\text{kin}}}(p_x + ip_y).$$

Od tod sledi

$$p_x + ip_y = p_t e^{-i\phi},$$

kjer je p_t konstantna vrednost projekcije gibalne količine na ravnino XY , pomožna količina ϕ pa je definirana z

$$d\phi = eHc \frac{dt}{\mathcal{E}_{\text{kin}}},$$

od koder dobimo

$$ct = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \sinh \frac{E}{H} \phi. \quad (1)$$

Poleg tega velja še

$$p_x + ip_y = p_t e^{-i\phi} = \frac{\mathcal{E}_{\text{kin}}}{c^2}(\dot{x} + i\dot{y}) = \frac{eH}{c} \frac{d(x + iy)}{d\phi},$$

od koder sledi

$$x = \frac{cp_t}{eH} \sin \phi, \quad y = \frac{cp_t}{eH} \cos \phi. \quad (2)$$

Enačbi (1) in (2), skupaj z enačbo

$$z = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \cosh \frac{E}{H} \phi, \quad (3)$$

določajo gibanje delca v parametrični obliki. Trajektorija je vijačnica s polmerom cp_t/eH in monotono naraščajočim korakom, vzdolž katere se delec giblje s pojemajočo kotno hitrostjo $\dot{\phi} = eHc/\mathcal{E}_{\text{kin}}$ in s hitrostjo v smeri osi Z , ki narašča proti vrednosti c .

NALOGA 2. Kako se giblje relativistični nabiti delec v prekržanih električnem in magnetnem polju? Obe polji sta po velikosti enaki. *bravnavo gibanja v med seboj pravokotnih električnem in magnetnem polju $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$, ki po velikosti nista enaki, lahko z ustrezno transformacijo opazovalnega sistema poenostavimo na obravnavo gibanja v čistem električnem ali v čistem magnetnem polju.

Rešitev: Os Z si izberemo v smeri polja $\mathbf{H}$, os Y v smeri polja $\mathbf{E}$, nato pa upoštevamo še $H = E$. Gibalne enačbe se tedaj zapišejo

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{e}{c} E v_y, \quad \frac{dp_y}{dt} = eE \left(1 - \frac{v_x}{c}\right), \quad \frac{dp_z}{dt} = 0,$$

iz enačbe (17.8) pa sledi še

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{kin}}}{dt} = eE v_y.$$

Iz teh enačb sledi

$$p_z = \text{konst}, \quad \mathcal{E}_{\text{kin}} - cp_x = \text{konst} \equiv \alpha.$$

Če upoštevamo enačbo

$$\mathcal{E}_{\text{kin}}^2 - c^2 p_x^2 = (\mathcal{E}_{\text{kin}} + cp_x)(\mathcal{E}_{\text{kin}} - cp_x) = c^2 p_y^2 + \epsilon^2$$

(kjer je $\epsilon^2 = m^2 c^4 + c^2 p_x^2 = \text{konst}$), dobimo

$$\mathcal{E}_{\text{kin}} + cp_x = \frac{1}{\alpha} (c^2 p_y^2 + \epsilon^2),$$

od tod pa še

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{kin}} &= \frac{\alpha}{2} + \frac{c^2 p_y^2 + \epsilon^2}{2\alpha}, \\ p_x &= -\frac{\alpha}{2c} + \frac{c^2 p_y^2 + \epsilon^2}{2\alpha c}. \end{aligned}$$

Nato zapišemo

$$\mathcal{E}_{\text{kin}} \frac{dp_y}{dt} = eE \left(\mathcal{E}_{\text{kin}} - \frac{\mathcal{E}_{\text{kin}} v_x}{c} \right) = eE (\mathcal{E}_{\text{kin}} - cp_x) = eE \alpha,$$

od koder sledi

$$2eEt = \left(1 + \frac{\epsilon^2}{\alpha^2}\right) p_y + \frac{c^2}{3\alpha^2} p_y^2. \quad (1)$$

Tir delca dobimo tako, da pretvorimo spremenljivke v enačbah

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c^2 p_x}{\mathcal{E}_{\text{kin}}}, \dots,$$

v spremenljivko p_y z uporabo zveze $dt = \mathcal{E}_{\text{kin}} dp_y / eE\alpha$. Z integriranjem nato dobimo končni rezultat:

$$x = \frac{c}{2eE} \left(-1 + \frac{\epsilon^2}{\alpha^2} \right) p_y + \frac{c^3}{6\alpha^2 eE} p_y^3, \quad (2)$$

$$y = \frac{c^2}{2\alpha eE} p_y^2, \quad z = \frac{p_z c^2}{eE\alpha} p_y.$$

Enačbi (1) in (2) povsem določata gibanje delca v parametrični obliki (parameter je p_y). Poudariti moramo, da hitrost narašča najhitreje v smeri, ki je pravokotna na $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ (v smeri osi X).

NALOGA 3. Izračunaj hitrost drsenja (angl. *drift*) vodilnega središča (angl. *guiding center*) tira nerelativističnega nabitega delca v magnetnem polju, ki je skoraj homogeno (H. Alfven, 1940).

*O

Rešitev: Najprej predpostavimo, da se delec giblje po krožnici, torej da delec nima komponente vzdolž smeri polja. Enačbo tira delca zapišemo v obliki $\mathbf{r} = \mathbf{R}(t) + \boldsymbol{\zeta}(t)$, kjer je $\mathbf{R}(t)$ krajevni vektor vodilnega središča (ta funkcija se počasi spreminja s časom), medtem ko je $\boldsymbol{\zeta}(t)$ hitro nihajoča količina, ki opisuje krožno gibanje okoli središča. Izračunati moramo povprečje po periodi krožnega gibanja silo $(e/c)\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}(\mathbf{r})$, ki deluje na delec (glej *Mehanika*, § 30). Funkcijo $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ v tem izrazu razvijemo po potencah $\boldsymbol{\zeta}$:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(\mathbf{R}) + (\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla)\mathbf{H}(\mathbf{R}).$$

Pri računanju povprečja člen prvega reda po $\boldsymbol{\zeta}(t)$ odpade, člen drugega reda pa vodi k dodatni sili

$$\mathbf{f} = \frac{e}{c}\dot{\boldsymbol{\zeta}} \times (\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla)\mathbf{H}.$$

Za krožni tir velja

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \omega \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{n}, \quad \zeta = \frac{v_{\perp}}{\omega},$$

kjer je $\mathbf{n}$ enotski vektor v smeri polja $\mathbf{H}$; frekvenca je enaka $\omega = eH/mc$; $v_{\perp}$ je hitrost kroženja delca. Povprečne vrednosti zmnožka komponent vektorja $\boldsymbol{\zeta}$, ki se suka v ravnini (pravokotni na $\mathbf{n}$), so:

$$\overline{\zeta_{\alpha}\zeta_{\beta}} = \frac{1}{2}\zeta^2\delta_{\alpha\beta},$$

kjer je $\delta_{\alpha\beta}$ enotski tenzor v tej ravnini. Tako dobimo

$$\mathbf{f} = -\frac{mv_{\perp}^2}{2H}(\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{H}.$$

Ker nespremenljivo polje $\mathbf{H}(\mathbf{R}) = 0$ zadosti enačbama $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ in $\nabla \times \mathbf{H} = 0$, dobimo

$$(\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{H} = -\mathbf{n}\nabla \cdot \mathbf{H} + (\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{H} + \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{H}) = (\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{H} = H(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{n} + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla H).$$

Zanima nas sila, ki je prečna na smer $\mathbf{n}$, ki povzroča premik tira; enaka je

$$\mathbf{f} = -\frac{mv_{\perp}^2}{2}(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{n} = \frac{mv_{\perp}^2}{2\rho}\boldsymbol{\nu},$$

kjer je ρ krivinski polmer silnice polja v dani točki, $\boldsymbol{\nu}$ pa je enotski vektor, ki kaže iz krivišča proti dani točki.

Primer, ko ima delec tudi vzdolžno hitrost $v_{\parallel}$ (v smeri $\mathbf{n}$) se poenostavi na prejšnji primer, če se preselimo v opazovalni sistem, ki se vrti okoli trenutnega krivišča silnice (ki je tir vodilnega središča) s kotno hitrostjo $v_{\parallel}/\rho$. V tem opazovalnem sistemu delec nima vzdolžne hitrosti, obstaja pa dodatna prečna sila, centrifugalna sila $mv_{\parallel}^2/\rho$. Zato je celotna prečna sila enaka

$$\mathbf{f}_{\perp} = \boldsymbol{\nu} \frac{m}{\rho} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right).$$

Ta sila je ekvivalentna učinku nespremenljivega polja z jakostjo $\mathbf{f}_{\perp}/e$. Po (22.4) takšno polje vodi k drsenju vodilnega središča orbite s hitrostjo

$$\mathbf{v}_d = \frac{1}{\omega\rho} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{n}.$$

Predznak hitrosti je odvisen od predznaka naboja.

§23 Tenzor elektromagnetnega polja

V 17 smo izpeljali gibalno enačbo naboja v polju, pri čemer smo si za začetno točko izpeljave izbrali Lagrangevo funkcijo (16.4), ki je zapisana v tridimenzionalni obliki. Sedaj bomo izpeljali isto enačbo neposredno iz akcije (16.1), ki je zapisana v štiridimenzionalni obliki.

Po načelu najmanjše akcije velja

$$\delta S = \delta \int_a^b \left(-mc \, ds - \frac{e}{c} A_i \, dx^i \right) = 0. \quad (23.1)$$

Če upoštevamo, da je $ds = \sqrt{dx_i dx^i}$, dobimo (zaradi krajšega zapisa bomo v nadaljevanju izpuščali meji integracijskega območja a in b)

$$\delta S = - \int \left(mc \frac{dx_i dx^i}{ds} + \frac{e}{c} A_i dx^i + \frac{e}{c} \delta A_i dx^i \right) = 0.$$

Prva člena integriramo po delih. Poleg tega v prvem členu upoštevamo, da je $dx_i/ds = u_i$, kjer so u_i komponente četverca hitrosti. Sledi

$$\int \left(mc \, du_i \delta x^i + \frac{e}{c} \delta x^i dA_i - \frac{e}{c} \delta A_i dx^i \right) - \left[\left(mc u_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x^i \right] = 0. \quad (23.2)$$

Drugi člen v tej enačbi je enak nič, saj je variacija koordinat na robovih integracijskega območja enaka nič. Velja tudi:

$$\delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^k, \quad dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^k,$$

in dobimo

$$\int \left(mc \, du_i \delta x^i + \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^i dx^k - \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^i \delta x^k \right) = 0.$$

V prvem členu nadomestimo du_i z $(du_i/ds) ds$, v drugem in tretjem pa upoštevamo, da je $dx^i = u^i ds$. Poleg tega v tretjem členu zamenjamo indeksa i in k (kar nič ne spremeni, saj seštejemo po obeh indeksih). Dobimo

$$\int \left[mc \frac{du_i}{ds} - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) u^k \right] \delta x^i ds = 0.$$

Ker je variacija δx^i poljubna, mora biti integrand identično enak nič, torej

$$mc \frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) u^k.$$

Vpeljemo zapis

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}. \quad (23.3)$$

Antisimetrični tenzor F_{ik} se imenuje *tenzor elektromagnetnega polja*. Gibalne enačbe zapišemo v obliki

$$mc \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k. \quad (23.4)$$

To je gibalna enačba naboja v štiridimenzionalni obliki.

Fizikalni pomen posameznih komponent tenzorja F_{ik} lahko ugotovimo, če vstavimo $A_i = (\phi, -\mathbf{A})$ v definicijo (23.3). Rezultat lahko zapišemo v obliki matrike, v katerih z indeksom $i = 0, 1, 2, 3$ oštevilčimo vrstice, z indeksom k pa stolpce:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (23.5)$$

To lahko zapišemo tudi krajše (glej 6):

$$F_{ik} = (\mathbf{E}, \mathbf{H}), \quad F^{ik} = (-\mathbf{E}, \mathbf{H}).$$

Komponente tenzorja elektromagnetnega polja so torej komponente vektorjev jakosti električnega in magnetnega polja.

Če ponovno uporabimo tridimenzionalni zapis, se lahko prepričamo, da so tri prostorske komponente ($i = 1, 2, 3$) enačbe (23.4) povsem enake vektorski enačbi gibanja (17.6), časovna komponenta ($i = 0$) pa ustreza enačbi z delo (17.8). Slednja enačba sledi iz enačb gibanja; dejstvo, da so neodvisne le tri izmed štirih enačb, lahko preverimo tudi tako, da obe strani v (23.4) pomnožimo z u^i . Leva stran enačbe je enaka nič, ker sta četverca u^i in du^i/ds med seboj pravokotna, desna stran pa je enaka nič, kjer je tenzor F_{ik} antisimetričen.

Če pri variaciji akcije S upoštevamo le dovoljene trajektorije, potem je prvi člen v (23.2) identično enak nič. Iz drugega člena, pri katerem zgornjo mejo smatramo kot prosti parameter, tedaj dobimo diferencial akcije kot funkcije koordinat. Tako je

$$\delta S = - \left(mcu_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x^i. \quad (23.6)$$

Sledi

$$-\frac{\partial S}{\partial x^i} = mcu_i + \frac{e}{c} A_i = p_i + \frac{e}{c} A_i. \quad (23.7)$$

Četverec $-\partial S/\partial x^i$ je četverec kanonične gibalne količine delca P_i . Če vanj vstavimo vrednosti komponent p_i in A_i dobimo

$$P^i = \left(\frac{\mathcal{E}_{\text{kin}} + e\phi}{c}, \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right). \quad (23.8)$$

Kot smo pričakovali, prostorske komponente četverca tvorijo tridimenzionalno kanonično gibalno količino (16.5), časovna komponenta pa je $\mathcal{E}/c$, kjer je $\mathcal{E}$ celotna energija naboja v polju.

§24 Lorentzeva transformacija polja

V tem razdelku bomo poiskali transformacijska pravila za polje, torej enačbe, s katerimi lahko določimo polje v enem inercialnem opazovalnem sistemu, če ga poznamo v nekem drugem.

Transformacijske enačbe za potenciale dobimo neposredno iz splošnih enačb za preslikavo četvercev (6.1). Če upoštevamo, da je $A^i = (\phi, \mathbf{A})$, takoj dobimo

$$\phi = \frac{\phi' + \frac{V}{c} A'_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A_x = \frac{A'_x + \frac{V}{c} \phi'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A_y = A'_y, \quad A_z = A'_z. \quad (24.1)$$

Transformacijska pravila za antisimetrični tenzor drugega reda (kot F^{ik}) smo našli v drugi nalogi v 6: komponenti F^{23} in F^{01} se ne spremenita, komponente F^{02} , F^{03} oziroma F^{12} , F^{13} pa se preslikajo kot x^0 oziroma kot x^1 . Komponente tenzorja F^{ik} izrazimo s komponentami polj $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ kot v (23.5), in dobimo naslednji enačbi za transformacijo električnega polja:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c}H'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c}H'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (24.2)$$

ter enačbi za transformacijo magnetnega polja:

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c}E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c}E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (24.3)$$

Električno in magnetno polje sta, tako kot večina ostalih fizikalnih količin, relativna. To pomeni, da so njune lastnosti različne v različnih opazovalnih sistemih. Tako sta lahko na primer električno ali magnetno polje enaki nič v enem opazovalnem sistemu, hkrati pa prisotni v drugem opazovalnem sistemu.

Enačbi (24.2) in (24.3) se občutno poenostavita, ko je $V \ll c$. Do členov prvega reda po V/c velja

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, & E_y &= E'_y + \frac{V}{c}H'_z, & E_z &= E'_z - \frac{V}{c}H'_y; \\ H_x &= H'_x, & H_y &= H'_y - \frac{V}{c}E'_z, & H_z &= H'_z + \frac{V}{c}E'_y. \end{aligned}$$

Te enačbi lahko zapišemo v vektorski obliki:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \frac{1}{c}\mathbf{H}' \times \mathbf{V}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}' - \frac{1}{c}\mathbf{E}' \times \mathbf{V}. \quad (24.4)$$

Enačbe za inverzno transformacijo iz K' v K dobimo neposredno iz (24.2)-(24.4), če spremenimo predznak količine V in če zamenjamo količine s črtico in tiste brez nje.

Če je magnetno polje $\mathbf{H}' = 0$ v sistemu K' , potem lahko iz (24.2) in (24.3) ugotovimo, da velja naslednja zveza med električnim in magnetnim poljem v sistemu K :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}\mathbf{V} \times \mathbf{E}. \quad (24.5)$$

Če v sistemu K' velja $\mathbf{E}' = 0$, potem v sistemu K velja naslednja zveza:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\mathbf{V} \times \mathbf{H}. \quad (24.6)$$

V obeh primerih sta torej v sistemu K električno in magnetno polje med seboj pravokotni.

Ti enačbi imata pomen, tudi ko ju uporabimo v obrnjeni smeri: če sta polji $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ v nekem opazovalnem sistemu med seboj pravokotni (vendar različne jakosti), potem obstaja opazovalni sistem K' , v katerem je polje povsem električno ali povsem magnetno. Hitrost $\mathbf{V}$ tega sistema (glede na K) je pravokotna na $\mathbf{E}$ in na $\mathbf{H}$ in ima vrednost cH/E v prvem primeru (ko je $H < E$) in cE/H v drugem primeru (ko je $E < H$).

§25 Invariantne količine polja

Iz jakosti električnega in magnetnega polja lahko tvorimo invariantne količine, ki se ob prehodu iz enega opazovalnega sistema v drugega ne spremenijo.

Invariante hitro najdemo, če si ogledamo štiridimenzionalni zapis polja z antisimetričnim tenzorjem četvercem F^{ik} . Očitno lahko tvorimo naslednji invariantni količini iz komponent tega tenzorja:

$$F_{ik}F^{ik} = \text{inv}, \quad (25.1)$$

$$e^{iklm}F_{ik}F_{lm} = \text{inv}, \quad (25.2)$$

kjer je e^{iklm} popolnoma antisimetrični enotski tenzor četrtega reda (glej §6). Prva invarianta je skalar, druga pa psevdoskalar (zmnožek tenzorja F^{ik} s svojim dualnim tenzorjem). *

Če F^{ik} zapišemo s komponentami vektorjev $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ z uporabo (23.5), lahko hitro pokažemo, da se ti invarianti v tridimenzionalni obliki zapišeta kot

$$H^2 - E^2 = \text{inv}, \quad (25.3)$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = \text{inv}. \quad (25.4)$$

Psevdoskalarni značaj druge invariante je tukaj lepo razviden, saj gre za skalarni produkt polarnega vektorja $\mathbf{E}$ in aksialnega vektorja $\mathbf{H}$ (medtem ko je kvadrat te količine, $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{H})^2$, pravi skalar).

Iz invariantnosti zgornjih izrazov lahko izpeljemo naslednja izreka. Če sta električno in magnetno polje med seboj pravokotni v nekem opazovalnem sistemu, torej če velja $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0$, potem sta polji pravokotni tudi v vseh ostalih inercialnih opazovalnih sistemih. Če sta absolutni vrednosti polj $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ enaki v enem opazovalnem sistemu, potem sta enaki tudi v ostalih.

Očitno veljajo tudi naslednje neenačbe. Če v nekem opazovalnem sistemu velja $E > H$ (ali $H > E$), potem tudi v vsakem drugem sistemu velja $E > H$ (ali $H > E$). Če se v nekem opazovalnem sistemu vektorja $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ križata pod ostrim (ali topim) kotom, potem se tudi v vseh ostalih opazovalnih sistemih križata pod ostrim (ali topim) kotom.

S pomočjo Lorentzeve transformacije lahko vedno dosežemo, da imata $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ poljubni vrednosti, ki sta podvrženi le pogojema, da imata $E^2 - H^2$ in $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$ fiksni vrednosti. Kot posebni primer lahko omenimo možnost, da lahko vedno najdemo opazovalni sistem, v katerem sta električno in magnetno polje vzporedna v izbrani točki. V takšnem sistemu velja $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = EH$, in iz enačb

$$E^2 - H^2 = E_0^2 - H_0^2, \quad EH = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{H}_0$$

lahko dobimo vrednosti $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ v tem sistemu ($\mathbf{E}_0$ in $\mathbf{H}_0$ sta jakosti električnega in magnetnega polja v izhodiščnem opazovalnem sistemu).

Primer, pri katerem sta obe invarianti enaki nič, je izključen. Tedaj sta $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ enaka in med seboj pravokotna v vseh opazovalnih sistemih.

*Psevdoskalar (25.2) lahko zapišemo tudi kot četverno divergenco:

$$e^{iklm}F_{ik}F_{lm} = 4 \frac{\partial}{\partial x^i} \left(e^{iklm} A_k \frac{\partial}{\partial x^i} A_m \right),$$

kar lahko preprosto preverimo, če upoštevamo, da je e^{iklm} antisimetrični tenzor.

Če je $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0$, potem lahko vedno najdemo opazovalni sistem, v katerem je $\mathbf{E} = 0$ ali $\mathbf{H} = 0$ (odvisno od tega, ali je $E^2 - H^2 < 0$ ali $E^2 - H^2 > 0$), torej v katerem je polje povsem magnetno ali povsem električno. Velja tudi obratno: če je v nekem opazovalnem sistemu $\mathbf{E} = 0$ ali $\mathbf{H} = 0$, potem sta polji med seboj pravokotni v vseh drugih opazovalnih sistemih, kar je v skladu z našo ugotovitvijo s konca prejšnjega razdelka.

Opisali bomo še drug pristop k iskanju invariant antisimetričnega tenzorja četverca. S pomočjo tega pristopa bomo med drugim videli, da sta (25.3) in (25.4) pravzaprav dve neodvisni invarianti, nakazali pa bomo tudi nekaj poučnih matematičnih lastnosti Lorentzeve transformacije tenzorjev četvercev.

Oglejmo si kompleksni vektor

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}. \quad (25.5)$$

Z uporabo enačb (24.2) in (24.3) se hitro prepričamo, da lahko Lorentzevo transformacijo (v smeri osi x) tega vektorja zapišemo v obliki

$$\begin{aligned} F_x &= F'_x, & F_y &= F'_y \cosh \phi - iF'_z \sinh \phi = F'_y \cos i\phi - F'_z \sin i\phi, \\ F_z &= F'_z \cos i\phi + F'_y \sin i\phi, & \tanh \phi &= V/c. \end{aligned} \quad (25.6)$$

Vidimo, da je zasuk v ravnini x, t četvernega prostora (natanko to Lorentzeva transformacija tudi je) ekvivalenten zasuku vektorja $\mathbf{F}$ v ravnini y, z za imaginarni kot v ravnini y, z v tridimenzionalnem prostoru. Množica vseh možnih zasukov v četvernem prostoru (vključno s preprostimi zasuki okoli osi x, y in z) je ekvivalentna množici vseh možnih zasukov za kompleksne kote v tridimenzionalnem prostoru (pri tem šest kotov sukanja v četvernem prostoru ustreza trem kompleksnim kotom sukanja v tridimenzionalnem sistemu).

Edina invarianta vektorja ob zasuku je njegov kvadrat: $\mathbf{F}^2 = E^2 - H^2 + 2i\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$; zato sta realni količini $E^2 - H^2$ in $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$ edini neodvisni invarianti tenzorja F_{ik} .

Če je $F^2 \neq 0$, potem lahko vektor $\mathbf{F}$ zapišemo v obliki $\mathbf{F} = \alpha \mathbf{n}$, kjer je $\mathbf{n}$ kompleksen enotski vektor ($\mathbf{n}^2 = 1$). S pomočjo ustreznega kompleksnega zasuka lahko dosežemo, da vektor $\mathbf{n}$ kaže v smeri ene izmed koordinatnih osi. Očitno je tedaj $\mathbf{n}$ realen in določa smer vektorjev $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$: $\mathbf{F} = (E + iH)\mathbf{n}$; z drugimi besedami, vektorja $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ postaneta vzporedna.

NALOGA

NALOGA Kakšno hitrost mora imeti opazovalni sistem, da bosta v njem električno in magnetno polje vzporedni?

Rešitev: Obstaja neskončno število sistemov K' , v katerih sta polji vzporedni. Če najdemo en takšen sistem, potem bodo isto lastnost imeli tudi vsi drugi opazovalni sistemi, ki se glede na prvega gibljejo s hitrostjo, ki ima isto smer kot poji $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$. Zato zadostuje, da poiščemo enega izmed teh sistemov, ki ima hitrost pravokotno na obe polji. Smer hitrost naj bo vzdolž osi x . Upoštevamo, da v sistemu K' velja $E'_x = H'_x$, $E'_y H'_z - E'_z H'_y = 0$, in s pomočjo enačb (24.2) in (24.3) dobimo naslednjo enačbo za hitrost $\mathbf{V}$ sistema k' glede na začetni sistem:

$$\frac{\frac{\mathbf{V}}{c}}{1 + \frac{V^2}{c^2}} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{E^2 + H^2}$$

(izbrati moramo tisti koren kvadratne enačbe, za katerega velja $V < c$).

Poglavje 4

Enačbe elektromagnetnega polja

§26 Prvi par Maxwellovih enačb

Iz izrazov

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi$$

lahko hitro dobimo enačbi, ki vsebujeta le $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$. V ta namen izračunajmo $\nabla \times \mathbf{E}$:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \times (\nabla \phi).$$

Rotor gradienta je vedno enak nič, zato je

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (26.1)$$

Izračunajmo divergenco obeh strani enačbe $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{H}$ in upoštevajmo, da je divergenca rotorja enaka nič. Dobimo

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (26.2)$$

Enačbi (26.1) in (26.2) se imenujeta prvi par Maxwellovih enačb. * Opozorimo naj, da ti enačbi še ne določata povsem lastnosti polj. To je takoj razvidno že iz tega, da določata spreminjanje magnetnega polja s časom (odvod $\partial \mathbf{H} / \partial t$), ne določata pa odvoda $\partial \mathbf{E} / \partial t$.

Enačbi (26.1) in (26.2) lahko zapišemo v integralski obliki. Po Gaussovem izreku je

$$\int \nabla \cdot \mathbf{H} \, dV = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{f},$$

pri čemer integral na desni izračunamo po celotni sklenjeni ploskvi, ki omejuje prostornino, po kateri integriramo na levi. Iz (26.2) potem sledi

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{f} = 0. \quad (26.3)$$

Integral vektorja po ploskvi se imenuje *pretok vektorja* (angl. *flux of the vector*) skozi površino. Pretok magnetnega polja skozi vsako sklenjeno ploskev je enak nič.

*Maxwellove enačbe (osnovne enačbe elektrodinamike) je Maxwell izpeljal okoli v letih 1860.

Po Stokesovem izreku velja

$$\int \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

Tu moramo integral na desni izračunati po sklenjeni konturi, ki omejuje ploskev, po kateri računamo integral na levi strani. Iz (26.1) potem dobimo

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{f}. \quad (26.4)$$

Integral vektorja po sklenjeni konturi se imenuje *cirkulacija* vektorja po konturi. Cirkulacija električnega polja se imenuje tudi *elektrogibalna sila* (angl. *electromotive force*) po dani konturi. Elektrogibalna sila poljubne konture je torej enaka časovnemu odvodu magnetnega pretoka skozi ploskev, napeto na konturo, vzeto z negativnim predznakom.

Maxwellovi enačbi (26.1) in (26.2) lahko zapišemo s štiridimenzionalnim zapisom. Z definicijo tenzorja elektromagnetnega polja

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k},$$

lahko hitro preverimo, da velja

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0. \quad (26.5)$$

Izraz na levi strani je tenzor tretjega reda, ki je antisimetričen v vseh treh svojih indeksih. Edini komponente, ki niso identično enake nič, so tiste, za katere velja $i \neq k \neq l$. Vsega skupaj imamo torej štiri enačbe, za katere lahko preprosto pokažemo [tako da vstavimo (23.5)], da sovpadajo z enačbama (26.1) in (26.2).

Sestavimo lahko četverec, ki je dualen antisimetričnemu tenzorju četvercu tretjega reda, tako da slednjega pomnožimo s tenzorjem e^{iklm} in skržimo po treh parih indeksov (glej §6). Zato lahko (26.5) zapišemo v obliki

$$e^{iklm} \frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = 0, \quad (26.6)$$

od koder je takoj razvidno, da obstajajo le štiri neodvisne enačbe.

§27 Akcija za elektromagnetno polje

Akcija S celotnega sistema, ki ga tvorijo elektromagnetno polje in delci, ki se v njem nahajajo, je sestavljena iz treh prispevkov:

$$S = S_f + S_m + S_{mf}, \quad (27.1)$$

Člen S_m je odvisen le od lastnosti delcev, torej je to kar akcija za proste delce. Za en sam prosti delec je podan z (8.1). Če imamo opravka z več delci, je njihova akcija vsota akcij za vsak posamezni delec. Zato je

$$S_m = - \sum mc \int ds. \quad (27.2)$$

Količina S_{mf} je tisti prispevek, ki je odvisen od interakcije med delci in poljem. V §16 smo ugotovili, da za sistem delcev velja

$$S_{mf} = - \sum \frac{e}{c} \int A_k dx^k. \quad (27.3)$$

V vsakem izmed členov te vsote je A_k potencial polja v točki četvernega prostora, v kateri se ustrezeni delec nahaja. Vsoto $S_m + S_{mf}$ že poznamo, saj je to akcija (16.1) za naboje v polju.

In končno, S_f je tisti prispevek k akciji, ki je odvisen le od lastnosti polja samega, kar pomeni, da je S_f akcija polja v odsotnosti nabojev. Do sedaj nas je zanimalo le gibanje nabojev v *vnapij podanem* elektromagnetnem polju, zato nas količina S_f , ki ni odvisna od delcev, ni zanimala, saj ta člen ni vplival na gibanje delcev. Vseeno pa je ta člen potreben, če nas zanimajo enačbe, ki določajo polje, in sicer zato, ker smo iz prispevkov k akciji S_m in S_{mf} dobili le dve enačbi polja, (26.1) in (26.2), ki nista zadostni, da bi lahko povsem določili polje.

Obliko akcije polja S_f bomo dobili upoštevajoč naslednjo zelo pomembno lastnost elektromagnetnih polj. Poizkusi kažejo, da elektromagnetno polje zadosti *načelu superpozicije*. To načelo pove, da lahko polje, ki ga ustvarja sistem nabojev, preprosto sestavimo iz polj, ki ga ustvarja vsak delec sam. To pomeni, da je nastala jakost polja v vsaki točki prostora enaka vektorski vsoti posameznih jakosti polja v tej točki.

Vsaka rešitev enačb polja nam da polje, ki lahko obstaja v naravi. Po načelu superpozicije lahko v naravi obstaja vsota poljubnih takšnih polj, kar pomeni, da tudi vsota takšnih polj zadosti enačbam polja.

Kot vemo, imajo linearne diferencialne enačbe lastnost, da je vsota poljubnih rešitev tudi rešitev enačb. Zato morajo biti enačbe polje linearne diferencialne enačbe.

Od tod sledi, da mora kot integrand v akciji S_f nastopati izraz, ki je kvadraten po polju. Samo v tem primeru bodo enačbe polja linearne; enačbe polja dobimo z variiranjem akcije in pri tem se red izraza, ki ga integriramo, zniža za ena.

V izrazu za akcijo S_f se ne moreta pojavljati potenciala, ker nista enolično določena (pri S_{mf} ta nedoločenost ni bila pomembna). Zato mora S_f biti integral neke funkcije tenzorja elektromagnetnega polja F_{ik} . Akcija pa mora biti skalar, zato mora biti integral neke skalarne količine. Edina takšna količina je $F_{ik}F^{ik}$. *

Akcija S_f mora torej biti oblike

$$S_f = a \int \int F_{ik}F^{ik} dV dt, \quad dV = dx dy dz,$$

kjer moramo integrirati po celotnem prostoru, po času pa med dvema izbranim trenutkoma; a je neka konstanta. Pod integralom imamo $F_{ik}F^{ik} = 2(H^2 - E^2)$. Polje $\mathbf{E}$ vsebuje odvod $\partial\mathbf{A}/\partial t$; hitro se prepričamo, da mora $(\partial\mathbf{A}/\partial t)^2$ nastopati v akciji s pozitivnim predznakom, zato mora tudi E^2 imeti pozitivni predznak. Če bi $(\partial\mathbf{A}/\partial t)^2$ nastopal z negativnim predznakom, bi lahko s hitro časovno spremembo potenciala (znotraj obravnavanega časovnega intervala) vedno dosegli, da je S_f negativen s poljubno veliko absolutno vrednostjo. Zato S_f ne bi imel minimuma, kot zahteva načelo najmanjše akcije. Zato mora a biti negativna količina.

* Funkcija v integrandu akcije S_f ne sme vsebovati odvodov tenzorja F_{ik} , saj lahko Lagrangeva funkcija poleg koordinat vsebuje le še njihove prve odvode. Vlogo "koordinat" (torej parametrov, ki jih lahko variiramo pri uporabi načela najmanjše akcije) v tem primeru igra potencial polja A_k ; to je podobno kot v mehaniki, kjer lahko Lagrangeva funkcija mehanskega sistema vsebuje le koordinate delcev in njihove prve odvode.

Vrednost konstante a je odvisna od izbire enot, s katerimi merimo polje. Ko si izberemo vrednost količine a in enote, s katerimi merimo polje, so enote za merjenje vseh ostalih količin, povezanih z elektromagnetnim poljem, določene.

V nadaljevanju bomo uporabljali *Gaussov sistem enot*; v tem sistemu je a brezdimenzijska količina z vrednostjo $-(1/16\pi)$. *

Akcija polja je torej

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{ik} F^{ik} d\Omega, \quad d\Omega = c dt dx dy dz. \quad (27.4)$$

V tridimenzionalni obliki zapišemo

$$S_f = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 - H^2) dV dt. \quad (27.5)$$

Lagrangeva funkcija polja je torej

$$L_f = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 - H^2) dV. \quad (27.6)$$

Končno lahko zapišemo akcijo polja in delcev:

$$S = - \sum \int mc ds - \sum \int \frac{e}{c} A_k dx^k - \frac{1}{16\pi c} \int F_{ik} F^{ik} d\Omega. \quad (27.7)$$

Poudariti moramo, da sedaj ni več potreben privzetelek, da so naboji šibki, tako kot pri izpeljavi gibalne enačbe naboja v vnaprej podanem polju. Zato A_k in F_{ik} opisujeta dejansko polje, torej zunanje polje skupaj s poljem, ki ga ustvarijo naboji sami; A_k in F_{ik} sta sedaj odvisna od položajev in hitrosti nabojev.

§28 Četverec toka

Namesto, da naboje obravnavamo kot točkaste delce, jih zaradi lažjega računanja pogosto opišemo, kot da bi bili zvezno porazdeljeni po prostoru. Zato vpeljemo “gostoto naboja” ρ , tako da je ρdV naboj, ki je vsebovan v prostornini dV . Gostota ρ je v splošnem funkcija koordinat in časa. Integral gostote ρ po izbrani prostornini je enak naboju, ki se nahaja v tem prostoru.

V mislih moramo imeti, da so naboji dejansko točkasti, zato je gostota ρ enaka nič povsod, razen v točkah, kjer se nabiti točkasti delci nahajajo. Integral $\int \rho dV$ mora zato biti enak vsoti nabojev, ki se nahajajo na tem območju prostora. Zato lahko ρ zapišemo s pomočjo funkcije δ kot †

$$\rho = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad (28.1)$$

*Poleg Gaussovega sistema se pogosto uporablja tudi Heavisideov, v katerem je $a = -1/4$. V tem sistemu enot se enačbe polja lepše zapišejo (v njih se ne pojavlja 4π), zato pa se v Coulombovem zakonu pojavi π . Ravno nasprotno pa v Gaussovem sistemu enačbe polje vsebujejo 4π , Coulombov zakon pa ima preprosto obliko.

† Funkcija $\delta(x)$ je definirana z $\delta(x) = 0$ za vse od nič različne x ; za $x = 0$ je $\delta(0) = \infty$, tako da velja

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$

kjer seštevamo po vseh nabojih, $\mathbf{r}_a$ pa je krajevni vektor delca z nabojem e_a .

Naboj delca je že po sami definiciji invariantna količina, ki ni odvisna od izbire opazovalnega sistema. Gostota ρ pa v splošnem ni invariantna, invarianten je le zmnožek ρdV .

Enačbo $de = \rho dV$ na obeh straneh pomnožimo z dx^i :

$$de dx^i = \rho dV dx^i = \rho dV dt \frac{dx^i}{dt}.$$

Na levi strani imamo vektor četverec (ker je de skalar in ker je dx^i četverec), zato je tudi količina na desni strani vektor četverec. Ker pa je $dV dt$ skalar, ugotovimo, da je $\rho(dx^i/dt)$ četverec. Ta četverec (označevali ga bomo z j^i) se imenuje *četverec toka* (angl. *current four-vector*):

$$j^i = \rho \frac{dx^i}{dt}. \quad (28.2)$$

Prostorske komponente četverca imenujemo *vektor gostote toka*,

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}, \quad (28.3)$$

kjer je $\mathbf{v}$ hitrost naboja v izbrani točki. Časovna komponenta četverca (28.2) je $c\rho$. Zato je

$$j^i = (c\rho, \mathbf{j}). \quad (28.4)$$

Skupni naboj v celotnem prostoru je enak integralu $\int \rho dV$, izračunanem po celotnem prostoru. Integral lahko zapišemo v štiridimenzionalni obliki

$$\int \rho dV = \frac{1}{c} \int j^0 dV = \frac{1}{c} \int j^i dS_i, \quad (28.5)$$

Iz te definicije sledijo naslednje lastnosti: če je $f(x)$ poljubna zvezna funkcija, potem velja

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a);$$

posebni primer te enačbe je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0).$$

(Integracijske meje se seveda ne rabijo raztezati od $-\infty$ do $+\infty$; integracijsko območje je lahko poljubno, če le vključuje točko, v kateri je funkcija δ od nič različna.)

Pomen naslednjih dveh enačb je ta, da nam dasta leva in desna stran isti rezultat, če se pojavljata kot množitelja pod integracijskim znakom:

$$\delta(-x) = \delta(x), \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x).$$

Zadnja enačba je poseben primer bolj splošnega pravila

$$\delta[\phi(x)] = \sum_i \frac{1}{|\phi'(a_i)|} \delta(x - a_i),$$

kjer je $\phi(x)$ enolična funkcija (njena obratna funkcija ne rabi biti enolična), količine a_i pa so koreni enačbe $\phi(x) = 0$.

Podobno kot smo vpeljali $\delta(x)$ za eno samo spremenljivko x , lahko definiramo tudi tridimenzionalno funkcijo $\delta(\mathbf{r})$, ki je enaka nič povsod, razen v izhodišču tridimenzionalnega koordinatnega sistema, in katere integral po celotnem prostoru je enak ena. To funkcijo lahko seveda zapišemo kot zmnožek $\delta(x)\delta(y)\delta(z)$.

kjer zadnji integral računamo po celotni štiridimenzionalni hiper-ravnini, pravokotni na os x^0 (kar je enako integraciji po celotnem tridimenzionalnem prostoru). V splošnem je integral

$$\frac{1}{c} \int j^i dS_i$$

po poljubni hiperploskvi enak vsoti nabojev, katerih svetovnice sekajo ploskev.

Vpeljimo četverec toka v izraz (27.7) za akcijo in preoblikujmo drugi člen v tem izrazu. Namesto nabojev e uporabimo zvezno porazdelitev naboja z gostoto ρ . Drugi člen zapišemo kot

$$-\frac{1}{c} \int \rho A_i dx^i dV.$$

Pri tem smo vsoto po nabojih nadomestili z integralom po celotnem prostoru. Izraz preoblikujemo v

$$-\frac{1}{c} \int \rho \frac{dx^i}{dt} A_i dV dt,$$

kar je enako

$$-\frac{1}{c^2} \int A_i j^i d\Omega.$$

Akcijo S lahko torej zapišemo kot

$$S = - \sum \int mc ds - \frac{1}{c^2} \int A_i j^i d\Omega - \frac{1}{16\pi c} \int F_{ik} F^{ik} d\Omega. \quad (28.6)$$

§29 Ohranitvena enačba

Časovno spreminjanje naboja, vsebovanega v izbranem območju prostora, določimo z odvodom

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV.$$

Po drugi strani pa je sprememba naboja na enoto časa določena tudi s količino naboja, ki na enoto časa zapusti izbrano območje ali pa vanj vstopi. Količina naboja, ki na enoto časa preide skozi diferencialno ploščino $d\mathbf{f}$ na površini, ki omejuje izbrano območje, je enaka $\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$, kjer je $\mathbf{v}$ hitrost naboja v točki prostora, kjer se diferencialna ploščina $d\mathbf{f}$ nahaja. Vektor $d\mathbf{f}$ kaže v smeri zunanje normale na površino, torej v smeri normale, ki kaže v smeri stran od izbranega območja. Zato je količina $\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$ pozitivna, če naboj zapuša območje, in negativna, če naboj vanj vstopa. Celotni naboj, ki zapuša izbrano območje na enoto časa je torej $\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$, kjer integral izračunamo po celoti sklenjeni površini, ki območje omejuje.

Tako dobimo

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}. \quad (29.1)$$

Negativni predznak na desni strani dobimo zato, ker je leva stran enačbe pozitivna, če se celotni naboj v izbranem območju povečuje. Enačba (29.1) se imenuje *ohranitvena* ali *kontinuitetna enačba* (angl. *continuity equation*) in je integralski zapis zakona o ohranitvi naboja. Ker je $\rho \mathbf{v}$ gostota toka, lahko (29.1) zapišemo tudi v obliki

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \oint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}. \quad (29.2)$$

To enačbo bomo pretvorili v diferencialno obliko. Zato uporabimo Gaussov izrek

$$\oint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} = \int \nabla \cdot \mathbf{j} dV$$

in dobimo

$$\int \left(\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0.$$

Ker ta izraz velja za integracijo po poljubnem delu prostora, mora biti integrand sam enak nič:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (29.3)$$

To je kontinuitetna enačba v diferencialni obliki.

Preprosto lahko preverimo, da izraz (28.1) za ρ v obliki, zapisani s funkcijami δ , zadosti enačbi (29.3). Zaradi preprostosti predpostavimo, da imamo en sam naboj, tako da velja

$$\rho = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Tok $\mathbf{j}$ je potem

$$\mathbf{j} = e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (29.4)$$

kjer je $\mathbf{v}$ hitrost naboja. Izračunajmo odvod $\partial\rho/\partial t$. Med gibanjem naboja se spreminjajo njegove koordinate, kar pomeni, da se spreminja vektor $\mathbf{r}_0$. Zato je

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial t}.$$

Odvod $\partial\mathbf{r}_0/\partial t$ pa je kar hitrost naboja $\mathbf{v}$. Poleg tega je ρ funkcija spremenljivke $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, zato je

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}_0} = -\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}}.$$

Tako dobimo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (29.5)$$

(hitrost naboja $\mathbf{v}$ seveda ni odvisna od $\mathbf{r}$). To pa je iskana enačba (29.3).

V štiridimenzionalni obliki se ohranitvena enačba (29.3) zapiše s četvernim odvodom četverca toka:

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0. \quad (29.6)$$

V prejšnjem razdelku smo videli, da lahko naboj, ki se nahaja v celotnem prostoru, zapišemo kot

$$\frac{1}{c} \int j^i dS_i,$$

kjer integriramo po hiper-ravnini $x^0 = \text{konst}$. Ob vsakem trenutku je celotni naboj v prostoru enak integralu po drugačni hiper-ravnini, pravokotni na os x^0 . Preverilo bomo, da enačba (29.6) izraža ohranitev naboja, torej da ima integral $\int j^i dS_i$ isto vrednost, ne glede na to, po kateri ravnini $x^0 = \text{konst}$ ga izračunamo. Razliko vrednosti integralov $\int j^i dS_i$ na dveh takšnih hiper-ravninah lahko zapišemo kot $\oint j^i dS_i$, kjer integral izračunamo po celotni sklenjeni hiperploskvi, ki obkroža četverno prostornino med obema hiper-ravninama. (Ta integral

vključuje tudi integracijo po neskončno oddaljenih “stranicah” hiperploskve. Ta prispevek je enak nič, ker v neskončnosti ni nabojev.) Z uporabo Gaussovega izreka (6.15) lahko ta integral prevedemo na integral po četverni prostornini med hiper-ravninama in preverimo, da res velja

$$\oint j^i dS_i = \int \frac{\partial j^i}{\partial x^i} d\Omega = 0. \quad (29.7)$$

Opisani dokaz velja tudi za poljubno dvojico integralov $\int j^i dS_i$, pri katerih integriramo po dveh neskončno velikih hiperploskvah (ki torej nista nujno dve hiper-ravnini $x^0 = \text{konst}$), od katerih vsaka vsebuje celoten tridimenzionalni prostor. Od tod sledi, da ima integral

$$\frac{1}{c} \int j^i dS_i$$

isto vrednost (ki je enaka celotnemu naboju v prostoru), ne glede na to, po kateri hiperploskvi ga izračunamo.

Omenili smo že (glej opombo na strani 53) tesno povezavo med umeritveno invarianco enačb elektrodinamike in zakonom o ohranitvi naboja. To bomo ponovno pokazali s pomočjo izraza za akcijo v obliki (28.6). Če A_i nadomestimo z $A_i - (\partial f / \partial x^i)$, se v akciji pojavi dodatni člen

$$\frac{1}{c^2} \int j^i \frac{\partial f}{\partial x^i} d\Omega. \quad (29.8)$$

Prav zaradi zakona o ohranitvi naboja, izraženega v obliki ohranitvene enačbe (29.6), lahko ta integrand zapišemo kot četverno divergenco $\partial(fj^i)/\partial x^i$. Dobljeni integral lahko s pomočjo Gaussovega izreka pretvorimo v integral po ploskvi v neskončnosti; ko variiramo akcijo, bo zato ta integral odpadel in ne bo vplival na gibalne enačbe.

§30 Drugi par Maxwellovih enačb

Ko s pomočjo načela najmanjše akcije iščemo enačbe polja, moramo privzeti, da je gibanje delcev vnaprej podano, zato moramo variirati le potencial A^i (ki igra vlogo “koordinat” sistema); ko smo prej iskali gibalne enačbe delca, smo podobno privzeti, da je polje vnaprej podano, in smo variirali le trajektorijo delca.

Variacija prvega člena v (28.6) je zato enaka nič, v drugem členu pa ne smemo variirati toka j^l . Zato je

$$\delta S = - \int \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{c} j^i \delta A_i + \frac{1}{8\pi} F^{ik} \delta F_{ik} \right\} d\Omega = 0$$

(pri tem smo upoštevali, da je $F^{ik} \delta F_{ik} \equiv F_{ik} \delta F^{ik}$. Vstavimo $F_{ik} = \partial A_k / \partial x^i - \partial A_i / \partial x^k$ in dobimo

$$\delta S = - \int \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{c} j^i \delta A_i + \frac{1}{8\pi} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta A_k - \frac{1}{8\pi} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i \right\} d\Omega = 0.$$

V drugem členu zamenjamo indeksa i in k , po katerih je izraz seštet, potem pa nadomestimo $F^{ki} \rightarrow -F^{ik}$. Sledi

$$\delta S = - \int \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{c} j^i \delta A_i - \frac{1}{4\pi} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i \right\} d\Omega = 0.$$

Drugi člen integriramo po delih z uporabo Gaussovega izreka:

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \left\{ \frac{1}{c} j^l + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{lk}}{\partial x^k} \right\} \delta A_l d\Omega - \frac{1}{4\pi c} \int F^{lk} \delta A_l dS_k \Big| . \quad (30.1)$$

Drugi člen moramo izračunati na robu integracijskega območja. Meje integracije po koordinatah ležijo v neskončnosti, kjer je polje enako nič. Na mejah integracije po času, torej ob danem začetnem in končnem času, je variacija potencialov enaka nič, saj sta v skladu z načelom najmanjše akcije potenciala ob teh časih vnaprej podana, torej fiksna. Zato je drugi člen v (30.1) enak nič. Tako dobimo enačbo

$$\int \left(\frac{1}{c} j^i + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \right) \delta A_i d\Omega = 0.$$

Ker so variacije δA_i poljubne, morajo biti koeficienti pred δA_i enaki nič:

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i. \quad (30.2)$$

Zapišimo te štiri ($i = 0, 1, 2, 3$) enačbe v tridimenzionalni obliki. Za $i = 1$ dobimo

$$\frac{\partial F^{11}}{\partial x} + \frac{\partial F^{12}}{\partial y} + \frac{\partial F^{13}}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial F^{10}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} j^1.$$

Vstavimo vrednosti komponent F^{ik} in dobimo

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_x.$$

To enačbo, ter enačbi za $i = 2$ in $i = 3$, lahko zapišemo v obliki ene same vektorske enačbe:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (30.3)$$

Četrta enačba ($i = 0$) pa je

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho. \quad (30.4)$$

Enačbi (30.3) in (30.4) sta drugi par Maxwellovih enačb. * Vse štiri Maxwellove enačbe skupaj popolnoma določajo elektromagnetno polje in so zato osnovne enačbe teorije takšnih polj, torej *elektrodinamike*.

Zapišimo dobljeni Maxwellovi enačbi v integralni obliki. Izraz (30.4) integrirajmo po prostornini in uporabimo Gaussov izrek

$$\int \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f},$$

in dobimo

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = 4\pi \int \rho dV. \quad (30.5)$$

Pretok električnega polja skozi sklenjeno ploskev je torej enak celotnemu naboju, ki se nahaja v prostoru, ki ga ploskev omejuje, pomnoženem s 4π .

* Maxwellove enačb v obliki, ki velja za točkaste delce v elektromagnetnem polju v vakuumu, je prvi zapisal H. A. Lorentz.

Sedaj integrirajmo (30.3) po nesklenjeni ploskvi in uporabimo Stokesov izrek

$$\int \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{f} = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l},$$

in dobimo

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} + \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}. \quad (30.6)$$

Količina

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (30.7)$$

se imenuje “*premikalni tok*”. Iz enačbe (30.6), zapisane v obliki

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{f}, \quad (30.8)$$

vidimo, da je cirkulacija magnetnega polja po poljubni sklenjeni konturi enaka s $4\pi/c$ pomnoženi vsoti pravega in premikalnega toka, ki teče skozi ploskev, omejeno s konturo.

Iz Maxwellovih enačb lahko ponovno izpeljemo poznano kontinuitetno enačbo (29.3). Izračunamo divergenco obeh strani izraza (30.3) in dobimo

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \mathbf{j}.$$

Velja pa $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0$, iz (30.4) pa dobimo še $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$. Tako dobimo iz zgornje enačbe izraz (29.3). Izpeljava je preprosta tudi v štiridimenzionalni obliki. Iz izraza (30.2) dobimo

$$\frac{\partial^2 F^{ik}}{\partial x^i \partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial j^i}{\partial x^i}.$$

S simetričnim operatorjem $\partial^2/\partial x^i \partial x^k$ delujemo na antisimetrični tenzor F^{ik} , zato je leva stran identično enaka nič in dobimo kontinuitetno enačbo v štiridimenzionalni obliki (29.6).

§31 Gostota in pretok energije

Pomnožimo obe strani enačbe (30.3) z $\mathbf{E}$ in obe strani enačbe (26.1) z $\mathbf{H}$, nato pa obe seštejmo. Dobimo

$$\frac{1}{c} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - (\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})).$$

Uporabimo znano identiteto iz vektorske analize

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$$

in enačbo zapišemo v obliki

$$\frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (E^2 + H^2) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

ali

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2 + H^2}{8\pi} \right) = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \nabla \cdot \mathbf{S}. \quad (31.1)$$

Vektor

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (31.2)$$

se imenuje *Poyntingov vektor*.

Enačbo (31.1) integriramo po prostoru, nato pa drugi člen na desni strani preoblikujemo s pomočjo Gaussovega izreka. Dobimo

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV = - \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV - \oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{f}. \quad (31.3)$$

Če integriramo po celotnem prostoru, bo integral po površini odpadel, saj v neskončnosti polja ni. Poleg tega lahko integral $\int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV$ zapišemo kot vsoto po vseh nabojih $\sum e \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$ in upoštevamo (17.8):

$$e \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\text{kin}}.$$

Enačba (31.3) tako postane

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV + \sum \mathcal{E}_{\text{kin}} \right\} = 0. \quad (31.4)$$

To pomeni, da se pri izoliranem sistemu, sestavljenem iz elektromagnetnega polja in delcev v njem, količina med oklepajema v zgornji enačbi ohranja. Drugi člen v izrazu je kinetična energija (ki vključuje tudi mirovne energije vseh delcev; glej opombo na strani 52), zato je prvi člen enak energiji polja samega. Količino

$$W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \quad (31.5)$$

imenujemo *gostota energije* elektromagnetnega polja; to je energija polja na enoto prostornine.

Če integriramo po končni prostornini, potem je površinski integral v enačbi (31.3) v splošnem od nič različen in enačbo lahko zapišemo v obliki

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV + \sum \mathcal{E}_{\text{kin}} \right\} = - \oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{f}, \quad (31.6)$$

kjer moramo sedaj v drugem členu na levi sešteti le po delcih, ki se nahajajo v obravnavani prostornini. Na levi strani enačbe imamo spremembo celotne energije polja in delcev na enoto časa. Zato mora biti integral $\oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{f}$ enak pretoku energije polja skozi ploskev, ki omejuje obravnavano prostornino. Poyntingov vektor $\mathbf{S}$ je torej gostota energijskega pretoka, torej količina energije polja, ki na enoto časa preide skozi enoto površine mejne ploskve. *

§32 Napetostni tenzor

V prejšnjem razdelku smo izpeljali izraz za energijo elektromagnetnega polja. Sedaj bomo ponovno izpeljali ta izraz, ter izraz za gibalno količino polja, le da bomo tokrat uporabili enačbe v štiridimenzionalni obliki. Zaradi preprostosti bomo tukaj obravnavali polje brez

*Pri izpeljavi smo predpostavili, da v danem trenutku na sami mejni ploskvi ni nabojev. V nasprotnem primeru bi na desni strani enačbe morali dodati člen, ki opisuje pretok energije delcev, ki prečkajo to ploskev.

delcev. Ker bomo dobljene izraze uporabili tudi kasneje (pri gravitacijskem polju), bo izpeljava potekala na zelo splošen način, ne da bi se osredotočili na določen fizikalen sistem. Zato bomo obravnavali poljuben sistem, katerega integral akcije se zapiše kot

$$S = \int \Lambda \left(q, \frac{\partial q}{\partial x^i} \right) dV dt = \frac{1}{c} \int \Lambda d\Omega, \quad (32.1)$$

kjer je Λ neka funkcija količin q , ki opisujejo stanje sistema, in njihovih prvih odvodov po koordinatah in času (pri elektromagnetnem polju so količine q komponente četverca potenciala); zaradi krajšega zapisa bomo pisali eno samo količino q . Bralca naj opozorimo na to, da je $\int \Lambda dV$ Lagrangeva funkcija sistema, zato lahko funkcijo Λ smatramo za “*gostoto*” *Lagrangeve funkcije*. Sistem je izoliran, kar se matematično odraža tako, da Λ ni eksplicitno odvisna od x^i , podobno kot pri izoliranih sistemih v mehaniki, kjer Lagrangeva funkcija ni eksplicitno odvisna od časa.

“Gibalne enačbe” (torej enačbe polja, če imamo opravka s poljem) dobimo upoštevajoč načelo najmanjše akcije, po katerem moramo variirati akcijo S . Velja (tu pišemo $q_{,i} \equiv \partial q / \partial x^i$)

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{c} \int \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \delta q_{,i} \right) d\Omega \\ &= \frac{1}{c} \int \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \delta q \right) - \delta q \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \right] d\Omega = 0. \end{aligned}$$

Drugi člen pretvorimo z Gaussovim izrekom, pri integraciji po prostoru pa bo odpadel. Zato dobimo naslednje “gibalne enačbe”:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q} = 0 \quad (32.2)$$

(po ponovljenima indeksoma moramo sešteti).

Preostanek izpeljave je podoben postopku v mehaniki, s katerim dobimo enačbo o ohranitvi energije. Zapišemo

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x^i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \frac{\partial q_{,k}}{\partial x^i}.$$

Vstavimo (32.2) in upoštevamo, da je $q_{,k,i} = q_{,i,k}$. Dobimo

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \right) q_{,i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \frac{\partial q_{,i}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(q_{,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \right).$$

Zapišemo lahko

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \delta_i^k \frac{\partial \Lambda}{\partial x^k},$$

zato lahko po vpeljavi zapisa

$$T_i^k = q_{,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} - \delta_i^k \Lambda \quad (32.3)$$

zgornjo enačbo zapišemo v obliki

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0. \quad (32.4)$$

Če imamo več količin $q^{(l)}$, potem moramo namesto (32.3) pisati

$$T_i^k = \sum_l q_{,i}^{(l)} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}^{(l)}} - \delta_i^k \Lambda. \quad (32.5)$$

V §29 smo videli, da je enačba oblike $\partial A^k / \partial x^k = 0$ ekvivalentna trditvi, da se integral $\int A^k dS_k$, izračunan po hiperploskvi, ki vsebuje celotni tridimenzionalni prostor, ohranja. Takšna trditev očitno velja tudi za divergenco tenzorja; enačba (32.4) izraža dejstvo, da se vektor $P^i = \text{konst} \int T^{ik} dS_k$ ohranja.

Ta vektor lahko prepoznamo kot četverec gibalne količine sistema. Konstantni faktor pred integralom izberemo tako, da bo v skladu z našo prejšnjo definicijo časovna komponenta P^0 enaka energiji sistema, pomnoženi z $1/c$. Opazimo, da je

$$P^0 = \text{konst} \int T^{0k} dS_k = \text{konst} \int T^{00} dV,$$

če integriramo po hiperploskvi $x^0 = \text{konst}$. Iz (32.3) sledi

$$T^{00} = \dot{q} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}} - \Lambda. \quad \left(\dot{q} \equiv \frac{\partial q}{\partial t} \right)$$

Če ta izraz primerjamo z običajno enačbo, ki povezuje energijo in Lagrangevo funkcijo sistema, takoj opazimo, da je količina T^{00} energijska gostota sistema, in da je $\int T^{00} dV$ celotna energija sistema. Zato si moramo izbrati $\text{konst} = 1/c$. Končno dobimo izraz za četverec gibalne količine sistema

$$P^i = \frac{1}{c} \int T^{ik} dS_k. \quad (32.6)$$

Tenzor T^{ik} se imenuje *napetostni tenzor* (angl. *energy-momentum tensor*) sistema.

Poudariti moramo, da definicija tenzorja T^{ik} ni enolična. Ker je tenzor T^{ik} definiran z (32.3), bo tudi vsak drugi tenzor oblike

$$T^{ik} + \frac{\partial}{\partial x^l} \psi^{ikl}, \quad \psi^{ikl} = -\psi^{ilk} \quad (32.7)$$

zadostil enačbi (32.4), saj identično velja $\partial^2 \psi^{ikl} / \partial x^k \partial x^l = 0$. Četverec celotne gibalne količine sistema se ne spremeni, saj lahko s pomočjo (6.17) zapišemo

$$\int \frac{\partial \psi^{ikl}}{\partial x^l} dS_k = \frac{1}{2} \int \left(dS_k \frac{\partial \psi^{ikl}}{\partial x^l} - dS_l \frac{\partial \psi^{ikl}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2} \int \psi^{ikl} df_{kl}^*,$$

pri čemer integral na desni strani enačbe izračunamo po (običajni) ploskvi, ki "omejuje" hiperploskev, po kateri integriramo na levi strani enačbe. Ta ploskev očitno leži v neskončnosti tridimenzionalnega prostora in ker tam ni ne polja ne delcev, je ta integral enak nič. Četverec gibalne količine sistema je, tako kot to mora biti, enolično določena količina. Tenzor T^{ik} lahko enolično določimo z zahtevo, da lahko četverec vrtilne količine sistema (glej §14) zapišemo s četvercem gibalne količine kot

$$M^{ik} = \int (x^i dP^k - x^k dP^i) = \frac{1}{c} \int (x^i T^{kl} - x^k T^{il}) dS_l, \quad (32.8)$$

tako da je “gostota” vrtilne količine izražena z “gostoto” gibalne količine z običajno enačbo.

Hitro lahko poiščemo pogoj, ki mora biti izpolnjen, da bo zgornja enačba veljala. Kot že vemo, lahko zakon o ohranitvi vrtilne količine zapišemo tako, da postavimo divergenco izraza pod integralnim znakom v M^{ik} na nič:

$$\frac{\partial}{\partial x^l}(x^i T^{kl} - x^k T^{il}) = 0. \quad (32.9)$$

Upoštevamo, da velja $\partial x^i / \partial x^l = \delta_l^i$ in $\partial T^{kl} / \partial x^l = 0$, pa dobimo

$$\delta_l^i T^{kl} - \delta_l^k T^{il} = T^{ki} - T^{ik} = 0$$

ali

$$T^{ik} = T^{ki}, \quad (32.10)$$

kar pomeni, da mora biti napetostni tenzor simetričen.

Tenzor T^{ik} , definiran z enačbo (32.5), v splošnem ni simetričen, lahko pa to lastnost dosežemo s transformacijo (32.7) s primerno izbranim ψ^{ikl} . Kasneje (v §94) bomo videli, da obstaja postopek, s katerim neposredno dobimo simetričen tenzor T^{ik} .

Če integracijo v (32.6) opravimo po hiperploskvi $x^0 = \text{konst}$, potem ima P^i obliko

$$P^i = \frac{1}{c} \int T^{i0} dV, \quad (32.11)$$

pri čemer integriramo po celotnem (tridimenzionalnem) prostoru. Prostorske komponente P^i tvorijo tridimenzionalni vektor gibalne količine sistema, časovna komponenta pa je njegova energija, deljena z c . Vektor s komponentami

$$\frac{1}{c} T^{10}, \quad \frac{1}{c} T^{20}, \quad \frac{1}{c} T^{30}$$

lahko torej imenujemo “gostota gibalne količine”, količino

$$W = T^{00}$$

pa “gostota energije”.

Pomen preostalih komponent tenzorja T^{ik} lahko ugotovimo tako, da ločimo ohranitveno enačbo (32.4) na prostorski in časovni del:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha} = 0, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial T^{\alpha 0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0. \quad (32.12)$$

Ti enačbi integriramo po delu prostora s prostornino V . Prva enačba postane

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int T^{00} dV + \int \frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha} dV = 0,$$

po pretvorbi drugega integrala po Gaussovem izreku pa dobimo

$$\frac{\partial}{\partial t} \int T^{00} dV = -c \oint T^{0\alpha} df_\alpha, \quad (32.13)$$

pri čemer moramo integral na desni izračunati po mejni ploskvi, ki obkroža prostornino V (df_x, df_y, df_z so komponente tridimenzionalnega vektorja površinske ploskvice df). Izraz ne

levi je hitrost spreminjanja energije v prostornini V ; od tod je razvidno, da je izraz na desni količina energije, ki se prenese preko meje prostornine V , vektor $\mathbf{S}$ s komponentami

$$cT^{01}, \quad cT^{02}, \quad cT^{03}$$

pa je njegova gostota, torej količina energije, ki se prenese na enoto površine v enoti časa. Tako pridemo do pomembnega zaključka, da relativistična invarianca, izražena s tenzorskim značajem količin T^{ik} , avtomatično vodi k povezavi med pretokom energije in gostoto gibalne količine: gostota energijskega pretoka je enaka gostoti gibalne količine, pomnoženi z c^2 .

Iz druge enačbe (32.12) dobimo na podoben način

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{c} T^{\alpha 0} dV = - \oint T^{\alpha \beta} df_{\beta}. \quad (32.14)$$

Količina na levi strani enačbe je sprememba gibalne količine sistema v prostornini V na enoto časa, zato je $\oint T^{\alpha \beta} df_{\beta}$ gibalna količina, ki to prostornino zapusti na enoto časa. To pomeni, da komponente $T^{\alpha \beta}$ napetostnega tenzorja tvorijo tridimenzionalni tenzor gostote pretoka gibalne količine; te komponente označimo z $-\sigma_{\alpha \beta}$ *. Gostota pretoka energije je vektorska količina, zato mora biti gostota pretoka gibalne količine, ki je že sama vektor, tenzorska količina. Komponenta $T_{\alpha \beta}$ tega tenzorja je količina komponente gibalne količine v smeri osi α , ki na enoto časa preide skozi enoto površine, pravokotne na os x^{β} .

Posamezne komponente napetostnega tenzorja zapišimo še v obliki tabele:

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} W & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} \\ S_y/c & -\sigma_{yx} & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz} \\ S_z/c & -\sigma_{zx} & -\sigma_{zy} & -\sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (32.15)$$

§33 Napetostni tenzor elektromagnetnega polja

Splošne ugotovitve iz prejšnjega razdelka bomo sedaj uporabili na primeru elektromagnetnega polja. Integrand v (32.1) je pri elektromagnetnem polju

$$\Lambda = -\frac{1}{16\pi} F_{kl} F^{kl},$$

kar razberemo iz enačbe (27.4). Količine q so komponente četverca potenciala polja A_k , tako da definicija tenzorja T_l^k (32.5) postane

$$T_i^k = \frac{\partial A_l}{\partial x^i} \frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\frac{\partial A_l}{\partial x^k} \right)} - \delta_i^k \Lambda.$$

Odvode količine Λ bomo poiskali tako, da najprej izračunamo variacijo $\delta \Lambda$:

$$\delta \Lambda = -\frac{1}{8\pi} F^{kl} \delta F_{kl} = -\frac{1}{8\pi} F^{kl} \left(\delta \frac{\partial A_l}{\partial x^k} - \delta \frac{\partial A_k}{\partial x^l} \right).$$

Če zamenjamo indeksa in upoštevamo, da je $F_{kl} = -F_{lk}$, dobimo

$$\delta \Lambda = -\frac{1}{4\pi} F^{kl} \delta \frac{\partial A_l}{\partial x^k}.$$

*Tensor $\sigma_{\alpha \beta}$ se tudi imenuje napetostni tenzor (angl. *stress tensor*). Op. prev.

Od tod razberemo, da je

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\frac{\partial A_l}{\partial x^k} \right)} = -\frac{1}{4\pi} F^{kl},$$

in da je

$$T_l^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial A_l}{\partial x^i} F^{ki} + \frac{1}{16\pi} \delta_i^k F_{lm} F^{lm},$$

kar se s kontravariantnimi komponentami zapiše kot

$$T^{ik} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial A^l}{\partial x_i} F^k_l + \frac{1}{16\pi} g^{ik} F_{lm} F^{lm}.$$

Ta tenzor pa ni simetričen. Simetriziramo ga tako, da prištejemo

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial A^i}{\partial x_l} F^k_l.$$

V odsotnosti nabojev sledi iz enačbe polja (30.2) $\partial F_l^k / \partial x_l = 0$, zato je

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial A^i}{\partial x_l} F_l^k = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x^l} (A^i F^{kl}).$$

Popravek k T^{ik} je torej res oblike (32.7) in je dovoljen. Ker je $\partial A^l / \partial x_i - \partial A^i / \partial x_l = F^{il}$, tako končno dobimo naslednji izraz za napetostni tenzor elektromagnetnega polja:

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi} (-F^{il} F^k_l + \frac{1}{4} g^{ik} F_{lm} F^{lm}). \quad (33.1)$$

Ta tenzor je očitno simetričen. Poleg tega ima lastnost

$$T^i_i = 0, \quad (33.2)$$

torej je sled tenzorja enaka nič.

Zapišimo komponente tenzorja T^{ik} z jakostma električnega in magnetnega polja. Če komponente tenzorja F^{ik} zapišemo kot v (23.5), hitro ugotovimo, da je količina T^{00} enaka gostoti energije (31.5), komponente $cT^{0\alpha}$ pa so enake komponentam Poyntingovega vektorja (31.2). Prostorske komponente $T^{\alpha\beta}$ tvorijo tridimenzionalni tenzor s komponentami

$$\begin{aligned} -\sigma_{xx} &= \frac{1}{8\pi} (E_y^2 + E_z^2 - E_x^2 + H_y^2 + H_z^2 - H_x^2), \\ -\sigma_{xy} &= -\frac{1}{4\pi} (E_x E_y + H_x H_y), \end{aligned}$$

in tako naprej, kar lahko zapišemo kot

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left\{ +E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (E^2 + H^2) \right\}. \quad (33.3)$$

Ta tenzor se imenuje *Maxwellov napetostni tenzor* (angl. *Maxwell stress tensor*).

Tenzor T_{ik} diagonaliziramo tako, da se preselimo v opazovalni sistem, v katerem sta vektorja $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ (v izbrani točki prostora in v določenem trenutku) vzporedna ali v katerem je eden izmed njiju enak nič; kot že vemo iz §25, je takšna transformacija vedno možno, razen

kadar sta $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ med seboj pravokotna in enaka po velikosti. Hitro se lahko prepričamo, da bodo po takšni transformaciji edine od nič različne komponente T^{ik} enake

$$T^{00} = -T^{11} = T^{22} = T^{33} = W$$

(če v smeri polja kaže os x).

Če pa sta vektorja $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ pravokotna in enako velika, potem tenzorja T^{ik} ne moremo diagonalizirati. * Od nič različne komponente so v tem primeru

$$T^{00} = T^{33} = T^{30} = W$$

(os x kaže v smeri polja $\mathbf{E}$, os y pa v smeri polja $\mathbf{H}$).

Do sedaj smo obravnavali polja v odsotnosti nabojev. Ko imamo opravka tudi z naboji, je napetostni tenzor sistema enak vsoti napetostnega tenzorja elektromagnetnega polja in napetostnega tenzorja delcev (v katerem predpostavimo, da delci med seboj ne interagirajo).

Obliko napetostnega tenzorja za delce bomo določili tako, da bomo delce opisali s porazdelitvijo mase v prostoru z uporabo "gostote mase", podobno kot smo porazdelitev točkastih nabojev opisali z njihovo gostoto. Po analogiji z enačbo (28.1) za gostoto naboja lahko gostoto mase zapišemo v obliki

$$\mu = \sum_a m_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad (33.4)$$

kjer so $\mathbf{r}_a$ krajevni vektorji delcev, seštevamo pa po vseh delcih v sistemu.

"Gostota četverca gibalne količine" delcev je $\mu c u_i$. Vemo, da je ta gostota enaka komponentam $T^{0\alpha}/c$ napetostnega tenzorja, torej da velja $T^{0\alpha} = \mu c^2 u^\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$). Gostota mase pa je časovna komponenta četverca $\mu/c (dx^k/dt)$ (po analogiji z gostoto naboja; glej §28). Zato je napetostni tenzor sistema neinteragirajočih delcev enak

$$T^{ik} = \mu c \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} = \mu c u^i u^k \frac{ds}{dt}. \quad (33.5)$$

Ta tenzor je simetričen, kot smo pričakovali.

Z neposrednim izračunom preverimo, da se energija in gibalna količina sistema (ki sta definirani kot vsota energij in gibalnih količin polja in delcev) dejansko ohranjata. Preverili bomo torej enačbe

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(T^{(f)}_i{}^k + T^{(p)}_i{}^k \right) = 0, \quad (33.6)$$

ki so matematični zapis ohranitvenih zakonov.

Najprej odvajamo (33.1):

$$\frac{\partial T^{(f)}_i{}^k}{\partial x^k} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2} F^{lm} \frac{\partial F_{lm}}{\partial x^i} - \frac{\partial F_{il}}{\partial x^k} F^{kl} - \frac{\partial F^{kl}}{\partial x^k} F_{il} \right).$$

Upoštevamo Maxwellovi enačbi (26.5) in (30.2),

$$\frac{\partial F^{kl}}{\partial x^k} = \frac{4\pi}{c} j^l, \quad \frac{\partial F_{lm}}{\partial x^i} = -\frac{\partial F_{mi}}{\partial x^l} - \frac{\partial F_{il}}{\partial x^m},$$

* Dejstvo, da simetričnega tenzorja T^{ik} ne moremo vedno diagonalizirati, je povezano s psevdo-evklidskim značajem četvernega prostora. (Glej nalogo v §94.)

in ju vstavimo v zgornji izraz. Dobimo

$$\frac{\partial T^{(f)}_i{}^k}{\partial x^k} = \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial F_{mi}}{\partial x^l} F^{lm} - \frac{1}{2} \frac{\partial F_{il}}{\partial x^m} F^{lm} - \frac{\partial F_{il}}{\partial x^k} F^{kl} - \frac{4\pi}{c} F_{il} j^l \right).$$

S permutacijo indeksov lahko pokažemo, da se prvi trije členi na levi okrajšajo in dobimo naslednji rezultat:

$$\frac{\partial T^{(f)}_i{}^k}{\partial x_k} = -\frac{1}{c} F_{ik} j^k. \quad (33.7)$$

Ko odvajamo izraz (33.5) za napetostni tenzor delcev, dobimo

$$\frac{\partial T^{(p)}_i{}^k}{\partial x^k} = cu_i \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\mu \frac{dx^k}{dt} \right) + \mu c \frac{dx^k}{dt} \frac{\partial u_i}{\partial x^k}.$$

Prvi člen v tem izrazu je enak nič, ker se masa neinteragirajočih delcev ohranja. Količine $\mu(dx^k/dt)$ so namreč četverec "masnega toka", ki je analogen četvercu toka naboja (28.2); ohranitev mase matematično izrazimo tako, da mora biti divergenca tega četverca enaka nič:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\mu \frac{dx^k}{dt} \right) = 0, \quad (33.8)$$

podobno kot smo ohranitev naboja zapisali z enačbo (29.6).

Velja torej

$$\frac{\partial T^{(p)}_i{}^k}{\partial x^k} = \mu c \frac{dx^k}{dt} \frac{\partial u_i}{\partial x^k} = \mu c \frac{du_i}{dt}.$$

Sedaj uporabimo gibalne enačbe nabojev v polju, zapisane v četverni obliki (23.4)

$$mc \frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c} F_{ik} u^k.$$

Če želimo to enačbo prepisati v obliko, ki velja za zvezno porazdelitev naboja in mase, moramo upoštevati, da iz definicij gostot μ in ρ sledi $\mu/m = \rho/e$. Zato lahko gibalno enačbo zapišemo kot

$$\mu c \frac{du_i}{ds} = \frac{\rho}{c} F_{ik} u^k$$

ali

$$\mu c \frac{du_i}{dt} = \frac{1}{c} F_{ik} \rho u^k \frac{ds}{dt} = \frac{1}{c} F_{ik} j^k.$$

Zato je

$$\frac{\partial T^{(p)}_i{}^k}{\partial x^k} = \frac{1}{c} F_{ik} j^k. \quad (33.9)$$

To prištejemo k (33.7) in res dobimo nič, torej smo dokazali enačbo (33.6).

NALOGA

NALOGA Kako se ob Lorentzevi transformaciji spremenijo gostota energije, gostota pretoka energije in komponente napetostnega tenzorja?

Rešitev: Naj se koordinatni sistem K' giblje glede na sistem K vzdolž osi x s hitrostjo V . Z uporabo enačb iz prve naloge, § 6, pretvorimo simetrični tenzor T^{ik} in dobimo:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left(W' + \frac{V}{c^2} S'_x - \frac{V^2}{c^2} \sigma'_{xx} \right), \\ S_x &= \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left[\left(1 + \frac{V^2}{c^2} \right) S'_x - V W' - V \sigma'_{xx} \right], \\ S_y &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} (S'_y - V \sigma'_{xy}), \\ \sigma_{xx} &= \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left(\sigma'_{xx} - 2 \frac{V}{c^2} S'_x - \frac{V^2}{c^2} W' \right), \\ \sigma_{yy} &= \sigma'_{yy}, \quad \sigma_{zz} = \sigma'_{zz}, \quad \sigma_{yz} = \sigma'_{yz}, \\ \sigma_{xy} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \left(\sigma'_{xy} - \frac{V}{c^2} S'_y \right) \end{aligned}$$

ter analogne enačbe za S_x in σ_{xz} .

§34 Virialni izrek

Ker je vsota diagonalnih elementov napetostnega tenzorja elektromagnetnega polja enaka nič, je vsota T_i^i sistema interagirajočih delcev enaka sledi napetostnega tenzorja delcev samih. Iz (33.5) dobimo

$$T_i^i = T^{(p)i}_i = \mu c u_i u^i \frac{ds}{dt} = \mu c \frac{ds}{dt} = \mu c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Zapišimo ta rezultat še drugače, tako da upoštevamo vse delce v sistemu, pri čemer μ pišemo kot vsoto (33.4):

$$T_i^i = \sum_a m_a c^2 \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a). \quad (34.1)$$

Iz te enačbe tudi sledi, da za poljuben sistem velja

$$T_i^i \geq 0, \quad (34.2)$$

pri čemer enakost velja le za elektromagnetna polja brez nabojev.

Oglejmo si izoliran sistem nabitih delcev, ki se gibljejo po poteh končnega obsega, tako da imajo vse količine (koordinate, gibalne količine), ki opisujejo sistem, končne vrednosti. *

Izračunamo povprečje po času enačbe (32.12)

$$\frac{1}{c} \frac{\partial T^{\alpha 0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{\alpha \beta}}{\partial x^\beta} = 0$$

*Ob tem tudi predpostavimo, da elektromagnetno polje sistema v neskončnosti pada zadosti hitro proti nič. V nekaterih primerih ta zahteva pomeni, da moramo zanemariti elektromagnetno valovanje, ki ga sistem seva.

Povprečna vrednost odvoda $\partial T^{\alpha 0}/\partial t$ je enaka nič, kot to velja za povprečno vrednost odvoda poljubne omejene količine. * Tako dobimo

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} \overline{T_\alpha^\beta} = 0.$$

Enačbo pomnožimo z x^α in jo integriramo po celotnem prostoru. Integral pretvorimo z uporabo Gaussovega izreka, pri čemer upoštevamo, da je v neskončnosti $T_\alpha^\beta = 0$, zaradi česar površinski integral odpade:

$$\int x^\alpha \frac{\partial \overline{T_\alpha^\beta}}{\partial x^\beta} dV = - \int \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} \overline{T_\alpha^\beta} dV = - \int \delta_\alpha^\beta \overline{T_\alpha^\beta} dV = 0,$$

ali

$$\int \overline{T_\alpha^\alpha} dV = 0. \quad (34.3)$$

Ta rezultat uporabimo pri izračunu integrala količine $\overline{T_i^i} = \overline{T_\alpha^\alpha} + \overline{T_0^0}$:

$$\int \overline{T_i^i} dV = \int \overline{T_0^0} dV = \mathcal{E},$$

kjer je $\mathcal{E}$ celotna energija sistema.

Končno vstavimo (34.1) in dobimo

$$\mathcal{E} = \sum_a m_a c^2 \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}. \quad (34.4)$$

Ta izraz je relativistična posplošitev *virialnega izreka* (angl. *virial theorem*) iz klasične mehanike (glej *Mehanika*, §10). Če se vsi delci gibljejo počasi, dobimo

$$\mathcal{E} - \sum_a m_a c^2 = - \sum_a \frac{\overline{m_a c_a^2}}{2},$$

kar pomeni, da je celotna energija (brez mirovnih energij delcev) enaka povprečni vrednosti kinetične energije z nasprotnim predznakom – to je v skladu z rezultatom klasičnega virialnega izreka za sistem nabitih delcev, ki interagirajo v skladu s Coulombovim zakonom.

Poudariti moramo, da so te enačbe zelo formalne in jih moramo zato bolj podrobno opredeliti. Težave je v tem, da energija elektromagnetnega polja vsebuje člene, ki dajo neskončen prispevek k elektromagnetni lastni energiji točkastih nabojev (glej §37). Te člene moramo izpustiti, če naj imajo naši izrazi kakšen pomen, saj je lastna (intrinzična) elektromagnetna energija že upoštevana pri kinetični energiji delca (9.4). To pomeni, da moramo v enačbi (34.4) “renormalizirati” energijo po predpisu

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} - \sum_a \int \frac{\mathbf{E}_a^2 + \mathbf{H}_a^2}{8\pi} dV,$$

* Naj bo $f(t)$ omejena funkcija. Povprečna vrednost odvoda df/dt po časovnem intervalu T je

$$\overline{\frac{df}{dt}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{df}{dt} dt = \frac{f(T) - f(0)}{T}.$$

Ker je $f(t)$ omejena funkcija, T pa narašča prek vseh meja, je povprečna vrednost odvoda df/dt očitno enaka nič.

ker sta $\mathbf{E}_a$ in $\mathbf{H}_a$ polji, ki jih ustvarja a -ti delec. Podobno moramo v enačbi (34.3) narediti popravek *

$$\int T_a^a dV \rightarrow \int T_a^a dV + \sum_a \int \frac{\mathbf{E}_a^2 + \mathbf{H}_a^2}{8\pi} dV.$$

§35 Napetostni tenzor makroskopskih teles

Poleg napetostnega tenzorja sistema točkastih teles (33.5) bomo potrebovali še izraz za ta tenzor za makroskopska telesa, ki jih bomo smatrali kot zvezna.

Pretok gibalne količine skozi diferencialno ploskvico df na površini telesa je kar enak sili, ki na to ploskvico deluje. Zato je $-\sigma_{\alpha\beta} df_\beta$ α -ta komponenta sile, ki deluje na ploskvico. Vpeljimo opazovalni sistem, v katerem izbrana diferencialna prostornina telesa miruje. V takšnem sistemu velja Pascalov zakon, zato se pritisk p prenaša enako v vse smeri in povsod povzroča sile, ki so pravokotne na ploskvico, na katero deluje. † Napišemo lahko torej $\sigma_{\alpha\beta} df_\beta = -p df_\alpha$, zato je napetostni tenzor enak $\sigma_{\alpha\beta} = -p\delta_{\alpha\beta}$. Komponente $T^{\alpha 0}$, ki predstavljajo gostoto gibalne količine, so v izbranem opazovalnem sistemu enake nič. Komponenta T^{00} je gostota energije telesa, ki jo označimo z ϵ ; ϵ/c^2 je torej gostota mase telesa, torej masa na enoto prostornine. Poudarimo naj, da imamo tu v mislih enoto "lastne" prostornine, torej prostornine v opazovalnem sistemu, v katerem izbrani del telesa miruje.

V obravnavanem opazovalnem sistemu ima napetostni tenzor izbranega dela telesa obliko

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (35.1)$$

Sedaj lahko preprosto določimo izraz za napetostni tenzor v poljubnem opazovalnem sistemu. V ta namen vpeljemo četverno hitrost u^i makroskopskega gibanja izbranega dela telesa. V mirovnem sistemu tega dela telesa velja $u^i = (1, 0)$. Izraz za T^{ik} mora biti izbran tako, da bo v mirovnem sistemu imel obliko (35.1). Hitro se prepričamo, da zahtevano velja za

$$T^{ik} = (p + \epsilon)u^i u^k - pg^{ik}, \quad (35.2)$$

ali v mešanih komponentah

$$T_i^k = (p + \epsilon)u_i u^k - p\delta_i^k.$$

To je napetostni tenzor za makroskopsko telo. Izrazi za gostoto energije W , vektor pretoka

*Brez te spremembe je izraz

$$-\int T_a^a dV = \int \frac{\mathbf{E}_a^2 + \mathbf{H}_a^2}{8\pi} dV + \sum_a \frac{m_a v_a^2}{\sqrt{1 - v_a^2/c^2}}$$

striktno pozitiven in ne more biti enak nič.

†Strogo vzeto Pascalov zakon velja le v tekočinah in plinih. Vseeno pa so pri trdih telesih največje možne razlike v napetosti v različnih smereh zanemarljive v primerjavi z napetostmi, ki igrajo vlogo v teoriji relativnosti, zato ta podrobnost ni pomembna.

energije $\mathbf{S}$ in napetostni tenzor $\sigma_{\alpha\beta}$ so

$$\begin{aligned} W &= \frac{\epsilon + p \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \\ \mathbf{S} &= \frac{(p + \epsilon)\mathbf{v}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \\ \sigma_{\alpha\beta} &= -\frac{(p + \epsilon)v_\alpha v_\beta}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - p\delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (35.3)$$

Če je hitrost makroskopskega gibanja v majhna v primerjavi s svetlobno hitrostjo, potem približno velja

$$\mathbf{S} = (p + \epsilon)\mathbf{v}.$$

Ker je $\mathbf{S}/c^2$ gostota gibalne količine, je od tod razvidno, da vsota $(p + \epsilon)/c^2$ igra vlogo gostote mase telesa.

Izraz za T^{ik} se poenostavi, ko so hitrosti vseh delcev, iz katerih je sestavljeno telo, majhne v primerjavi s svetlobno hitrostjo (hitrost makroskopskega gibanja samega je lahko poljubna). V tem primeru lahko v gostoti energije ϵ zanemarimo vse člene, ki so manjši od mirovne energije, zato lahko namesto ϵ pišemo $\mu_0 c^2$, kjer je μ_0 vsota mas vseh delcev, ki se nahajajo v enoti (lastne) prostornine telesa (naj poudarimo, da se v splošnem μ_0 razlikuje od dejanske gostote mase telesa ϵ/c^2 , h kateri prispeva tudi energija mikroskopskega gibanja delcev v telesu ter energija njihovih medsebojnih interakcij). Tudi pritisk, ki ga določa energija mikroskopskega gibanja molekul, je v tem primeru majhen v primerjavi z mirovno energijo $\mu_0 c^2$. Zato lahko zapišemo

$$T^{ik} = \mu_0 c^2 u^i u^k. \quad (35.4)$$

Iz izraza (35.2) dobimo

$$T_i^i = \epsilon - 3p. \quad (35.5)$$

Splošna lastnost (34.2) napetostnega tenzorja poljubnega sistema nam da naslednjo neenačbo med pritiskom in gostoto makroskopskega telesa, ki mora vedno veljati:

$$p < \epsilon/3. \quad (35.6)$$

Primerjajmo izraz (35.5) s splošno enačbo (34.1), ki velja za poljuben sistem. Ker tu obravnavamo makroskopsko telo, moramo izračunati povprečje izraza (34.1) po vseh vrednostih $\mathbf{r}$ v enoti prostornine. Dobimo

$$\epsilon - 3p = \sum_a m_a c^2 \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} \quad (35.7)$$

(seštevamo po vseh delcih v enoti prostornine).

Desna stran enačbe gre proti nič v ultrarelativističnem približku, zato je v tej limiti enačba stanja enaka *

$$p = \frac{\epsilon}{3}. \quad (35.8)$$

*Limitno enačbo smo tu dobili ob predpostavki, da med delci deluje elektromagnetna interakcija. Predpostavili bomo (ko bomo izraz potrebovali v 14. poglavju), da enačba velja tudi za druge interakcije med delci, čeprav do danes to še ni dokazano.

Enačbo bomo uporabili na primeru idealnega plina, ki ga tvorijo enaki delci. Ker delci idealnega plina med seboj ne interagirajo, lahko uporabimo izraz (33.5) in izračunamo njegovo povprečno vrednost. Tako dobimo

$$T^{ik} = nmc \frac{\overline{dx^i}}{dt} \frac{dx^k}{ds},$$

kjer je n število delcev na enoto prostornine, črta pa označuje računanje povprečne vrednosti po vseh delcih. Če se plin ne giblje makroskopsko, velja za T^{ik} tudi izraz (35.1). S primerjavo obeh enačb dobimo naslednja izraza:

$$\epsilon = nm \left(\frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right), \quad p = \frac{nm}{3} \left(\frac{v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (35.9)$$

Ti enačbi izražata gostoto in pritisk relativističnega idealnega plina s hitrostjo delcev: druga enačba ustreza dobro poznani enačbi $p = nm\overline{v^2}/3$ iz nerelativistične kinetične teorije plinov.

Poglavje 5

Statično elektromagnetno polje

§36 Coulombov zakon

V primeru časovno nespremenljivega električnega (*elektrostatičnega*) polja se Maxwellove enačbe zapišejo kot

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (36.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (36.2)$$

Električno polje $\mathbf{E}$ lahko izrazimo s skalarnim potencialom samim (vektorski potencial ni potreben):

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi. \quad (36.3)$$

Enačbo (36.3) vstavimo v (36.1) in dobimo enačbo, ki ji mora zadostiti potencial statičnega električnega polja:

$$\Delta\phi = -4\pi\rho. \quad (36.4)$$

Ta enačba se imenuje *Poissonova enačba*. V vakuumu, torej za $\rho = 0$, je potencial rešitev *Laplaceove enačbe*

$$\Delta\phi = 0. \quad (36.5)$$

Iz zadnje enačbe med drugim sledi, da potencial električnega polja nikjer ne more imeti maksimuma niti minimuma. Potencial ϕ ima ekstremno vrednost, če so vsi prvi odvodi ϕ po koordinatah enaki nič, vsi drugi odvodi $\partial^2\phi/\partial x^2$, $\partial^2\phi/\partial y^2$ in $\partial^2\phi/\partial z^2$ pa morajo biti istega predznaka. To pa ni mogoče, saj tedaj ne bi mogli zadostiti enačbi (36.5).

Izračunajmo polje, ki ga proizvaja točkast naboj. S simetrijskega vidika je očitno, da bo polje kazalo v smeri krajevnega vektorja iz točke, v kateri se nahaja naboj e . Prav tako takoj uvidimo, da je vrednost polja E lahko odvisna le od razdalje od naboja R . Absolutno vrednost bomo dobili z uporabo enačbe (36.1) v integralski obliki (30.5). Pretok električnega polja skozi sferično ploskev s polmerom R in s središčem v naboju je $4\pi R^2 E$; ta pretok mora biti enak $4\pi e$. Od tod dobimo

$$E = \frac{e}{R^2}.$$

Z vektorji enačbo zapišemo v obliki

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3}. \quad (36.6)$$

Polje, ki ga proizvaja točkast naboj, je torej obratno sorazmerno s kvadratom razdalje od naboja. To je *Coulombov zakon*. Potencial polja je

$$\phi = \frac{e}{R}. \quad (36.7)$$

V sistemu nabojev je polje po načelu superpozicije enako vsoti polj, ki jih ustvarjajo posamezni delci. Potencial takšnega polja je

$$\phi = \sum_a \frac{e_a}{R_a},$$

kjer je R_a razdalja od naboja e_a do točke, v kateri določamo potencial. Če vpeljemo gostoto naboja ρ , lahko to enačbo zapišemo v obliki

$$\phi = \int \frac{\rho}{R} dV, \quad (36.8)$$

kjer je R razdalja diferencialne prostornine dV do izbrane točke v polju.

Omenimo še matematični izraz, ki ga dobimo iz (36.4), če vstavimo vrednosti ρ in ϕ za točkast naboj, torej $\rho = e\delta(\mathbf{r})$ in $\phi = e/R$. Od tod sledi

$$\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}). \quad (36.9)$$

§37 Elektrostatična energija nabojev

Izračunajmo energijo sistema nabojev. Začnimo z energijo polja, torej z izrazom (31.5) za gostoto energije. Energija sistema nabojev je enaka

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV,$$

kjer je $\mathbf{E}$ polje, ki ga naboji proizvajajo, integriramo pa po celotnem prostoru. Vstavimo $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ in preoblikujemo:

$$U = -\frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \cdot \nabla\phi dV = -\frac{1}{8\pi} \int \nabla \cdot (\mathbf{E}\phi) dV + \frac{1}{8\pi} \int \phi \nabla \cdot \mathbf{E} dV.$$

Po Gaussovemu izreku je prvi integral enak integralu $\mathbf{E}\phi$ po površini, ki omejuje integracijsko območje, ker pa prvotni integral računamo po celotnem prostoru, in ker je polje v neskončnosti enako nič, je ta integral enak nič. V drugi integral vstavimo $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ in dobimo naslednji izraz za energijo sistema nabojev:

$$U = \frac{1}{2} \int \rho\phi dV. \quad (37.1)$$

Za sistem točkastih nabojev e_a lahko namesto integrala zapišemo vsoto po nabojih

$$U = \frac{1}{2} \sum_a e_a \phi_a, \quad (37.2)$$

kjer je ϕ_a potencial polja, ki ga ustvari vsi naboji, v točki, kjer se nahaja naboj e_a .

Če to enačbo uporabimo za en sam osnovni nabiti delec (na primer za elektron) in za polje, ki ga ta naboj ustvarja, ugotovimo, da ima naboj "lastno"-potencialno energijo, enako $e\phi/2$, kjer je ϕ potencial polja, ki ga ustvarja delec, v točki, kjer se delec nahaja. Iz teorije relativnosti vemo, da moramo vsak osnovni delec obravnavati kot točkast delec. Potencial njegovega polja $\phi = e/R$ postane neskončen v točki $R = 0$. Iz elektrodinamike naj bi torej sledilo, da ima elektron neskončno "lastno energijo" (angl. *self-energy*) in zato tudi neskončno maso. Ta rezultat je seveda nesmiseln, kar pomeni, da že iz osnovnih načel elektrodinamike same sledi dejstvo, da je uporaba te teorije omejena.

Zaradi neskončnosti lastne energije in mase je v okviru klasične elektrodinamike nemogoče zastaviti vprašanje, ali je celotna masa elektrona elektrodinamskega izvora (torej povezana z elektromagnetno lastno energijo delca). *

Ker je fizikalno nesmiselna neskončna lastna energija osnovnega delca povezana z dejstvom, da moramo takšen delec smatrati za točkast delec, lahko zaključimo, da ima elektrodinamika kot logično zaključena fizikalna teorija notranje neskladnosti, ko nas zanimajo zelo majhne razdalje. Zanima nas, kako velika je mejna razdalja. Ocenimo dobimo, če opazimo, da bi elektromagnetna lastna energija elektrona morala biti velikostnega reda mirovne energije mc^2 . Po drugi strani, če bi elektron smatrali za telo s polmerom R_0 , bi bila njegova potencialna energija reda e^2/R_0 . Iz zahteve, da sta ti količini istega velikostnega reda, dobimo oceno

$$R_0 \sim \frac{e^2}{mc^2}. \quad (37.3)$$

Ta velikost (*klasični polmer elektrona*) določa mejo veljavnosti elektrodinamike za elektron, in sledi iz osnovnih načel teorije. V mislih pa moramo vseeno imeti dejstvo, da do mej veljavnosti klasične elektrodinamike pridemo že prej zaradi kvantnih učinkov. †

Vrnimo se k enačbi (37.2). Potenciali ϕ_a , ki se tam pojavljajo, so po Coulombskem zakonu enaki

$$\phi_a = \sum \frac{e_b}{R_{ab}}, \quad (37.4)$$

kjer je R_{ab} razdalja med nabojema e_a in e_b . Izraz za energijo (37.2) je sestavljen iz dveh delov. Prvi je neskončna konstanta, lastna energija vseh nabojev, ki ni odvisna od njihove medsebojne oddaljenosti. Drugi del pa je energija interakcij med delci, ki je odvisna od njihovih položajev. Samo ta drugi del je fizikalno zanimiv. Enak je

$$U' = \frac{1}{2} \sum e_a \phi'_a, \quad (37.5)$$

kjer je

$$\phi'_a = \sum_{b \neq a} \frac{e_b}{R_{ab}} \quad (37.6)$$

potencial v točki naboja e_a , ki ga ustvarjajo vsi naboji razen e_a . Z drugimi besedami, napišemo lahko

$$U' = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}}. \quad (37.7)$$

* Povsem formalno bi lahko dosegli končno elektronsko maso, če bi vpeljali neskončno negativno maso, ki ne bi bila elektromagnetnega izvora in ki bi uravnovesila neskončno elektromagnetno maso (to se imenuje "masna renormalizacija"). Pozneje (v §75) bomo videli, da to ne odstrani vseh notranjih neskladnosti klasične elektrodinamike.

† Kvantni učinki postanejo pomembni pri dolžinah velikostnega reda $\hbar/mc$, kjer je $\hbar$ Planckova konstanta. Razmerje med temi dolžinami in R_0 je reda $\hbar c/e^2 \sim 137$.

Posebni primer je energija interakcije med dvema nabojema, ki je enaka

$$U' = \frac{e_1 e_2}{R_{12}}. \quad (37.8)$$

§38 Polje enakomerno premočrtno gibajočega se naboja

Izračunajmo polje, ki ga ustvari naboj e , ki se giblje enakomerno premočrtno s hitrostjo V . Laboratorijski sistem imenujmo K ; opazovalni sistem, ki se giblje skupaj z nabojem, pa naj bo sistem K' . Naboj se nahaja v izhodišču sistema K' . Sistem K' se giblje vzdolž osi X glede na sistem K ; osi Y in Z sta vzporedni z osmi Y' in Z' . Ob času $t = 0$ izhodišči obeh sistemov sovpadata. Koordinate naboja v sistemu K so torej $x = Vt, y = 0, z = 0$. V sistemu K' imamo statično električno polje z vektorskim potencialom $\mathbf{A}' = 0$ in skalarnim potencialom $\phi' = e/R'$, kjer je $R'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$. V sistemu K v skladu z enačbo (24.1) velja

$$\phi = \frac{\phi'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{e}{R' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (38.1)$$

Sedaj moramo R' zapisati s koordinatami x, y, z sistema K . Po enačbah za Lorentzevo transformacijo je

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

od koder dobimo

$$R'^2 = \frac{(x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^2 (y^2 + z^2)}{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (38.2)$$

To vstavimo v (38.1) in dobimo

$$\phi = \frac{e}{R^*}, \quad (38.3)$$

kjer smo vpeljali zapis

$$R^{*2} = (x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) (y^2 + z^2). \quad (38.4)$$

Vektorski potencial v sistemu K je enak

$$\mathbf{A} = \phi \frac{\mathbf{V}}{c} = \frac{e\mathbf{V}}{cR^*}. \quad (38.5)$$

V sistemu K' magnetnega polja $\mathbf{H}'$ ni, električno polje pa je enako

$$\mathbf{E}' = \frac{e\mathbf{R}'}{R'^3}. \quad (38.6)$$

Iz enačbe (24.2) dobimo

$$E_x = E'_x = \frac{ex'}{R'^3}, \quad E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{ey'}{R'^3 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$E_z = \frac{ez'}{R'^3 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Ko izrazimo R', x', y', z' z x, y, z , dobimo

$$\mathbf{E} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \frac{e\mathbf{R}}{R^{*3}}, \quad (38.7)$$

kjer je $\mathbf{R}$ krajevni vektor od naboja e do točke s koordinatami x, y, z (njegove komponente so $x - Vt, y, z$).

Vektor $\mathbf{E}$ lahko zapišemo tudi drugače, če vpeljemo kot θ med smerjo gibanja in krajevnim vektorjem $\mathbf{R}$. Očitno je $y^2 + z^2 = R^2 \sin^2 \theta$, zato lahko R^{*2} zapišemo kot

$$R^{*2} = R^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right). \quad (38.8)$$

Tako lahko polje $\mathbf{E}$ zapišemo v obliki

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{R^2} \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}}. \quad (38.9)$$

Pri konstantni oddaljenosti R od naboja, se jakost polja E povečuje, ko θ narašča od 0 do $\pi/2$ (oziroma ko θ pada od π do $\pi/2$). Polje v smeri gibanja ($\theta = 0, \pi$) je najmanjše, njegova jakost je

$$E_{\parallel} = \frac{e}{R^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right). \quad (38.10)$$

Polje je največje pravokotno na smer gibanja ($\theta = \pi/2$) in ima jakost

$$E_{\perp} = \frac{e}{R^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (38.11)$$

Z naraščajočo hitrostjo je $E_{\parallel}$ vedno manjši, $E_{\perp}$ pa vedno večji. To lahko bolj slikovito opišemo, če si predstavljamo, da se električno polje gibajočega se naboja "skrči" v smeri gibanja. Pri hitrostih V , ki so blizu svetlobne, je števec v izrazu (38.9) skoraj enak nič v ozkem intervalu vrednosti θ okoli $\theta = \pi/2$. Širina tega intervala je velikostnega reda

$$\Delta\theta \sim \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (38.12)$$

Električno polje zelo hitrega naboja pri dani razdalji od njega je veliko le za majhen pas kotov v bližini ekvatorialne ravnine, širina tega intervala pa pada z naraščajočim V kot $\sqrt{1 - V^2/c^2}$.

Magnetno polje v sistemu K je

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{E} \quad (38.13)$$

[glej (24.5)]. Če je $V \ll c$, potem je električno polje približno podano z Coulombovim zakonom, $\mathbf{E} = e\mathbf{R}/R^3$, magnetno polje pa je tedaj enako

$$\mathbf{H} = \frac{e}{c} \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{R}}{R^3}. \quad (38.14)$$

NALOGA

NALOGA Izračunaj silo (v sistemu K) med nabojema, ki se gibljeta z enako hitrostjo V .

Rešitev: Silo $\mathbf{F}$ bomo določili tako, da bomo izračunali silo, ki deluje na enega izmed nabojev (e_1) v polju, ki izvira iz drugega naboja (e_2). Z uporabo (38.10) dobimo

$$\mathbf{F} = e_1 \mathbf{E}_2 + \frac{e_1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{H}_2 = e_1 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \mathbf{E}_2 + \frac{e_1}{c^2} \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{E}_2).$$

V enačbo vstavimo izraz (38.9) za $\mathbf{E}_2$ in dobimo komponente sile v smeri gibanja (F_x) in pravokotno nanjo (F_y):

$$F_x = \frac{e_1 e_2}{R} \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \cos \theta}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{3/2}}, \quad F_y = \frac{e_1 e_2}{R} \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^2 \sin \theta}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{3/2}},$$

kjer je $\mathbf{R}$ krajevni vektor, ki kaže od e_2 proti e_1 , θ pa je kot med $\mathbf{R}$ in $\mathbf{V}$.

§39 Gibanje v Coulombskem polju

Obravnavajmo gibanje delca z maso m in nabojem e v polju, ki ga proizvaja drugi delec e' : predpostavili bomo, da je masa drugega delca tako velika, da je ta nepremičen. Naloga se torej poenostavi na opis gibanja naboja e v središčno simetričnem električnem polju s potencialom $\phi = e'/r$.

Celotna energija $\mathcal{E}$ delca je

$$\mathcal{E} = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2} + \frac{\alpha}{r},$$

kjer je $\alpha = ee'$. Če v ravnini gibanja delca vpeljemo polarne koordinate, potem lahko uporabimo izraz, poznan iz mehanike,

$$p^2 = (M^2/r^2) + p_r^2,$$

kjer je p_r radialna komponenta gibalne količine, M pa je konstantna vrtilna količina delca. Zapišemo lahko

$$\mathcal{E} = c \sqrt{p_r^2 + \frac{M^2}{r^2} + m^2 c^2} + \frac{\alpha}{r}. \quad (39.1)$$

Zanima nas, če lahko delec med gibanjem pride poljubno blizu središča. To seveda ni mogoče, če se naboja e in e' odbijata, torej če sta e in e' istega predznaka. Če se delca privlačita (e in e' sta tedaj nasprotnih predznakov), potem se delec ne more poljubno približati središču, če je $Mc > |\alpha|$, saj je v tem primeru prvi člen v (39.1) vedno večji od drugega, in ko gre $r \rightarrow 0$, postane desna stran enačbe neskončna. Če pa je $Mc < |\alpha|$, potem ostane ta izraz končen tudi v limiti $r \rightarrow 0$ (p_r mora pri tem iti proti neskončnosti). Torej če velja

$$cM < |\alpha|, \quad (39.2)$$

lahko delec med gibanjem "pade" proti naboju, ki ga privlači. V klasični mehaniki takšen kolaps v splošnem ni mogoč (razen v primeru $M = 0$, ko se delec e giblje v ravni črti proti delcu e').

Popolnega opisa gibanja naboja v Coulombskem polju se najlaže lotimo s Hamilton-Jacobijevo enačbo. Izberemo si polarne koordinate r, ϕ v ravnini gibanja. Hamilton-Jacobijevo enačbo (16.11) zapišemo kot

$$-\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\alpha}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 + m^2 c^2 = 0.$$

Iščemo S oblike

$$S = -\mathcal{E}t + M\phi + f(r),$$

kjer sta $\mathcal{E}$ in M konstantna energija in konstantna vrtilna količina delca. Formalna rešitev enačbe je

$$S = -\mathcal{E}t + M\phi + \int \sqrt{\frac{1}{c^2} \left(\mathcal{E} - \frac{\alpha}{r} \right)^2 - \frac{M^2}{r^2} - m^2 c^2} dr. \quad (39.3)$$

Tirnico delca dobimo iz enačbe $\partial S / \partial M = \text{konst.}$ Z integracijo enačbe (39.3) dobimo naslednje možne tirnice:

a) Če je $Mc > |\alpha|$,

$$(c^2 M^2 - \alpha^2) \frac{1}{r} = c \sqrt{(M\mathcal{E})^2 - m^2 c^2 (M^2 c^2 - \alpha^2)} \cos \left(\phi \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{c^2 M^2}} \right) - \mathcal{E}\alpha. \quad (39.4)$$

b) Če je $Mc < |\alpha|$,

$$(\alpha^2 - M^2 c^2) \frac{1}{r} = \pm \sqrt{(M\mathcal{E})^2 + m^2 c^2 (\alpha^2 - M^2 c^2)} \cosh \left(\phi \sqrt{\frac{\alpha^2}{c^2 M^2} - 1} \right) + \mathcal{E}\alpha. \quad (39.5)$$

c) Če je $Mc = |\alpha|$,

$$\frac{2\mathcal{E}\alpha}{r} = \mathcal{E}^2 - m^2 c^4 - \phi^2 \left(\frac{\mathcal{E}\alpha}{cM} \right)^2. \quad (39.6)$$

Integracijska konstanta se skriva v poljubni izbiri polpremise, glede na katero merimo kot ϕ .

V (39.4) nedoločenost predznaka pred kvadratnim korenom ni pomembna, saj enačba že vsebuje poljubno izhodišče za merjenje kota ϕ , ki nastopa v funkciji $\cos$. V primeru privlačnega potenciala ($\alpha < 0$) in če je $\mathcal{E} < mc^2$, celotna tirnica delca leži pri končnih vrednostih r (gibanje je omejeno). Če pa je $\mathcal{E} > mc^2$, potem lahko r postane neskončen (gibanje je neomejeno). Omejeno gibanje ustreza gibanju po zaključeni tirnici (elipsi) v nerelativistični mehaniki. Iz (39.4) je razvidno, da v relativistični mehaniki tirnica nikoli ne more biti zaključena; ko se kot ϕ spremeni za 2π , se vrednost r ne vrne k svoji začetni vrednosti. Orbita niso elipse, temveč imajo obliko nezaključenih "rozet". Medtem ko imajo v nerelativistični mehaniki delci z omejenim gibanjem v Coulombskem polju zaključene tirnice, v relativistični mehaniki Coulombsko polje te lastnosti nima več.

V (39.5) moramo izbrati pozitivni predznak, če je $\alpha < 0$, in negativni predznak, če je $\alpha > 0$ [obratna izbira predznakov bi pomenila, da smo spremenili predznak korena v (39.1)].

Če je $\alpha < 0$, sta tirnici (39.5) in (39.6) spirali, pri katerih gre $r \rightarrow 0$, ko gre $\phi \rightarrow \infty$. Čas, ki ga delec porabi, da "pade" v izhodišče koordinatnega sistema, je končen. To lahko preverimo, če upoštevamo, da je časovna odvisnost koordinate r določena z enačbo $\partial S / \partial \mathcal{E} = \text{konst.}$; ko vstavimo (39.4), vidimo, da je čas določen z integralom, ki konvergira, ko r teži k 0.

NALOGA

NALOGA 1. Za koliko se odkloni delec, ki potuje skozi odbojno Coulombsko polje ($a > 0$)?

Rešitev: Odklonski kot χ je enak $\chi = \pi - 2\phi_0$, kjer je $2\phi_0$ kot med obema asimptotama na trajektorijo (39.4). Dobimo

$$\chi = \pi - \frac{2cM}{\sqrt{c^2M^2 - a^2}} \tan^{-1} \left(\frac{v\sqrt{c^2M^2 - a^2}}{ca} \right),$$

pri čemer je v hitrost naboja v neskončnosti.

NALOGA 2. Izračunaj efektivni sipalni presek za majhne kote pri sipanju delcev v Coulombskem polju.

Rešitev: Efektivni sipalni presek $d\sigma$ je razmerje med številom delcev, ki se sipajo vsako sekundo v izbrani diferencialni prostorski kot $d\chi$, in gostoto toka vpadnih delcev (torej številom delcev, ki vsako sekundo preidejo en kvadratni centimeter ploskve, ki je pravokotna na curek delcev).

Ker je kot χ , za katerega se delci odklonijo med njihovo potjo skozi polje, določen s *parametrom trka* (angl. *impact parameter*) ρ (to je razdalja od središča do daljice, po kateri bi se delec gibal v odsotnosti polja), velja

$$d\sigma = \pi\rho d\rho = 2\pi\rho \frac{d\rho}{d\chi} d\chi = \rho d\rho \frac{d\chi}{\sin\chi},$$

kjer je $d\chi = 2\pi \sin\chi d\chi$. * Odklonski kot je (za majhne kote) približno enak razmerju med spremembo gibalne količine in njene začetne vrednosti. Sprememba gibalne količine je enaka integralu po času sile, ki deluje na delec, v smeri pravokotni na smer gibanja; sila je približno enaka $(a/r^2) \cdot (\rho/r)$. Tako dobimo

$$\chi = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\rho dt}{(\rho^2 + v^2t^2)^{3/2}} = \frac{2a}{p\rho v}$$

(v je hitrost delcev). Od tod dobimo efektivni sipalni presek za majhne χ :

$$d\sigma = 4 \left(\frac{a}{pv} \right)^2 \frac{d\chi}{\chi^4}.$$

V nerelativističnem primeru je $p \approx mv$ in izraz postane enak tistemu, ki ga dobimo iz Rutherfordove formule [†] za majhne χ .

§40 Dipolni moment

Imejmo sistem delcev, ki proizvajajo polje. Zanima nas polje pri velikih razdaljah, torej pri razdaljah, ki so velike v primerjavi z razsežnostjo sistema.

Vpeljimo koordinatni sistem z izhodiščem v poljubni točki znotraj sistema nabojev. Naj bodo krajevni vektorji posameznih nabojev $\mathbf{r}_a$. Potencial polja v točki $\mathbf{R}_0$ je

$$\phi = \sum_a \frac{e_a}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_a|} \quad (40.1)$$

(seštevamo po vseh nabojih); vektor $\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_a$ je vektor med nabojem e_a in točko, v kateri določamo potencial.

Zanima nas razvoj tega izraza za velike $\mathbf{R}_0$ ($\mathbf{R}_0 \gg \mathbf{r}_a$). Izraz zato razvijemo po potencah $\mathbf{r}_a/R_0$ s pomočjo enačbe

$$f(\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_a) = f(\mathbf{R}_0) - \mathbf{r} \cdot \nabla f(\mathbf{R}_0)$$

*Glej *Mehanika*, § 18.

†Glej *Teorija polja*, § 19.

(v gradientu odvajamo po koordinatah vektorja $\mathbf{R}_0$). Do členov prvega reda velja

$$\phi = \frac{\sum e_a}{R_0} - \sum e_a \mathbf{r}_a \cdot \nabla \frac{1}{R_0}. \quad (40.2)$$

Vsota

$$\mathbf{d} = \sum e_a \mathbf{r}_a \quad (40.3)$$

se imenuje *dipolni moment* sistema nabojev. Pomembna je ugotovitev, da v električno nevtralnem sistemu, ko je vsota vseh nabojev $\sum e_a$ enaka nič, dipolni moment ni odvisen od izbire izhodišča koordinatnega sistema. Če sta namreč krajevna vektorja $\mathbf{r}_a$ in $\mathbf{r}'_a$ istega naboja v dveh različnih koordinatnih sistemih povezana z

$$\mathbf{r}'_a = \mathbf{r}_a + \mathbf{a},$$

kjer je $\mathbf{a}$ nek konstantni vektor, potem je v primeru, ko je $\sum e_a = 0$, dipolni moment enak v obeh sistemih:

$$\mathbf{d}' = \sum e_a \mathbf{r}'_a = \sum e_a \mathbf{r}_a + \mathbf{a} \sum e_a = \mathbf{d}.$$

Če z $e_a^+, \mathbf{r}_a^+$ oziroma z $e_a^-, \mathbf{r}_a^-$ označimo pozitivne oziroma negativne naboje sistema in njihove krajevne vektorje, potem lahko dipolni moment zapišemo kot

$$\mathbf{d} = \sum e_a^+ \mathbf{r}_a^+ - \sum e_a^- \mathbf{r}_a^- = \mathbf{R}^+ \sum e_a^+ - \mathbf{R}^- \sum e_a^-, \quad (40.4)$$

kjer sta

$$\mathbf{R}^+ = \frac{\sum e_a^+ \mathbf{r}_a^+}{\sum e_a^+}, \quad \mathbf{R}^- = \frac{\sum e_a^- \mathbf{r}_a^-}{\sum e_a^-} \quad (40.5)$$

krajevna vektorja “središč naboja” pozitivnih in negativnih nabojev. Če je $\sum e_a^+ = \sum e_a^- = e$, potem je

$$\mathbf{d} = e \mathbf{R}_{+-}, \quad (40.6)$$

kjer je $\mathbf{R}_{+-} = \mathbf{R}^+ - \mathbf{R}^-$ krajevni vektor med središčem negativnih in središčem pozitivnih nabojev. V posebnem primeru, ko imamo le dva naboja, je $\mathbf{R}_{+-}$ krajevni vektor med njima.

Če je sistem nevtralen, potem je potencial polja takšnega sistema pri velikih razdaljah enak

$$\phi = -\mathbf{d} \cdot \nabla \frac{1}{R_0} = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{R}_0}{R_0^3}. \quad (40.7)$$

Jakost polja je

$$\mathbf{E} = -\nabla \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{R}_0}{R_0^3} = -\frac{1}{R_0^3} \nabla (\mathbf{d} \cdot \mathbf{R}_0) - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{R}_0) \nabla \frac{1}{R_0^3},$$

kar je enako

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{R_0^3}, \quad (40.8)$$

kjer je $\mathbf{n}$ enotski vektor v smeri $\mathbf{R}_0$. Uporaben je tudi drugačen zapis,

$$\mathbf{E} = (\mathbf{d} \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{R_0}. \quad (40.9)$$

Potencial polja daleč stran od nevtralnega sistema nabojev je obratno sorazmeren s kvadratom razdalje, jakost polja pa je obratno sorazmerna s tretjo potenco razdalje. Polje je osno simetrično v smeri vektorja $\mathbf{d}$. V ravnini, v kateri leži ta vektor (tu predpostavimo, da kaže v smeri osi z), so komponente vektorja $\mathbf{E}$ enake

$$E_z = d \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{R_0^3}, \quad E_x = d \frac{3 \sin \theta \cos \theta}{R_0^3}, \quad E_y = 0. \quad (40.10)$$

Radialna in tangentska komponenta sta

$$E_R = d \frac{2 \cos \theta}{R_0^3}, \quad E_\theta = -d \frac{\sin \theta}{R_0^3}. \quad (40.11)$$

§41 Multipolni momenti

V razvoju potenciala po potencah $1/R_0$,

$$\phi = \phi^{(0)} + \phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \dots, \quad (41.1)$$

je člen $\phi^{(n)}$ sorazmeren z $1/R_0^{n+1}$. Ugotovili smo že, da je prvi člen določen z vsoto vseh nabojev; drugi člen $\phi^{(1)}$, ki ga imenujemo dipolni potencial sistema, je določen z dipolnim momentom sistema.

Tretji člen v razvoju je

$$\phi^{(2)} = \frac{1}{2} \sum e x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \left(\frac{1}{R_0} \right), \quad (41.2)$$

kjer seštevamo po vseh nabojih (indeks, ki šteje delce, v enačbi izpuščamo); x_α so komponente vektorja $\mathbf{r}$, X_α pa komponente vektorja $\mathbf{R}_0$. Ta del potenciala imenujemo *kvadrupolni potencial*. Če je sistem električno nevtralen in nima dipolnega momenta, potem je to prvi člen v razvoju, ki je različen od nič.

V izrazu (41.2) nastopa šest količin $\sum e x_\alpha x_\beta$. Hitro se lahko prepričamo, da je polje odvisno le od petih neodvisnih količin. To je posledica tega, da je funkcija $1/R_0$ rešitev Laplaceove enačbe,

$$\Delta \left(\frac{1}{R_0} \right) = \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \left(\frac{1}{R_0} \right) = 0.$$

Zato lahko $\phi^{(2)}$ zapišemo v obliki

$$\phi^{(2)} = \frac{1}{2} \sum e \left(x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3} r^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \left(\frac{1}{R_0} \right).$$

Tenzor

$$D_{\alpha\beta} = \sum e (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \quad (41.3)$$

se imenuje *kvadrupolni moment* sistema. Iz definicije tenzorja $D_{\alpha\beta}$ je razvidno, da je vsota diagonalnih elementov enaka nič:

$$D_{\alpha\alpha} = 0. \quad (41.4)$$

Zato ima simetrični tenzor $D_{\alpha\beta}$ vsega pet neodvisnih komponent. S pomočjo $D_{\alpha\beta}$ lahko zapišemo

$$\phi^{(2)} = \frac{D_{\alpha\beta}}{6} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \left(\frac{1}{R_0} \right). \quad (41.5)$$

Če izračunamo odvod

$$\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X^\beta} \frac{1}{R_0} = \frac{3X_\alpha X_\beta}{R_0^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{R_0^3},$$

in upoštevamo, da je $\delta_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta} = D_{\alpha\alpha} = 0$, potem lahko potencial zapišemo v obliki

$$\phi^{(2)} = \frac{D_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}{2R_0^3}. \quad (41.6)$$

Tenzor $D_{\alpha\beta}$ lahko diagonaliziramo tako kot vsak drug simetričen tridimenzionalni tenzor. Zaradi pogoja (41.4) bosta neodvisni le dve lastni vrednosti. Če ima sistem nabojev simetrijsko os (na primer os Z)^{*}, potem mora ta os biti ena izmed glavnih osi tenzorja $D_{\alpha\beta}$, izbira drugih dveh v ravnini XY pa je poljubna. Lastne vrednosti so med seboj povezane z

$$D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2}D_{zz}. \quad (41.7)$$

Komponento D_{zz} označimo z D (v tem primeru jo imenujemo kar kvadrupolni moment). Potencial lahko zapišemo kot

$$\phi^{(2)} = \frac{D}{4R_0^3}(3\cos^2\theta - 1) = \frac{D}{2R_0^3}P_2(\cos\theta), \quad (41.8)$$

kjer je θ kot med vektorjem $\mathbf{R}_0$ in osjo Z , P_2 pa je Legendrov polinom.

Če je sistem električno nevtralen in nima dipolnega momenta, potem lahko hitro dokažemo, da kvadrupolni moment sistema ni odvisen od izbire koordinatnega izhodišča, podobno kot smo to pokazali za dipolni moment v prejšnjem razdelku.

Na podoben način lahko zapišemo naslednje člene v razvoju (41.1). Člen l -tega reda zapišemo s tenzorjem reda l (ki se imenuje tenzor 2^l -polnega moment). Ta je simetričen v vseh svojih indeksih in je enak nič, če ga skrčimo po poljubnem paru indeksov; pokažemo lahko, da ima takšen tenzor $2l + 1$ med seboj neodvisnih komponent.[†]

Splošni člen v razvoju potenciala bomo zapisali v drugačni obliki z uporabo dobro poznane enakosti iz teorije krogelnih harmoničnih funkcij:

$$\frac{1}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}|} = \frac{1}{\sqrt{R_0^2 + r^2 - 2rR_0 \cos\chi}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{R_0^{l+1}} P_l(\cos\chi), \quad (41.9)$$

kjer je χ kot med $\mathbf{R}_0$ in $\mathbf{r}$. Vpeljemo prostorska kota Θ, Φ in θ, ϕ , ki določata smer vektorjev $\mathbf{R}_0$ in $\mathbf{r}$ glede na koordinatne osi, in uporabimo adicijski izrez za krogelne harmonične funkcije:

$$P_l(\cos\chi) = \sum_{m=-l}^l l \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} P_l^{|m|}(\cos\Theta) P_l^{|m|}(\cos\theta) e^{-im(\Phi-\phi)}, \quad (41.10)$$

kje so P_l^m pridruženi Legendrovi polinomi.

Vpeljimo še krogelne funkcije[‡]

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^m i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}, \quad m \geq 0, \quad (41.11)$$

$$Y_{l,-|m|}(\theta, \phi) = (-1)^{l-m} Y_{l,|m|}^*.$$

^{*}Simetrijska os mora biti višja od drugega reda.

[†]Takšen tenzor imenujemo *irreducibilen* tenzor. Ker dobimo pri vsaki skrčitvi nič, iz takšnega tenzorja ne moremo sestaviti tenzorjev nižjega reda.

[‡]Ta definicija je takšna, kot jo uporabljamo v kvantni mehaniki.

Razvoj (41.9) lahko potem zapišemo v obliki

$$\frac{1}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{r^l}{R_0^{l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\Theta, \Phi) Y_{lm}(\theta, \phi).$$

Ta razvoj naredimo v vsakem izmed členov v (40.1) in dobimo naslednji izraz za l -ti člen razvoja potenciala:

$$\phi^{(l)} = \frac{1}{R_0^{l+1}} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Q_m^{(l)} Y_{lm}^*(\Theta, \Phi), \quad (41.12)$$

kjer je

$$Q_m^{(l)} = \sum e_a r_a^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}(\theta_a, \phi_a). \quad (41.13)$$

Skupina $2l+1$ količin $Q_m^{(l)}$ tvorijo 2^l -polni moment sistema nabojev.

Tako definirane količine $Q_m^{(1)}$ so povezane s komponentami dipolnega momenta:

$$Q_0^{(1)} = id_z, \quad Q_{\pm 1}^{(1)} = \mp \frac{i}{\sqrt{2}} (d_x \pm id_y). \quad (41.14)$$

Količine $Q_m^{(2)}$ so povezane s komponentami tenzorja $D_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} Q_0^{(2)} &= -\frac{1}{2} D_{zz}, \quad Q_{\pm 1}^{(2)} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} (D_{xz} \pm iD_{yz}), \\ Q_{\pm 2}^{(2)} &= -\frac{1}{2\sqrt{6}} (D_{xx} - D_{yy} \pm 2iD_{xy}). \end{aligned} \quad (41.15)$$

NALOGA

NALOGA Izračunaj kvadrupolni moment enakomerno navitega elipsoida glede na njegovo središče.

Rešitev: Vsoto v (41.3) zamenjamo z integralom po prostornini elipsoida in dobimo

$$D_{xx} = \rho \iiint (2x^2 - y^2 - z^2) dx dy dz, \quad \text{etc.}$$

Izberemo si koordinatne osi vzdolž osi elipsoida, izhodišče pa postavimo v njegovo središče; iz simetrije je razvidno, da so te osi lastne osi tenzorja $D_{\alpha\beta}$. S transformacijo

$$x = x'a, \quad y = y'b, \quad z = z'c$$

integral po prostornini elipsoida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

poenostavimo na integral po prostornini enotske krogle

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Tako dobimo

$$\begin{aligned} D_{xx} &= \frac{e}{5} (2a^2 - b^2 - c^2), \quad D_{yy} = \frac{e}{5} (2b^2 - a^2 - c^2), \\ D_{zz} &= \frac{e}{5} (2c^2 - a^2 - b^2), \end{aligned}$$

kjer je $e = (4\pi/3)abc\rho$ celotni naboj elipsoida.

§42 Sistem nabojev v zunanjem polju

Oglejmo si sistem nabojev v zunanjem električnem polju. Potencial zunanjega polja označimo z $\phi(\mathbf{r})$. Potencialna energija vsakega izmed nabojev je $e_a \phi(\mathbf{r}_a)$, celotna potencialna energija pa je

$$U = \sum_a e_a \phi(\mathbf{r}_a). \quad (42.1)$$

Vpeljimo nov koordinatni sistem, ki ima izhodišče v poljubni točki v sistemu nabojev; $\mathbf{r}_a$ je krajevni vektor naboja e_a v teh koordinatah.

Predpostavimo, da se zunanje polje le malo spremeni na območju, kjer se nahajajo naboji, in da je torej tam približno homogeno (kvazi-homogeno). Tedaj lahko energijo U razvijemo po potencah $\mathbf{r}_a$:

$$U = U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} + \dots; \quad (42.2)$$

prvi člen v razvoju je

$$U^{(0)} = \phi_0 \sum e_a, \quad (42.3)$$

kjer je ϕ_0 vrednost potenciala v izhodišču. V tem približku je energija sistema takšna, kot če bi se vsi naboji nahajali v eni sami točki (v izhodišču).

Drugi člen razvoja je

$$U^{(1)} = (\nabla \phi)_0 \cdot \sum e_a \mathbf{r}_a.$$

Če v to enačbo vstavimo jakost polja v izhodišču, $\mathbf{E}_0$, in dipolni moment sistema, $\mathbf{d}$, dobimo

$$U^{(1)} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0. \quad (42.4)$$

Celotna sila, ki deluje na sistem v zunanjem kvazi-homogenem polju, je do tega reda enaka

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}_0 \sum e_a + [\nabla(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E})]_0.$$

Če je sistem nevtralen, prvi člen odpade, in dobimo

$$\mathbf{F} = (\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{E}, \quad (42.5)$$

kar pomeni, da silo določa prvi odvod jakosti polja, izračunan v izhodišču. Navor sil, ki delujejo na sistem, je

$$\mathbf{K} = \sum (\mathbf{r}_a \times e_a \mathbf{E}_0) = \mathbf{d} \times \mathbf{E}_0, \quad (42.6)$$

in je v najnižjem redu določen z jakostjo polja samega.

Imejmo dva električno nevtralna sistema nabojev z dipolnima momentoma $\mathbf{d}_1$ in $\mathbf{d}_2$. Njuna medsebojna oddaljenost naj bo velika v primerjavi z njunimi lastnimi dimenzijami. Izračunali bomo njuno potencialno energijo zaradi elektrostatične interakcije, U . Mislimo si, da je eden izmed sistemov v polju drugega. Tedaj je

$$U = -\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{E}_1,$$

kjer je $\mathbf{E}_1$ polje prvega sistema. Vstavimo (40.8) namesto $\mathbf{E}_1$ in dobimo

$$U = \frac{(\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2)R^2 - 3(\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{R})(\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{R})}{R^5}, \quad (42.7)$$

kjer je $\mathbf{R}$ vektor, ki iz enega sistema kaže proti drugemu.

Ko ima eden izmed sistemov celotni naboj različen od nič (e), velja

$$U = e \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{R}}{R}, \quad (42.8)$$

kjer je $\mathbf{R}$ vektor, ki kaže od dipola proti naboju.

Naslednji člen v razvoju (42.1) je

$$U^{(2)} = \frac{1}{2} \sum e x_{\alpha} x_{\beta} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}}.$$

Podobno kot v §41 tudi tu izpuščamo indeks, ki šteje delce; vrednost drugega odvoda izračunamo v izhodišču. Potencial ϕ je rešitev Laplaceve enačbe:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_{\alpha}^2} = \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} = 0.$$

Zapišemo lahko torej

$$U^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \sum e \left(x_{\alpha} x_{\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} r^2 \right)$$

ali

$$U^{(2)} = \frac{D_{\alpha\beta}}{6} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}}. \quad (42.9)$$

Splošni člen v vrsti (42.2) lahko zapišemo z 2^l -polnim momentom $D_m^{(l)}$, ki smo ga definirali v prejšnjem razdelku. V ta namen razvijemo potencial $\phi(\mathbf{r})$ po krogelnih harmoničnih funkcijah; splošna oblika razvoja je

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} r^l \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (42.10)$$

kjer so r, θ, ϕ krogelne koordinate točke, a_{lm} pa so konstante. Če izračunamo vsoto (42.1) in pri tem uporabimo definicijo (41.13), dobimo

$$U^{(l)} = \sum_{m=-l}^l a_{lm} Q_m^{(l)}. \quad (42.11)$$

§43 Statično magnetno polje

Oglejmo si magnetno polje, ki ga proizvajajo naboji, ki se gibljejo po končnih poteh: delci se ves čas nahajajo v končnem območju prostora in njihove gibalne količine so ves čas končne. Takšno gibanje je "stacionarnega" značaja, zato si bomo ogledali časovno povprečje magnetnega polja $\overline{\mathbf{H}}$, ki ga proizvajajo delci; to polje bo odvisno le od koordinat, ne pa od časa, in bo torej statično.

Enačbe za povprečno magnetno polje $\overline{\mathbf{H}}$ dobimo, če izračunamo povprečje po času Maxwellovih enačb

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Prva enačba je kar

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{H}} = 0. \quad (43.1)$$

V drugi enačbi je povprečna vrednost odvoda $\partial \mathbf{E} / \partial t$ enaka nič, saj to velja za povprečje odvoda poljubne omejene količine (glej opombo na strani 88). Zato iz druge Maxwelllove enačbe dobimo

$$\nabla \times \bar{\mathbf{H}} = \frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{j}}. \quad (43.2)$$

Ti enačbi zadostujeta, da lahko določimo statično polje $\bar{\mathbf{H}}$.

Vpeljemo povprečen vektorski potencial $\bar{\mathbf{A}}$. Podan je z enačbo

$$\nabla \times \bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{H}}.$$

To vstavimo v (43.2) in dobimo

$$\nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{A}}) + \Delta \bar{\mathbf{A}} = \frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{j}}.$$

Vemo, da vektorski potencial polja ni enolično določen, in da lahko uporabimo poljubno umeritev. Zato si izberemo takšen potencial, da velja

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{A}} = 0. \quad (43.3)$$

Vektorski potencial statičnega magnetnega polja je torej določen z

$$\Delta \bar{\mathbf{A}} = -\frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{j}}. \quad (43.4)$$

Rešitev te enačbe dobimo po analogiji z rešitvijo Poissonove enačbe (36.4) za skalarni potencial elektrostatičnega polja: tu imamo namesto gostote naboja ρ gostoto toka $\bar{\mathbf{j}}/c$. S primerjavo z rešitvijo (36.8) lahko zapišemo

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \int \frac{\bar{\mathbf{j}}}{R} dV, \quad (43.5)$$

kjer je R razdalja od izbrane točke do diferencialne prostornine dV .

V enačbi (43.5) lahko integral zapišemo kot vsoto po nabojih, če namesto $\mathbf{j}$ v enačbo vstavimo $\rho \mathbf{v}$ in upoštevamo, da so naboji točkasti. Upoštevati moramo, da je v integralu (43.5) R integracijska spremenljivka, in zato ni podvržena povprečenju. Če namesto integrala $\int \mathbf{j}/R dV$ pišemo vsoto $\sum e_a \mathbf{v}_a / R_a$, so R_a krajevni vektorji različnih delcev, ki se spreminjajo med gibanjem nabojev. Zato moramo zapisati

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \sum \frac{e_a \mathbf{v}_a}{R_a}, \quad (43.6)$$

kjer moramo izračunati povprečje celotnega izraza pod znakom za seštevanje.

Iz poznane $\bar{\mathbf{A}}$ lahko magnetno polje izračunamo po enačbi

$$\bar{\mathbf{H}} = \nabla \times \bar{\mathbf{A}} = \nabla \times \frac{1}{c} \int \frac{\bar{\mathbf{j}}}{R} dV.$$

Rotor deluje na koordinate točke, kjer nas zanima jakost polja. Zato lahko operator nesemo pod integralski znak in $\bar{\mathbf{j}}$ pri odvajanju smatramo kot konstanto. Poznana enačbo

$$\nabla \times (f \mathbf{a}) = f \nabla \times \mathbf{a} + \nabla f \times \mathbf{a},$$

kjer sta skalar f in vektor $\mathbf{a}$ poljubni funkciji, uporabimo na zmnožku $\bar{\mathbf{j}}1/R$ in dobimo

$$\nabla \times \frac{\bar{\mathbf{j}}}{R} = \nabla \frac{1}{R} \times \bar{\mathbf{j}} = \frac{\bar{\mathbf{j}} \times \mathbf{R}}{R^3}.$$

Končni rezultat je torej

$$\bar{\mathbf{H}} = \frac{1}{c} \int \frac{\bar{\mathbf{j}} \times \mathbf{R}}{R^3} dV \quad (43.7)$$

(krajevni vektor $\mathbf{R}$ kaže od diferencialne prostornine dV v izbrano točko v polju). To je *Biot-Savartov zakon*.

§44 Magnetni moment

Oglejmo si, kakšno magnetno polje proizvaja sistem nabojev, ki se gibljejo stacionarno. Zanimalo nas bo polje daleč stran od sistema.

Vpeljimo koordinatni sistem z izhodiščem v poljubni točki znotraj sistema nabojev, kot smo to storili v §40. Krajevne vektorje različnih nabojev označimo z $\mathbf{r}_a$, krajevni vektor točke, v kateri računamo polje, pa z $\mathbf{R}_0$; vektor $\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_a$ kaže od naboja e_a k točki v polju. Iz (43.6) dobimo vektorski potencial

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \sum \frac{e_a \mathbf{v}_a}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_a|}. \quad (44.1)$$

Kot v §40 ta izraz razvijemo po potencah $\mathbf{r}_a$. Do členov prvega reda dobimo (indeks delca a bomo v nadaljevanju izpuščali):

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{cR_0} \sum e \bar{\mathbf{v}} - \frac{1}{c} \sum e \mathbf{v} \left(\mathbf{r} \cdot \nabla \frac{1}{R_0} \right).$$

V prvem členu lahko zapišemo

$$\sum e \bar{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt} \sum e \mathbf{r}.$$

Povprečna vrednost odvoda količine, ki ima končen razmah, je enako nič, zato ta člen odpade. Preostali člen zapišemo kot

$$\bar{\mathbf{A}} = -\frac{1}{c} \sum e \mathbf{v} \left(\mathbf{r} \cdot \nabla \frac{1}{R_0} \right) = \frac{1}{cR_0^3} \sum e \mathbf{v} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_0).$$

Izraz bomo preoblikovali. Najprej upoštevamo, da je $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, zato lahko zapišemo

$$\sum e (\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum e \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_0) + \frac{1}{2} \sum e [\mathbf{v} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_0) - \mathbf{r} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}_0)]$$

(pri tem smo upoštevali, da je $\mathbf{R}_0$ konstanten vektor). Ko ta izraz vstavimo v $\bar{\mathbf{A}}$ prvi člen ponovno odpade (saj vsebuje odvod po času). Dobimo

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{2cR_0^3} \sum e [\mathbf{v} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_0) - \mathbf{r} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}_0)].$$

Vpeljemo vektor

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum e \mathbf{r} \times \mathbf{v}, \quad (44.2)$$

ki ga imenujemo *magnetni moment* sistema. Vektorski potencial lahko z njim zapišemo kot

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{\overline{\mathbf{m}} \times \mathbf{R}_0}{R_0^3} = \nabla \frac{1}{R_0} \times \overline{\mathbf{m}}. \quad (44.3)$$

Iz poznane vektorskega potenciala ni težko določiti magnetno polje. Uporabimo pravilo

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a} \nabla \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \nabla \cdot \mathbf{a},$$

in dobimo

$$\overline{\mathbf{H}} = \nabla \times \overline{\mathbf{A}} = \nabla \times \left(\frac{\overline{\mathbf{m}} \times \mathbf{R}_0}{R_0^3} \right) = \overline{\mathbf{m}} \nabla \cdot \frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} - (\overline{\mathbf{m}} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}.$$

Velja tudi

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} = \mathbf{R}_0 \cdot \nabla \frac{1}{R_0^3} + \frac{1}{R_0^3} \nabla \cdot \mathbf{R}_0 = 0,$$

in

$$(\overline{\mathbf{m}} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} = \frac{1}{R_0^3} (\overline{\mathbf{m}} \cdot \nabla) \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_0 (\overline{\mathbf{m}} \cdot \nabla) \frac{1}{R_0^3} = \frac{\overline{\mathbf{m}}}{R_0^3} - \frac{3\mathbf{R}_0 (\overline{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{R}_0)}{R_0^5}.$$

Končno dobimo

$$\overline{\mathbf{H}} = \frac{3\mathbf{n}(\overline{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{n}) - \overline{\mathbf{m}}}{R_0^3}, \quad (44.4)$$

kjer je $\mathbf{n}$ enotski vektor v smeri $\mathbf{R}_0$. Vidimo, da lahko magnetno polje zapišemo z magnetnim momentom z enačbo, ki je enake oblike kot tista, s katero smo električno polje zapisali z dipolnim momentom [glej (40.8)].

Če imajo vsi naboji v sistemu enako razmerje med nabojem in maso, potem velja

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum e \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{e}{2mc} \sum m \mathbf{r} \times \mathbf{v}.$$

Če hitrosti vseh nabojev veliko manjše od svetlobne hitrosti, je $m\mathbf{v}$ enak gibalni količini naboja $\mathbf{p}$ in dobimo

$$\mathbf{m} = \frac{e}{2mc} \sum \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \frac{e}{2mc} \mathbf{M}, \quad (44.5)$$

kjer je $\mathbf{M} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ mehanska vrtilna količina sistema. V tem primeru je razmerje med magnetnim momentom in vrtilno količino konstantno in znaša $e/2mc$.

NALOGA

NALOGA Določi razmerje med magnetnim momentom in vrtilno količino sistema dveh nabojev (s hitrostjo $v \ll c$).

Rešitev: Izhodišče koordinatnega sistema postavimo v težišče obeh delcev. Tedaj velja $m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0$ in $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$, kjer je $\mathbf{p}$ gibalna količina relativnega gibanja. Z uporabo teh zvez dobimo

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \left(\frac{e_1}{m_1^2} + \frac{e_2}{m_2^2} \right) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{M}.$$

§45 Larmorjev izrek

Oglejmo si sistem nabojev v zunanjem statičnem homogenem magnetnem polju.

Časovno povprečje sile, ki deluje na sistem,

$$\overline{\mathbf{F}} = \sum \frac{e}{c} \overline{\mathbf{v} \times \mathbf{H}} = \frac{d}{dt} \sum \frac{e}{c} \overline{\mathbf{r} \times \mathbf{H}},$$

je enako nič, ker po računamo povprečno vrednost časovnega odvoda količine, ki ima omejen razmah. Povprečna vrednost navora sil je

$$\overline{\mathbf{K}} = \sum \frac{e}{c} \overline{(\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}))}$$

in je različna od nič. Če razvijemo trojni vektorski produkt, jo lahko izrazimo z magnetnim momentom sistema:

$$\mathbf{K} = \sum \frac{e}{c} (\mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{H}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})) = \sum \frac{e}{c} \left(\mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}) - \frac{1}{2} \mathbf{H} \frac{d}{dt} r^2 \right).$$

Drugi člen po izračunu povprečne vrednosti odpade, tako da dobimo

$$\overline{\mathbf{K}} = \sum \frac{e}{c} \overline{\mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{H})} = \frac{1}{2c} \sum e \left(\overline{\mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{H})} - \overline{\mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{H})} \right)$$

[zadnja transformacija je analogna tisti, ki smo jo uporabili pri izpeljavi (44.2)], od koder sledi

$$\overline{\mathbf{K}} = \overline{\mathbf{m}} \times \mathbf{H}. \quad (45.1)$$

Opozorimo naj na analogijo z enačbo (42.6), ki velja za električni dipol v električnem polju.

Lagrangeva funkcija sistema nabojev v zunanjem statičnem homogenem magnetnem polju se od Lagrangeve funkcije za sistem, ki ni v polju, razlikuje za dodatni člen

$$L_H = \sum \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \sum \frac{e}{2c} (\mathbf{H} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} = \sum \frac{e}{2c} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{H} \quad (45.2)$$

[tu smo uporabili izraz (19.4) za vektorski potencial homogenega polja]. Če upoštevamo definicijo magnetnega momenta sistema, dobimo

$$L_h = \mathbf{m} \cdot \mathbf{H}. \quad (45.3)$$

Ponovno moramo poudariti analogijo z električnim poljem; v homogenem električnem polju Lagrangeva funkcija nevtralnega sistema nabojev vsebuje člen

$$L_E = \mathbf{d} \cdot \mathbf{E},$$

ki je v tem primeru enak potencialni energiji sistema nabojev, vzeti z negativnim predznakom (glej §42).

Sedaj pa obravnavajmo sistem nabojev, ki se gibljejo po končni poti (s hitrostmi $v \ll c$) v središčno simetričnem električnem polju, ki ga ustvarja nek nepremičen naboj. Iz laboratorijskega sistema se bomo preselili v sistem, ki se enakomerno vrti okoli osi, ki poteka skozi nepremičen delec. S pomočjo dobro poznane enačbe lahko hitrost delca $\mathbf{v}$ v novem koordinatnem sistemu zapišemo z njegovo hitrostjo $\mathbf{v}'$ v starem:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r},$$

kjer je $\mathbf{r}$ krajevni vektor delca, $\boldsymbol{\Omega}$ pa kotna hitrost vrtečega se koordinatnega sistema. V negibljevem sistemu je Lagrangeva funkcija sistema nabojev enaka

$$L = \sum \frac{mv'^2}{2} - U,$$

kjer je U potencialna energija nabojev v zunanem polju in energija njihovih medsebojnih interakcij. Količina U je funkcija razdalj nabojev od fiksnega delca in njihovih medsebojnih razdalj; v vrtečem se sistemu se ta funkcija ne spremeni. Zato je v novem sistemu Lagrangeva funkcija enaka

$$L = \sum \frac{m}{2}(\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - U.$$

Predpostavimo, da imajo vsi naboji enako razmerje med nabojem in maso e/m . Izberemo si

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{e}{2mc} \mathbf{H}. \quad (45.4)$$

Če je H zadosti majhen (tako da lahko zanemarimo člene z H^2), potem lahko Lagrangevo funkcijo zapišemo kot

$$L = \sum \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2c} \sum e \mathbf{H} \times \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} - U.$$

Enaka je Lagrangevi funkciji, ki opisuje gibanje nabojev v laboratorijskem koordinatnem sistemu, če je prisotno statično magnetno polje (glej (45.2)).

Zaključimo lahko, da se v nerelativističnem primeru sistem nabojev, ki imajo vsi enako razmerje e/m , in ki se gibljejo po končnih poteh v središčno simetričnem električnem polju in v šibkem homogenem magnetnem polju $\mathbf{H}$, obnaša enako kot isti sistem nabojev v istem električnem polju v koordinatnem sistemu, ki se vrtilni enakomerno s kotno hitrostjo (45.4). To je *Larmorjev izrek*, kotna hitrost $\Omega = eH/2mc$ pa se imenuje *Larmorjeva frekvenca*.

Rezultat lahko uporabimo tudi drugače. Če je magnetno polje $\mathbf{H}$ zadosti šibko, je Larmorjeva frekvenca majhna v primerjavi s frekvencami omejenega gibanja sistema nabojev. Teda si je smiselno ogledati povprečje količin, ki opisujejo sistem, po času, ki je kratek v primerjavi s periodo $2\pi/\Omega$. Te nove količine se bodo spreminjale počasi (s frekvenco Ω).

Oglejmo si spremembo povprečne vrtilne količine $\bar{\mathbf{M}}$ sistema. Časovni odvod vrtilne količine je enak navoru $\mathbf{K}$ vseh sil, ki na sistem delujejo. Upoštevajoč (45.1) tako dobimo

$$\frac{d\bar{\mathbf{M}}}{dt} = \bar{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{m}} \times \mathbf{H}.$$

Če je razmerje e/m enako pri vseh delcih sistema, potem sta vrtilna količina in magnetni moment sistema sorazmerna, in z uporabo enačb (44.5) in (45.4) dobimo

$$\frac{d\bar{\mathbf{M}}}{dt} = -\boldsymbol{\Omega} \times \bar{\mathbf{M}}. \quad (45.5)$$

Ta enačba pomeni, da se vektor $\bar{\mathbf{M}}$ (in torej tudi magnetni moment $\bar{\mathbf{m}}$) vrtilni s kotno hitrostjo $-\boldsymbol{\Omega}$ okoli smeri polja, medtem ko se njegova velikost in naklon glede na smer polja ne spreminjata. (To gibanje se imenuje *Larmorjeva precesija*.)

Poglavje 6

Elektromagnetno valovanje

§46 Valovna enačba

Elektromagnetno polje v praznem prostoru opišemo z Maxwellovimi enačbami, v katere vstavimo $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$. Zapišimo jih ponovno

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (46.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (46.2)$$

Te enačbe imajo tudi od nič različne rešitve, kar pomeni, da lahko elektromagnetno polje obstaja tudi v odsotnosti nabojev.

Elektromagnetno polje v praznem prostoru v odsotnosti nabojev se imenuje *elektromagnetno valovanje*. V nadaljevanju si bomo ogledali lastnosti takšnih valovanj.

Takoj lahko ugotovimo, da morajo takšna polja nujno biti časovno odvisna. V nasprotnem primeru bi veljalo $\partial \mathbf{H} / \partial t = \partial \mathbf{E} / \partial t = 0$, in enačbe (46.1), (46.2) bi postale enake enačbam statičnega polja (36.1), (36.2) in (43.1), (43.2), v katerih bi imeli $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$. Rešitve teh enačb so podane z (36.8) in (43.5), ki pa dasta nič, ko sta $\rho = 0$ in $\mathbf{j} = 0$.

Sedaj bomo izpeljali enačbe za potenciala elektromagnetnega valovanja.

Ko že vemo, lahko zaradi nedoločenosti potencialov vedno izberemo dodatni pogoj, ki ga morajo ti izpolniti. Zato si bomo tu izbrali takšna potenciala elektromagnetnega valovanja, da bo skalarni potencial identično enak nič:

$$\phi = 0. \quad (46.3)$$

V tem primeru je

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (46.4)$$

Ta izraza vstavimo v prvo enačbo (36.2) in dobimo

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\Delta \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}. \quad (46.5)$$

Čeprav smo si že izbrali en dodatni pogoj za potenciala, vektorski potencial $\mathbf{A}$ še vedno ni povsem določen. Lahko mu namreč dodamo gradient poljubne funkcije, ki ni odvisna od časa

(potenciala ϕ pa pri tem ne spreminjamo). Tako si lahko izberemo takšen vektorski potencial, da velja

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (46.6)$$

Če namreč vstavimo $\mathbf{E}$ iz (46.4) v $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, dobimo

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = 0,$$

kar pomeni, da je funkcija $\nabla \cdot \mathbf{A}$ odvisna le od koordinat. Vedno lahko to funkcijo postavimo na nič, če k $\mathbf{A}$ prištejemo gradient ustrezne časovno neodvisne funkcije.

Enačba (46.5) se poenostavi v

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (46.7)$$

Ta enačba določa potencial elektromagnetnega polja. Imenujemo jo *d'Alembertova* ali *valovna enačba*. *

Če na enačbo (46.7) delujemo z rotorjem oziroma z operatorjem časovnega odvoda $\partial/\partial t$, lahko preverimo, da tudi električno in magnetno polje zadostita tej enačbi.

Izpeljavo valovne enačbe bomo ponovili še v štiridimenzionalni obliki. Drugi par Maxwellovih enačb za polje v odsotnosti nabojev zapišemo v obliki

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = 0.$$

(To je enačba (30.2) z $j^i = 0$.) Vanjo vstavimo F^{ik} , zapisan s potencialom,

$$F^{ik} = \frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_k},$$

in dobimo

$$\frac{\partial^2 A^k}{\partial x_i \partial x^k} - \frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} = 0. \quad (46.8)$$

Zahtevamo dodatni pogoj za potencial:

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0. \quad (46.9)$$

(Ta pogoj se imenuje *Lorentzeva umeritev*, za potenciale, ki mu zadoščajo, pa rečemo, da so *umerjeni po Lorentzu*.) Prvi člen v (46.8) odpade, preostane pa

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} \equiv g^{kl} \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x^l} = 0. \quad (46.10)$$

To je valovna enačba, zapisana v štiridimenzionalni obliki. †

*Valovno enačbo včasih zapišemo kot $\square \mathbf{A} = 0$, operator

$$\square = -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x^i} = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

pa se imenuje *d'Alembertov operator*.

†Omenimo naj, da pogoj (46.9) še vedno ne omeji povsem možne izbire potencialov. K $\mathbf{A}$ lahko še vedno dodamo ∇f , od ϕ pa odštejemo $1/c(\partial f/\partial t)$, pri tem pa mora biti funkcija f takšna, da reši valovno enačbo $\square f = 0$.

V tridimenzionalni obliki se pogoj (46.9) glasi

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (46.11)$$

To je bolj splošen pogoj kot $\phi = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, ki smo ga uporabili predhodno; vsi potenciali, ki zadostijo temu pogojema, zadostijo tudi pogoju (46.11). Prednost Lorentzeve umeritve je v tem, da je relativistično invariantna: potenciala, ki pogoju zadostita v enem opazovalnem sistemu, mu zadostita tudi v vsakem drugem opazovalnem sistemu (pogoj (46.6) pa je ob prehodu v drug opazovalni sistem običajno prekršen).

§47 Ravno valovanje

Oglejmo si poseben primer elektromagnetnega valovanja, v katerem je polje odvisno od ene same koordinate, na primer od koordinate x (in seveda tudi od časa). Takšne valove imenujemo *ravno valovanje*. Enačba polja se v tem primeru glasi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad (47.1)$$

kjer je f katera koli komponenta vektorjev $\mathbf{E}$ ali $\mathbf{H}$.

Enačbo lahko rešimo tako, da jo zapišemo v obliki

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) f = 0$$

in uvedemo novi spremenljivki

$$\xi = t - \frac{x}{c}, \quad \eta = t + \frac{x}{c},$$

tako da velja $t = \frac{1}{2}(\eta + \xi)$ in $x = \frac{c}{2}(\eta - \xi)$. Tedaj je

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

zato lahko enačbo za f zapišemo v obliki

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Rešitev ima očitno obliko $f = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, kjer sta f_1 in f_2 poljubni funkciji. Zato je

$$f = f_1 \left(t - \frac{x}{c} \right) + f_2 \left(t + \frac{x}{c} \right). \quad (47.2)$$

Predpostavimo na primer, da je $f_2 = 0$, tako da je

$$f = f_1 \left(t - \frac{x}{c} \right).$$

Poiščimo fizikalni pomen te enačbe. V vsaki ravnini $x = \text{konst}$ se polje spreminja s časom; ob vsakem izbranem trenutku je polje različno pri različnih x . Razvidno je, da ima polje isto vrednosti pri koordinatah x in trenutkih t , za katere velja $t - (x/c) = \text{konst}$, torej

$$x = \text{konst} + ct.$$

To pomeni, da če ima ob času $t = 0$ polje v izbrani točki prostora x neko določeno vrednost, potem bo po intervalu časa t imelo polje isto vrednost pri razdalji ct vzdolž osi X od začetne točke. Rečemo lahko, da se vrednosti elektromagnetnega polja širijo po prostoru v smeri osi X s hitrostjo enako hitrosti svetlobe c .

Zato

$$f_1\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

predstavlja ravni val, ki se premika v pozitivni smeri vzdolž osi X . Hitro uvidimo, da

$$f_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

predstavlja val, ki se giblje v nasprotni (negativni) smeri vzdolž osi X .

V §46 smo pokazali, da si lahko izberemo takšna potenciala elektromagnetnega polja, da velja $\phi = 0$ in $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Takšno umeritev uporabimo tudi za obravnavo ravnega valovanja. Pogoji $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ se sedaj glasi

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = 0,$$

ker nobena količina ni odvisna od y niti od z . Iz (47.1) potem sledi $\partial^2 A_x / \partial t^2 = 0$, torej je $\partial A_x / \partial t = \text{konst.}$ Električno polje je določeno z odvodom $\partial \mathbf{A} / \partial t$, zato od nič različna komponenta A_x predstavlja prisotnost statičnega longitudinalnega električnega polja. Ker takšno polje ni povezano z valovanjem, lahko postavimo $A_x = 0$.

Vektorski potencial ravnega vala si torej lahko vedno izberemo tako, da bo pravokoten na os X , torej na smer širjenja valovanja.

Oglejmo si ravni val, ki se giblje v pozitivni smeri vzdolž osi X ; v takšnem valu so vse količine, tudi $\mathbf{A}$, odvisne le od $t - (x/c)$. Iz enačb

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A},$$

tako dobimo

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \mathbf{A}', \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \left(t - \frac{x}{c} \right) \times \mathbf{A}' = -\frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{A}', \quad (47.3)$$

kjer črtica označuje odvod po argumentu funkcije, torej po $t - (x/c)$, $\mathbf{n}$ pa je enotski vektor v smeri širjenja valovanja. Prvo enačbo vstavimo v drugo in dobimo

$$\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}. \quad (47.4)$$

Vidimo, da sta električno in magnetno polje $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ ravnega valovanja pravokotna na smer širjenja valovanja. Zato takšno elektromagnetno valovanje imenujemo *prečno* ali *transverzalno*. Iz (47.4) je razvidno tudi to, da sta električno in magnetno polje med seboj pravokotna in enaka po absolutni vrednosti.

Pretok energije (Poyntingov vektor) v ravnem valovanju je

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}),$$

in ker je $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0$, od tod sledi

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} E^2 \mathbf{n} = \frac{c}{4\pi} H^2 \mathbf{n}.$$

Energija se torej pretaka v smeri širjenja valovanja. Ker je

$$W = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2) = \frac{E^2}{4\pi}$$

gostota energija valovanja, lahko zapišemo

$$\mathbf{S} = cW\mathbf{n}, \quad (47.5)$$

kar je skladno z dejstvom, da se valovanje širi s svetlobno hitrostjo.

Gibalna količina elektromagnetnega polja na enoto prostornine je $\mathbf{S}/c^2$. Pri ravnem valovanju je enaka $(W/c)\mathbf{n}$. Naj poudarimo, da je povezava med energijo W in gibalno količino W/c elektromagnetnega valovanja enaka kot pri delcu, ki se giblje s svetlobno hitrostjo [glej (9.9)].

Pretok gibalne količine polja določajo komponente Maxwellovega napetostnega tenzorja $\sigma_{\alpha\beta}$ (33.3). Če se valovanje širi v smeri osi X , je edina od nič različna komponenta tenzorja $T^{\alpha\beta}$ enaka

$$T^{xx} = -\sigma_{xx} = W. \quad (47.6)$$

Kot smo pričakovali, se gibalna količina pretaka v smeri širjenja valovanja. Pretok je po velikosti enak gostiti energije.

Poiščimo zakon za transformacijo gostote energije ravnega elektromagnetnega valovanja ob prehodu iz enega inercialnega sistema v drugega. Izpeljavo začnemo z enačbo

$$W = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left(W' + 2\frac{V}{c^2}S'_x + \frac{V^2}{c}\sigma'_{xx} \right)$$

(glej nalogo v §33). Vanjo moramo vstaviti

$$S'_x = cW' \cos \alpha', \quad \sigma'_{xx} = -W' \cos^2 \alpha',$$

kjer je α' kot (v sistemu K') med osjo X' (v tej smeri kaže hitrost $\mathbf{V}$) in smerjo širjenja valovanja. Dobimo

$$W = W' \frac{\left(1 + \frac{V}{c} \cos \alpha'\right)^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (47.7)$$

Ker je $W = E^2/4\pi = H^2/4\pi$, se absolutna vrednost jakosti polja transformira kot $\sqrt{W}$.

NALOGE

NALOGA 1. Izračunaj, s kakšno silo deluje na steno vpadno ravno elektromagnetno valovanje, ki se od stene odbije s koeficientom odbojnosti R .

Rešitev: Sila $\mathbf{f}$, ki deluje na enoto ploščine stene, je podana z gostoto gibalne količine, torej z vektorjem s komponentami

$$f_\alpha = -\sigma_{\alpha\beta}N_\beta - \sigma'_{\alpha\beta}N_\beta,$$

kjer je $\mathbf{N}$ enotski vektor, ki leži normalno na površino stene, $\sigma_{\alpha\beta}$ in $\sigma'_{\alpha\beta}$ pa so komponente napetostnega tenzorja vpadnega in odbitega valovanja. Z uporabo enačbe (47.6) dobimo

$$\mathbf{f} = W\mathbf{n}(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}) + W'\mathbf{n}'(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}').$$

Iz definicije koeficienta odbojnosti sledi $W' = RW$. Če vpeljemo še vpadni kot θ (ki je enak odbojnemu kotu) in razpišemo komponente, dobimo silo v normalni smeri ("svetlobni tlak")

$$f_N = W(1 + R) \cos^2 \theta$$

in silo v tangentialni smeri

$$f_t = W(1 - R) \sin \theta \cos \theta.$$

NALOGA 2. S Hamilton-Jacobijevo metodo napovej, kako se bo gibal naboj v polju ravnega elektromagnetnega valovanja z vektorskim potencialom $\mathbf{A}[t - (x/c)]$.

Rešitev: Hamilton-Jacobijevo enačbo zapišemo v štiridimenzionalni obliki:

$$g^{ik} \left(\frac{\partial S}{\partial x^i} + \frac{e}{c} A_i \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^k} + \frac{e}{c} A_k \right) = m^2 c^2. \quad (1)$$

Ker je polje ravno valovanje, so A^i funkcije ene same neodvisne spremenljivke, ki jo lahko zapišemo v obliki $\xi = k_i x^i$, kjer je k^i konstantni četverec, katerega kvadrat je enak nič, $k_i k^i = 0$ (glej naslednji razdelek). Potencial naj izpolnjuje Lorentzov pogoj

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \frac{dA^I}{d\xi} k_i = 0;$$

to je ekvivalentno pogoju $A^i k_i = 0$.

Iščemo rešitev enačbe (1) oblike

$$S = -f_i x^i + F(\xi),$$

kjer je $f^i = (f^0, \mathbf{f})$ konstanten vektor, ki zadošča pogoju $f_i f^i = m^2 c^2$ ($S = -f_i k^i$ je rešitev Hamilton-Jacobijeve enačbe za prosti delec s četvercem gibalne količine $p^i = f^i$). To vstavimo v enačbo (1) in dobimo

$$\frac{e^2}{c^2} A_i A^i - 2\gamma \frac{dF}{d\xi} - \frac{2e}{c} f_i A^i = 0,$$

kjer smo vpeljali konstanto $\gamma = k_i f^i$. Iz te enačbe določimo F . Sledi

$$S = -f_i x^i - \frac{e}{c\gamma} \int f_i A^i d\xi + \frac{e^2}{2\gamma c^2} \int A_i A^i d\xi. \quad (2)$$

Preselimo se v tridimenzionalni zapis v izbranem opazovalnem sistemu, pri čemer si os X izberemo v smeri potovanja valovanja. Tedaj je $\xi = ct - x$, konstanta γ pa je enaka $\gamma = f^0 - f^1$. Če dvodimenzionalni vektor f_y, f_z označimo z $\boldsymbol{\kappa}$, iz pogoja $f_i f^i = (f^0)^2 - (f^1)^2 - \boldsymbol{\kappa}^2 - m^2 c^2$ dobimo

$$f^0 + f^1 = \frac{m^2 c^2 + \boldsymbol{\kappa}^2}{\gamma}.$$

Potenciale umerimo tako, da je $\phi = 0$, $\mathbf{A}(\xi)$ pa leži v ravnini YZ . Enačba (2) lahko potem zapišemo v obliki

$$S = \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \frac{\gamma}{2}(ct + x) - \frac{m^2 c^2 + \boldsymbol{\kappa}^2}{2\gamma} \xi + \frac{e}{c\gamma} \int \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{A} d\xi - \frac{e^2}{2\gamma c^2} \int \mathbf{A}^2 d\xi.$$

Po splošnih pravilih (glej *Mehanika*, § 47) gibanje določimo tako, da odvoda $\partial S / \partial \boldsymbol{\kappa}$ in $\partial S / \partial \gamma$ izenačimo z nekima novima konstantama, ki ju lahko s primerno izbiro izhodišča koordinatnega sistema in izhodišča za merjenje časa postavimo na nič. Tako dobimo parametrični sistem enačb s parametrom ξ :

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\gamma} \kappa_y \xi - \frac{e}{c\gamma} \int A_y d\xi, \quad z = \frac{1}{\gamma} \kappa_z \xi - \frac{e}{c\gamma} \int A_z d\xi, \\ x &= \frac{1}{2} \left(\frac{m^2 c^2 + \boldsymbol{\kappa}^2}{\gamma^2} - 1 \right) \xi - \frac{e}{c\gamma^2} \int \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{A} d\xi + \frac{e^2}{2\gamma^2 c^2} \int \mathbf{A}^2 d\xi, \quad ct = \xi + x. \end{aligned}$$

Posplošeno gibalno količino $\mathbf{P} = \mathbf{p} + (e/c)\mathbf{A}$ in energijo $\mathcal{E}$ dobimo z odvajanjem akcije po koordinatah oziroma po času:

$$\begin{aligned} p_y &= \kappa_y - \frac{e}{c}A_y, \quad p_z = \kappa_z - \frac{e}{c}A_z, \\ p_x &= -\frac{\gamma}{2} + \frac{m^2c^2 + \kappa^2}{2\gamma} - \frac{e}{c\gamma}\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{A} + \frac{e^2}{2\gamma c^2}\mathbf{A}^2, \\ \mathcal{E} &= (\gamma + p_x)c. \end{aligned}$$

Če izračunamo povprečje po času, bodo členi prvega reda po periodični funkciji $\mathbf{A}(\xi)$ odpadli. Predpostavimo, da smo si opazovalni sistem izbrali tako, da delec v njem v povprečju miruje, torej da je povprečje njegove gibalne količine enako nič. Tedaj je

$$\boldsymbol{\kappa} = 0, \quad \gamma^2 = m^2c^2 + \frac{e^2}{c^2}\overline{A^2}.$$

Končne izraze, ki določajo gibanje, lahko zapišemo kot

$$\begin{aligned} x &= \frac{e^2}{2\gamma^2c^2} \int (\mathbf{A}^2 - \overline{\mathbf{A}^2}) d\xi, \quad y = -\frac{e}{c\gamma} \int A_y d\xi, \quad z = -\frac{e}{c\gamma} \int A_z d\xi, \\ ct &= \xi + \frac{e^2}{2\gamma^2c^2} \int (\mathbf{A}^2 - \overline{\mathbf{A}^2}) d\xi; \\ p_x &= \frac{e^2}{2\gamma c^2}(\mathbf{A}^2 - \overline{\mathbf{A}^2}), \quad p_y = -\frac{e}{c}A_y, \quad p_z = -\frac{e}{c}A_z, \\ \mathcal{E} &= c\gamma + \frac{e^2}{2\gamma c}(\mathbf{A}^2 - \overline{\mathbf{A}^2}). \end{aligned}$$

§48 Monokromatsko ravno valovanje

Zelo pomemben poseben primer elektromagnetnega valovanja je valovanje, pri katerem je polje preprosta periodična funkcija časa. Takšno valovanje imenujemo *enobarvno* ali *monokromatsko*. Vse količine (potenciali, komponente polja) monokromatskega valovanja vsebujejo časovno odvisni faktor oblike $\cos(\omega t + \alpha)$. Frekvenca ω se imenuje *krožna frekvenca* (angl. *cyclic frequency*) valovanja (v nadaljevanju jo bomo imenovali kar *frekvenca*).

V valovni enačbi lahko v tem primeru drugi odvod po času zapišemo kot $\partial^2 f / \partial t^2 = -\omega^2 f$, zato je porazdelitev polja v prostoru za monokromatsko valovanje določena z enačbo

$$\Delta f + \frac{\omega^2}{c^2}f = 0. \quad (48.1)$$

Pri ravnem valovanju, ki se širi v smeri osi X , je polje odvisno le od $t - (x/c)$. Zato je v primeru monokromatskega ravnega valovanja polje preprosto kar periodična funkcija količine $t - (x/c)$. Vektorski potencial takšnega valovanja najlaže zapišemo kot realni del kompleksnega izraza:

$$\mathbf{A} = \Re \left(\mathbf{A}_0 e^{-i\omega(t - \frac{x}{c})} \right). \quad (48.2)$$

Vektor $\mathbf{A}_0$ je kompleksen konstanten vektor. Polji $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ morata imeti podobno obliko z isto frekvenco ω . Količina

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \quad (48.3)$$

se imenuje *valovna dolžina* (angl. *wavelength*); to je perioda spreminjanja polja vzdolž koordinatne osi X ob fiksnem času t .

Vektor

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n} \quad (48.4)$$

(kjer je $\mathbf{n}$ enotski vektor v smeri širjenja valovanja) se imenuje *valovni vektor*. Z njim lahko enačbo (48.2) zapišemo v obliki

$$\mathbf{A} = \Re \left(\mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right), \quad (48.5)$$

ki je neodvisna od izbire koordinatnih osi. Količina $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$ v eksponentu funkcije se imenuje *faza* valovanja.

Če uporabljamo le linearne operacije, potem lahko pisanje znaka za realni del $\Re$ opuščamo, in računamo kar s kompleksnimi količinami. * Če vstavimo

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

v (47.3), dobimo zvezo med jakostjo polja in vektorskim potencialom ravnega monokromatskega valovanja:

$$\mathbf{E} = ik\mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}. \quad (48.6)$$

Sedaj bomo bolj podrobno obravnavali smer polja monokromatskega valovanja. Ogleдали si bomo električno polje

$$\mathbf{E} = \Re \left(\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right)$$

(vse ugotovitve pa bodo seveda veljavne tudi za magnetno polje). Količina $\mathbf{E}_0$ je nek kompleksni vektor. Kvadrat $\mathbf{E}_0^2$ je (v splošnem) kompleksno število. Če je argument tega števila -2α (torej $\mathbf{E}_0^2 = |\mathbf{E}_0|^2 e^{-2i\alpha}$), potem vektor $\mathbf{b}$ definiramo z

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{b} e^{-i\alpha}. \quad (48.7)$$

Kvadrat vektorja $\mathbf{b}$ je realen, $\mathbf{b}^2 = |\mathbf{E}_0|^2$. Zapišemo lahko

$$\mathbf{E} = \Re \left(\mathbf{b} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t - \alpha)} \right). \quad (48.8)$$

Vektor $\mathbf{b}$ lahko zapišemo v obliki

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2,$$

*Če sta dve količini $\mathbf{A}(t)$ in $\mathbf{B}(t)$ zapisani v kompleksni obliki

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0 e^{-i\omega t},$$

potem moramo pri računanju njunega zmnožka seveda ločiti realni del. Pogosto pa nas zanima le časovno povprečje zmnožka, ki ga lahko izračunamo preprosto kot

$$\frac{1}{2} \Re (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^*).$$

Velja namreč

$$\Re \mathbf{A} \cdot \Re \mathbf{B} = \frac{1}{4} \left(\mathbf{A}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{A}_0^* e^{i\omega t} \right) \cdot \left(\mathbf{B}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{B}_0^* e^{i\omega t} \right).$$

Pri računanju povprečja členi s faktorjem $e^{\pm 2i\omega t}$ odpadejo, preostane pa

$$\overline{\Re \mathbf{A} \cdot \Re \mathbf{B}} = \frac{1}{4} (\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{B}_0^* + \mathbf{A}_0^* \cdot \mathbf{B}_0) = \frac{1}{2} \Re (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^*).$$

kjer sta $\mathbf{b}_1$ in $\mathbf{b}_2$ realna vektorja. Ker mora biti $\mathbf{b}^2 = \mathbf{b}_1^2 - \mathbf{b}_2^2 + 2i\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2$ realno število, sta vektorja $\mathbf{b}_1$ in $\mathbf{b}_2$ med seboj pravokotna, $\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = 0$. Naj $\mathbf{b}_1$ kaže v smeri osi Y (os X pa v smeri širjenja valovanja). Iz (48.8) tedaj sledi:

$$\begin{aligned} E_y &= b_1 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \alpha), \\ E_z &= \pm b_2 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \alpha), \end{aligned} \quad (48.9)$$

pri čemer moramo uporabiti predznak plus (oz. minus), če kaže $\mathbf{b}_2$ v pozitivni (oz. negativni) smeri vzdolž osi Z . Iz (48.9) sledi, da je

$$\frac{E_y^2}{b_1^2} + \frac{E_z^2}{b_2^2} = 1. \quad (48.10)$$

Vidimo, da se v vsaki točki v prostoru, vektor električnega polja vrti v ravnini, pravokotni na smer širjenja valovanja, pri tem pa konica vektorja opiše elipso (48.10). Takšno valovanje imenujemo *eliptično polarizirano* (angl. *elliptically polarized*). Vrtenje poteka v smeri desnega vijaka vzdolž osi X , če imamo v enačbi (48.9) pozitivni predznak, sicer pa v nasprotni smeri.

Če je $b_1 = b_2$, potem postane elipsa (48.10) krožnica: vektor $\mathbf{E}$ se vrti, ostaja pa enake velikosti. Valovanje je tedaj *krožno polarizirano* (angl. *circularly polarized*). Izbira osi Y in Z je sedaj poljubna. Omenimo lahko, da je pri takšnem valovanju razmerje med komponentama v smereh y in z kompleksne amplitude $\mathbf{E}_0$ enako

$$\frac{E_{0z}}{E_{0y}} = \pm i. \quad (48.11)$$

Predznak plus imamo v primeru vrtenja v smeri desnega vijaka (*desna polarizacija*), v nasprotnem primeru pa je predznak negativen (*leva polarizacija*). *

In končno če je ena izmed količin b_1 in b_2 enaka nič, potem je valovanje povsod in ves čas vzporedno z eno samo smerjo. V tem primeru je valovanje *linearno polarizirano* (angl. *linearly polarized* ali *plane polarized*). Eliptično polarizirano valovanje lahko smatramo kot superpozicijo dveh linearno polariziranih valovanj.

Vrnimo se k definiciji valovnega vektorja in vpeljimo štiridimenzionalni vektor s komponentami

$$k^i = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right). \quad (48.12)$$

Te količine tvorijo četverec, kar je razvidno iz tega, da dobimo skalar (fazo valovanja), če pomnožimo s četvercem x^i :

$$k_i x^i = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}. \quad (48.13)$$

Iz definicij (48.4) in (48.12) vidimo, da je kvadrat valovnega četverca enak nič:

$$k^i k_i = 0. \quad (48.14)$$

To sledi tudi iz dejstva, da je izraz

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{-ik_i x^i}$$

rešitev valovne enačbe (46.10).

*Predpostavljamo, da koordinatne osi tvorijo desni sistem.

Kot pri vsakem drugem ravnem valovanju, so tudi pri monokromatskem valovanju, ki se širi v smeri osi X , edine od nič različne komponente napetostnega tenzorja enake (glej §47):

$$T^{00} = T^{01} = T^{11} = W.$$

S pomočjo valovnega četverca lahko to enačbo zapišemo v tenzorski obliki:

$$T^{ik} = \frac{Wc^2}{\omega^2} k^i k^k. \quad (48.15)$$

S pomočjo zakona o transformaciji valovnega četverca lahko obravnavamo *Dopplerjev pojav*, pri katerem se frekvenca ω valovanja, ki ga oddaja gibajoči se vir, in kot jo izmeri mirujoči opazovalec, razlikuje od "prave" frekvence ω_0 vira v opazovalnem sistemu K_0 , v katerem vir miruje.

Naj bo V hitrost vira, torej hitrost sistema K_0 glede na sistem K . Iz splošnega pravila za transformacijo četvercev dobimo

$$k^{(0)0} = \frac{k^0 - \frac{V}{c}k^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

(hitrost sistema K glede na sistem K_0 je $-V$). Vstavimo $k^0 = \omega/c$, $k^1 = k \cos \alpha = \omega/c \cos \alpha$, kjer je α kot (v sistemu K) med smerjo oddajanja valovanja in smerjo gibanja izvora. Če ω izrazimo z ω_0 , dobimo

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c} \cos \alpha}. \quad (48.16)$$

To je iskana enačba. Pri $V \ll c$, če kot α ni blizu $\pi/2$, velja približno

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 + \frac{V}{c} \cos \alpha \right). \quad (48.17)$$

Če pa je $\alpha = \pi/2$, dobimo

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{V^2}{2c^2} \right); \quad (48.18)$$

v tem primeru je relativna sprememba frekvenca sorazmerna s kvadratom razmerja V/c .

NALOGE

NALOGA 1. Določi smeri in dolžine osi polarizacijske elipse, če poznaš kompleksno amplitudo $\mathbf{E}_0$.

Rešitev: Naloga zahteva, da določimo vektor $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2$, katerega kvadrat je realen. Iz (48.7) dobimo

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^* = b_1^2 + b_2^2, \quad \mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^* = -2i\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2, \quad (1)$$

ali

$$b_1^2 + b_2^2 = A^2 + B^2, \quad b_1 b_2 = AB \sin \delta,$$

kjer smo vpeljali zapis

$$|E_{0y}| = A, \quad |E_{0z}| = B, \quad \frac{E_{0z}}{B} = \frac{E_{0y}}{A} e^{i\delta}$$

za absolutni vrednosti od E_{0y} in E_{0z} , ter za fazno razliko δ med njima. Tedaj je

$$b_{1,2} = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \sin \delta} \pm \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \sin \delta}, \quad (2)$$

od koder dobimo velikosti polosi polarizacijske elipse.

Smeri osi (glede na poljubni začetni osi Y in Z) določimo tako, da začnemo z enakostjo

$$\Re((\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{b}_1)(\mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{b}_2)) = 0,$$

v kar se preprosto prepričamo, če v enačbo vstavimo $\mathbf{E}_0 = (\mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2)e^{-ia}$. Enakost razpišemo po koordinatah Y in Z . Tako dobimo kot θ med smerjo $\mathbf{b}_1$ in osjo Y :

$$\tan 2\theta = \frac{2AB \cos \delta}{A^2 - B^2}. \quad (3)$$

Smer sukanja polja je določen z znakom komponente v smeri X vektorja $\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2$. Uporabimo zapis iz (1)

$$2i(\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = E_{0z}E_{0y}^* - E_{0z}^*E_{0y} = |E_{0y}|^2 \left[\left(\frac{E_{0z}}{E_{0y}} \right) - \left(\frac{E_{0z}}{E_{0y}} \right)^* \right], \quad (4)$$

od koder je razvidno, da je smer $\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2$ (vzdolž osi X ali v obratni smeri) in smer sukanja (v smeri desnega ali levega vijaka v smeri osi X) podana z znakom imaginarnega dela razmerja E_{0z}/E_{0y} (ta je v prvem primeru pozitiven, v drugem pa negativen). To je posplošitev pravila (48.11) za krožno polarizacijo.

NALOGA 2. Kako se giblje nabiti delec v ravnem monokromatskem linearno polariziranem valovanju?

Rešitev: Naj polje valovanja $\mathbf{E}$ kaže v smeri osi Y , tako da velja

$$E_y = E = E_0 \cos \omega \xi, \quad A_y = A = -\frac{cE_0}{\omega} \sin \omega \xi$$

($\xi = t - x/c$). Iz enačb (3) in (4) v drugi naloga, § 47, dobimo (v opazovalnem sistemu, v katerem delec v povprečju miruje) naslednji opis gibanja s parametrom $\eta = \omega \xi$:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{e^2 E_0^2 c}{8\gamma^2 \omega^3} \sin 2\eta, \quad y = -\frac{eE_0 c}{\gamma \omega^2} \cos \eta, \quad z = 0. \\ t &= \frac{\eta}{\omega} - \frac{e^2 E_0^2}{8\gamma^2 \omega^3} \sin 2\eta, \quad \gamma^2 = m^2 c^2 + \frac{e^2 E_0^2}{2\omega^2}. \\ p_x &= -\frac{e^2 E_0^2}{4\gamma \omega^2} \cos 2\eta, \quad p_y = \frac{eE_0}{\omega} \sin \eta, \quad p_z = 0. \end{aligned}$$

NALOGA 3. Kako se giblje nabiti delec v krožno polariziranem valovanju?

Rešitev: Polje valovanja lahko zapišemo kot

$$\begin{aligned} E_y &= E_0 \cos \omega \xi, \quad E_z = E_0 \sin \omega \xi, \\ A_y &= -\frac{cE_0}{\omega} \sin \omega \xi, \quad A_z = \frac{cE_0}{\omega} \cos \omega \xi. \end{aligned}$$

Gibanje lahko opišemo z enačbami

$$\begin{aligned} x &= 0, \quad y = -\frac{ecE_0}{\gamma \omega^2} \cos \omega t, \quad z = -\frac{ecE_0}{\gamma \omega^2} \sin \omega t, \\ p_x &= 0, \quad p_y = \frac{eE_0}{\omega} \sin \omega t, \quad p_z = -\frac{eE_0}{\omega} \cos \omega t, \\ \gamma^2 &= m^2 c^2 + \frac{c^2 E_0^2}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Naboj se torej giblje v ravnini YZ po krožnici s polmerom $ecE_0/\gamma \omega^2$ z gibalno količino, ki ima konstantno velikost $p = eE_0/\omega$; smer gibalne količine $\mathbf{p}$ je ves čas nasprotna smeri magnetnega polja valovanja $\mathbf{H}$.

§49 Spektralni razcep

Vsako valovanje lahko spektralno razcepimo, kar pomeni, da ga lahko zapišemo v obliki superpozicije monokromatskih valovanj z različnimi frekvencami. Oblika razcepa je odvisna od tipa časovne odvisnosti polja.

V prvo skupino prištevamo polja, katerih razcep po frekvencah vsebuje diskretno zaporedje vrednosti. Najbolj preprost primer je povsem periodično (vendar ne monokromatsko) polje. Teda je spektralni razcep kar enak razvoju v Fourierovo vrsto in vsebuje frekvence, ki so celoštevilski večkratniki osnovne (angl. *fundamental*) frekvence $\omega_0 = 2\pi/T$, kjer je T perioda polja. Razvoj zapišemo kot

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_0 n t} \quad (49.1)$$

(kjer je f katerakoli izmed količin, ki opisujejo polje). Koeficiente f_n določimo z integrali funkcije f :

$$f_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{in\omega_0 t} dt. \quad (49.2)$$

Ker je $f(t)$ realna funkcija, mora veljati

$$f_{-n} = f_n^*. \quad (49.3)$$

V bolj zapletenih primerih razvoj vsebuje celoštevilске mnogokratnike (in vsote celoštevilskih mnogokratnikov) večjega števila nekomenzurabilnih osnovnih frekvenc.

Če vsoto (49.1) kvadriramo in izračunamo povprečje po času, nam zmnožki členov z različnima frekvencama dajo nič, saj vsebujejo nihajoče faktorje. Preostanejo le členi oblike $f_n f_{-n} = |f_n|^2$. Zato je povprečje kvadrata polja, torej povprečna jakost polja, enaka vsoti jakosti njegovih monokromatskih komponent:

$$\overline{f^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 \quad (49.4)$$

(pri tem smo predpostavili, da je povprečje funkcije f po njeni periodi enako nič, torej $f_0 = \overline{f} = 0$).

V drugo skupino spadajo polja, ki jih lahko zapišemo s Fourierevim integralom, v katerem nastopa zvezna porazdelitev po različnih frekvencah. To je mogoče le, če funkcija $f(t)$ zadosti določenim pogojem; običajno nas zanimajo funkcije, ki gredo proti nič v limiti $t \rightarrow \pm\infty$. Takšen razvoj zapišemo kot

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (49.5)$$

kjer so Fourierove komponente podane z integrali

$$f_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \quad (49.6)$$

Po analogiji z (49.3) velja

$$f_{-\omega} = f_{\omega}^*. \quad (49.7)$$

Celotno jakost valovanja, torej integral funkcije f^2 po vsem času, lahko izrazimo s Fourierjevimi komponentami. Z uporabo (49.5) in (49.6) dobimo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(f \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f e^{-i\omega t} dt \right) \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} f_{-\omega} \frac{d\omega}{2\pi},$$

s pomočjo enačbe (49.7) pa končno dobimo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f_{\omega}|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = 2 \int_0^{\infty} |f_{\omega}|^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (49.8)$$

§50 Delno polarizirana svetloba

Monokromatsko valovanje je že po sami definiciji polarizirano. Pogosto pa imamo opravka z valovanji, ki so le približno monokromatska, in ki imajo frekvence na intervalu s končno širino $\Delta\omega$. Oglejmo si takšno valovanje, ki naj ima povprečno frekvenco ω . Njegovo polje (na primer njegovo električno polje $\mathbf{E}$) v dani točki prostora zapišemo kot

$$\mathbf{E}_0(t) e^{-i\omega t},$$

kjer se kompleksna amplituda $\mathbf{E}_0(t)$ spreminja počasi s časom (pri povsem monokromatskem valovanju bi bil $\mathbf{E}_0$ konstanten). Ker $\mathbf{E}_0$ določa polarizacijo valovanja, ta zapis pomeni, da se v vsaki točki prostora polarizacija spreminja s časom. Takšno valovanje imenujemo *delno polarizirano* (angl. *partially polarized*).

Polarizacijo elektromagnetnega valovanja, še posebno svetlobe, določimo s poizkusom tako, da svetlobo spuščamo skozi različna telesa * in nato merimo jakost prepuščene svetlobe. Z matematičnega vidika to pomeni, da o polarizaciji svetlobe sklepamo na podlagi določenih kvadratnih funkcij polja. Tukaj imamo seveda opravka s časovnimi povprečji takšnih funkcij.

Kvadratne funkcije polja dobimo iz členov, ki so sorazmerni z zmnožki $E_{\alpha}E_{\beta}$, $E_{\alpha}^*E_{\beta}^*$ ali $E_{\alpha}E_{\beta}^*$. Zmnožki oblike

$$E_{\alpha}E_{\beta} = E_{0\alpha}E_{0\beta}e^{-2i\omega t}, \quad E_{\alpha}^*E_{\beta}^* = E_{0\alpha}^*E_{0\beta}^*e^{2i\omega t},$$

ki vsebujejo hitro nihajoče faktorje $e^{\pm 2i\omega t}$, pri računanju povprečja po času odpadejo. Zmnožki $E_{\alpha}E_{\beta}^* = E_{0\alpha}E_{0\beta}^*$ takšnih faktorjev ne vsebujejo, zato je njihovo povprečje različno od nič. Od tod je razvidno, da so polarizacijske lastnosti svetlobe povsem določene s tenzorjem

$$J_{\alpha\beta} = \overline{E_{0\alpha}E_{0\beta}^*}. \quad (50.1)$$

Ker vektor $\mathbf{E}_0$ vedno leži v ravnini, pravokotni na smer valovanja, ima vektor $J_{\alpha\beta}$ štiri komponente (indeksa α in β lahko zavzameta samo dve vrednosti, $\alpha, \beta = 1, 2$, ki ustrezata osem Y in Z ; pri tem smo predpostavili, da se valovanje širi v smeri osi X).

Vsota diagonalnih elementov tenzorja $J_{\alpha\beta}$ (označimo jo z J), je realna količina, enaka povprečni vrednosti kvadrata dolžine vektorja $\mathbf{E}_0$ (ali $\mathbf{E}$):

$$J \equiv J_{\alpha\alpha} = \overline{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*}. \quad (50.2)$$

*Na primer skozi Nicolovo prizmo.

Ta količina je enaka jakosti valovanja, kot jo določimo z meritvijo gostote pretoka energije. Ker ni neposredno povezana s polarizacijskimi lastnostmi, jo bomo iz obravnave izločili tako, da si namesto $J_{\alpha\beta}$ ogledamo tenzor

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{J_{\alpha\beta}}{J}, \quad (50.3)$$

katerega sled je $\rho_{\alpha\alpha} = 1$; ta tenzor imenujemo *polarizacijski tenzor*.

Iz definicije (50.1) sledi, da so komponente tenzorja $J_{\alpha\beta}$, in zato tudi tenzorja $\rho_{\alpha\beta}$, povezane preko zveze

$$\rho_{\alpha\beta} = \rho_{\beta\alpha}^* \quad (50.4)$$

(tenzor je torej sebiadjungiran). Diagonalni komponenti ρ_{11} in ρ_{22} sta zato realni (poleg tega velja še $\rho_{11} + \rho_{22} = 1$), medtem ko je $\rho_{12} = \rho_{21}^*$. Zato lahko polarizacijo opišemo s tremi realnimi parametri.

Oglejmo si, kakšen je tenzor $\rho_{\alpha\beta}$ pri povsem polarizirani svetlobi. V tem primeru je $\mathbf{E}_0 = \text{konst}$ in zapišemo lahko kar

$$J_{\alpha\beta} = J\rho_{\alpha\beta} = E_{0\alpha}E_{0\beta}^* \quad (50.5)$$

(brez računanja povprečja), zato lahko komponente tenzorja zapišemo kot zmnožek komponent nekega konstantnega vektorja. To je možno natanko takrat (potrebni in zadostni pogoj), ko je determinanta enaka nič:

$$|\rho_{\alpha\beta}| = \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}\rho_{21} = 0. \quad (50.6)$$

Nasprotni primer je nepolarizirana ali *naravna* svetloba. Popolna odsotnost polarizacije pomeni, da so vse smeri v ravnini YZ enakovredne. Polarizacijski tenzor mora zato biti oblike

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}. \quad (50.7)$$

Determinanta ima vrednost $|\rho_{\alpha\beta}| = 1/4$.

V splošnem ima determinanta vrednost med 0 in $1/4$. * *Stopnja polariziranosti* (angl. *degree of polarization*) je pozitivna količina P , definirana z

$$|\rho_{\alpha\beta}| = \frac{1}{4}(1 - P^2). \quad (50.8)$$

Zavzame lahko vrednosti med 0 za nepolarizirano in 1 za polarizirano svetlobo.

Poljubni tenzor $\rho_{\alpha\beta}$ lahko razcepimo na simetrični in antisimetrični del. Prvi del

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\rho_{\alpha\beta} + \rho_{\beta\alpha})$$

*Dejstvo, da je determinanta pozitivna za poljuben tenzor oblike (50.1), dokažemo kot sledi. Zaradi preprostosti lahko izračun povprečne vrednosti izvedemo kot seštevanje po diskretnih vrednostih. Nato upoštevamo dobro poznano algebrsko neenačbo

$$|\sum_{a,b} x_a y_b|^2 \leq \sum_a |x_a|^2 \sum_b |y_b|^2.$$

Determinanta je $\sum_a |x_a|^2 \sum_b |y_b|^2 - |\sum_{a,b} x_a y_b|^2 > 0$.

je realen, ker je $\rho_{\alpha\beta}$ sebiadjungiran tenzor. Antisimetrični del pa je iz istega razloga povsem imaginaren. Kot vsak antisimetrični tenzor istega reda, kot je število dimenzij, se tudi ta poenostavi na psevdoskalar (glej opombo na strani 22):

$$\frac{1}{2}(\rho_{\alpha\beta} - \rho_{\beta\alpha}) = -\frac{i}{2}e_{\alpha\beta}A,$$

kjer je A realen psevdoskalar, $e_{\alpha\beta}$ pa je enotski antisimetrični tenzor s komponentama $e_{12} = -e_{21} = 1$. Polarizacijski tenzor je torej oblike

$$\rho_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} - \frac{i}{2}e_{\alpha\beta}A, \quad S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}, \quad (50.9)$$

kar pomeni, da se privede na realen simetrični tenzor in psevdoskalar.

Pri krožno polarizirani svetlobi je $\mathbf{E}_0 = \text{konst}$, kjer je

$$E_{02} = \pm iE_{01}.$$

Hitro lahko preverimo, da je tedaj $S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}$, medtem ko je $A = \pm 1$. Pri linearno polarizirani svetlobi pa si lahko izberemo realen konstantni vektor $\mathbf{E}_0$, zato je $A = 0$. V splošnem lahko količino A imenujemo stopnja krožne polarizacije, ki ima vrednost med $+1$ in -1 . Mejni vrednosti ustrezata desno in levo krožno polariziranemu valovanju.

Realni simetrični tenzor $S_{\alpha\beta}$ lahko diagonaliziramo. Lastni vrednosti označimo z λ_1 in λ_2 . Lastna vektorja sta med seboj pravokotna; enotska vektorja v teh smereh označimo z $\mathbf{n}^{(1)}$ in $\mathbf{n}^{(2)}$. Tenzor $S_{\alpha\beta}$ lahko zapišemo v obliki

$$S_{\alpha\beta} = \lambda_1 n_{\alpha}^{(1)} n_{\beta}^{(1)} + \lambda_2 n_{\alpha}^{(2)} n_{\beta}^{(2)}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \quad (50.10)$$

Količini λ_1 in λ_2 sta pozitivni in imata vrednost med 0 in 1.

Naj bo $A = 0$, tako da je $\rho_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}$. Vsak člen v (50.10) je zmnožek dveh komponent konstantnega vektorja ($\sqrt{\lambda_1}\mathbf{n}^{(1)}$ ali $\sqrt{\lambda_2}\mathbf{n}^{(2)}$). Drugače povedano, vsak člen ustreza linearno polarizirani svetlobi. Poleg tega vidimo, da v (50.10) ni člena, ki bi vseboval zmnožek komponent obeh valovanj. To pomeni, da lahko oba dela smatramo kot fizikalno medsebojno neodvisna. Rečemo lahko tudi, da sta oba dela med seboj *nekoherentna*. Če sta namreč dve valovanji neodvisni, potem je povprečna vrednost zmnožka $E_{\alpha}^{(1)}E_{\beta}^{(2)}$ enaka zmnožku povprečnih vrednosti vsakega faktorja posebej, ker pa sta ti povprečji obe enaki nič, velja

$$\overline{E_{\alpha}^{(1)}E_{\beta}^{(2)}} = 0.$$

Zaključimo lahko, da lahko v tem primeru ($A = 0$) delno polarizirano svetlobo opišemo kot superpozicijo dveh nekoherentnih valovanj (z jakostma sorazmernima z λ_1 in λ_2), ki sta linearno polarizirani v dveh med seboj pravokotnih smereh. * (V splošnem primeru kompleksnega tenzorja $\rho_{\alpha\beta}$ lahko pokažemo, da lahko svetlobo opišemo kot superpozicijo dveh nekoherentnih eliptično polariziranih valovanj, katerih polarizacijski elipsi sta podobni in med seboj pravokotni; glej nalogo 2).

Naj bo ϕ kot med osjo 1 (os Y) in enotskim vektorja $\mathbf{n}^{(1)}$. Tedaj lahko zapišemo

$$\mathbf{n}^{(1)} = (\cos \phi, \sin \phi), \quad \mathbf{n}^{(2)} = (-\sin \phi, \cos \phi).$$

*Determinanta je $|S_{\alpha\beta}| = \lambda_1\lambda_2$; naj bo $\lambda_1 > \lambda_2$; tedaj je stopnja polariziranosti, definirana v (50.8), enaka $P = 1 - 2\lambda_2$. V primeru, ko je $A = 0$, stopnjo polarizacije pogosto določimo z *depolarizacijskim koeficientom*, definiranim z razmerjem λ_2/λ_1 .

Vpeljemo količino $l = \lambda_1 - \lambda_2$ (predpostavimo, da je $\lambda_1 > \lambda_2$), in zapišemo komponente tenzorja (50.10) v obliki

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + l \cos 2\phi & l \sin 2\phi \\ l \sin 2\phi & 1 - l \cos 2\phi \end{pmatrix}. \quad (50.11)$$

Pri poljubni izbiri osi Y in Z lahko torej polarizacijske lastnosti valovanja opišemo z naslednjimi tremi realnimi parametri: A – stopnja krožne polariziranosti, l – stopnja največje linearne polariziranosti, ϕ – kot med smerjo $\mathbf{n}^{(1)}$ največje polarizacije in osjo Y .

Namesto teh parametrov si lahko izberemo naslednje tri parametre:

$$\xi_1 = l \sin 2\phi, \quad \xi_2 = A, \quad \xi_3 = l \cos 2\phi \quad (50.12)$$

(to so *Stokesovi parametri*). Polarizacijski tenzor z njimi zapišemo v obliki

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix}. \quad (50.13)$$

Vsi trije parametri imajo vrednost med -1 in $+1$. Parameter ξ_3 opisuje linearno polariziranost vzdolž osi Y in Z ; vrednost $\xi_3 = 1$ ustreza popolni linearni polariziranosti vzdolž osi Y , vrednost $\xi_3 = -1$ pa popolni linearni polariziranosti vzdolž osi Z . Parameter ξ_1 opisuje linearno polariziranost v smereh pod kotom 45° glede na os Y : vrednost $\xi_1 = 1$ pomeni popolno polariziranost pod kotom $\phi = \pi/4$, vrednosti ξ_1 pa popolno polariziranost pod kotom $\phi = -\pi/4$. *

Determinanta matrike (50.13) je enaka

$$|\rho_{\alpha\beta}| = \frac{1}{4}(1 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2). \quad (50.14)$$

S primerjavo z (50.8) dobimo

$$P = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}. \quad (50.15)$$

Zato so pri dani stopnji polariziranosti P možne različne vrste polarizacije, ki jih lahko opišemo s tremi količinami ξ_1, ξ_2, ξ_3 , katerih vsota kvadratov je konstantna; mislimo si lahko, da te količine tvorijo vektor s konstantno dolžino.

Omenimo naj še, da sta količini $\xi_2 = A$ in $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_3^2} = l$ invariantni proti Lorentzevim transformacijam. To je skorajda očitno že iz pomena teh količin, saj sta to stopnji krožne in linearne polariziranosti. †

*Za popolnoma eliptično polarizirano valovanje z osema elipse $\mathbf{b}_1$ in $\mathbf{b}_2$ (glej §48) so Stokesovi parametri naslednji:

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \pm b_1 b_2, \quad \xi_3 = b_1^2 - b_2^2.$$

Pri tem je os Y izbrana vzdolž smeri vektorja $\mathbf{b}_1$, medtem ko različna predznaka v ξ_3 označujeta, da je os Z izbrana vzdolž smeri $\mathbf{b}_2$ ali pa v nasprotni smeri.

†To lahko tudi neposredno dokažemo. Upoštevamo, da je polje valovanja prečno v vseh opazovalnih sistemih, zato je takoj jasno, da ostane tenzor $\rho_{\alpha\beta}$ dvodimenzionalen v vsakem novem opazovalnem sistemu. Transformacija $\rho_{\alpha\beta}$ v $\rho'_{\alpha\beta}$ ohranja vsoto absolutnih kvadratov $\rho_{\alpha\beta}\rho_{\alpha\beta}^*$ (transformacija po obliki ni odvisna od konkretnih lastnosti svetlobe, za povsem polarizirano valovanje pa je ta vsota enaka 1 v vseh opazovalnih sistemih). Ker je transformacija realna, se realni in imaginarni del tenzorja $\rho_{\alpha\beta}$ (50.9) neodvisno transformirata, zato ostaneta vsoti kvadratov komponent vsakega dela posebej konstanti in ju lahko zapišemo z l in A .

NALOGE

NALOGA 1. Razstavi poljubno delno polarizirano svetlobno valovanje na njen “naravni” in “polarizirani” del.

Rešitev: Opisani razcep pomeni, da moramo tenzor $J_{\alpha\beta}$ zapisati v obliki

$$J_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}J^{(n)}\delta_{\alpha\beta} + E_{0\alpha}^{(p)}E_{0\beta}^{(p)*}.$$

Prvi člen ustreza naravnemu, drugi pa polariziranemu delu svetlobe. Jakosti obeh delov bomo določili tako, da upoštevamo

$$|J_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}J^{(n)}\delta_{\alpha\beta}| = |E_{0\alpha}^{(p)}E_{0\beta}^{(p)*}| = 0.$$

Tenzor $J_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha\beta}$ zapišemo v obliki (50.13), rešimo enačbo, in dobimo

$$J^{(n)} = J(1 - P).$$

Jakost polariziranega dela je $J^{(p)} = |E_0^{(p)}|^2 = J - J^{(n)} = JP$.

Polarizirani del svetlobe je v splošnem eliptično polarizirano valovanje, pri čemer osi elipse sovpadajo z glavnimi osmi tenzorja $S_{\alpha\beta}$. Dolžini b_1 in b_2 osi elipse, ter kot ϕ med osjo $\mathbf{b}_1$ in osjo Y , so podani z enačbami

$$b_1^2 + b_2^2 = JP, \quad 2b_1b_2 = JP\xi_2, \quad \tan 2\phi = \frac{\xi_1}{\xi_3}.$$

NALOGA 2. Poljubno delno polarizirano valovanje zapiši kot superpozicijo dveh nekoherentnih eliptično polariziranih valovanj.

Rešitev: “Glavne osi” hermitskega tenzorja $\rho_{\alpha\beta}$ sta določeni z dvema kompleksnima vektorjema $\mathbf{n}$ ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^* = 1$), ki rešita enačbo

$$\rho_{\alpha\beta}n_\beta = \lambda n_\alpha. \quad (1)$$

Glavni vrednosti λ_1 in λ_2 sta korena enačbe

$$|\rho_{\alpha\beta} - \lambda\delta_{\alpha\beta}| = 0.$$

Enačbo (1) na obeh straneh pomnožimo z n_α^* in dobimo

$$\lambda = \rho_{\alpha\beta}n_\alpha^*n_\beta = \frac{1}{J}\overline{|E_{0\alpha}n_\alpha^*|^2},$$

od koder je razvidno, da sta λ_1 in λ_2 realni pozitivni količini. Enačbi

$$\rho_{\alpha\beta}n_\beta^{(1)} = \lambda_1 n_\alpha^{(1)}, \quad \rho_{\alpha\beta}^*n_\beta^{(2)*} = \lambda_2 n_\alpha^{(2)*}$$

pomnožimo prvo z $n_\alpha^{(2)*}$ in drugo z $n_\alpha^{(1)}$, ju odštejemo eno od druge, ter upoštevamo, da je tenzor $\rho_{\alpha\beta}$ hermitski. Tako dobimo

$$(\lambda_1 - \lambda_2)n_\alpha^{(1)}n_\alpha^{(2)*} = 0.$$

Od tod sledi $\mathbf{n}^{(1)} \cdot \mathbf{n}^{(2)*} = 0$, kar pomeni, da sta vektorja $\mathbf{n}^{(1)}$ in $\mathbf{n}^{(2)}$ med seboj pravokotna.

Razcep valovanja zapišemo z enačbo

$$\rho_{\alpha\beta} = \lambda_1 n_\alpha^{(1)}n_\beta^{(1)*} + \lambda_2 n_\alpha^{(2)}n_\beta^{(2)*}.$$

Kompleksno amplitudo si vedno lahko izberemo tako, da je izmed dveh med seboj pravokotnih komponente ena realna, druga pa imaginarna (glej § 48). Izberemo si

$$n_1^{(1)} = b_1, \quad n_2^{(1)} = ib_2,$$

(kjer sta b_1 in b_2 normalizirani s pogojem $b_1^2 + b_2^2 = 1$). Iz enačbe $\mathbf{n}^{(1)} \cdot \mathbf{n}^{(2)*} = 0$ dobimo

$$n_1^{(2)} = ib_2, \quad n_2^{(2)} = b_1.$$

Vidimo, da sta elipsi obeh eliptično polariziranih valovanj podobni (imata isto razmerje med osmi) in da je ena obrnjena za 90 deg glede na drugo.

NALOGA 3. Kako se pretvorijo Stokesovi parametri, če zasukamo osi Y in Z za kot ϕ .

Rešitev: Transformacijski zakon je določen s povezavo Stokesovih parametrov s komponentami dvodimenzionalnega tenzorja v ravnini YZ . Zapiše se

$$\xi'_1 = \xi_1 \cos 2\phi - \xi_3 \sin 2\phi, \quad \xi'_3 = \xi_1 \sin 2\phi + \xi_3 \cos 2\phi, \quad \xi'_2 = \xi_2.$$

§51 Fourierov razcep elektrostatičnega polja

Polje, ki ga proizvajajo naboji, lahko formalno razvijemo po ravnih valovanjih v obliki Fourierovega integrala. Ta razvoj se bistveno razlikuje od razvoja elektromagnetnih valovanj v vakuumu, saj polje, ki ga proizvajajo naboji, ni rešitev homogene valovne enačbe, zato tudi vsak izmed členov razvoja ni rešitev te enačbe. Iz tega je razvidno, da za ravna valovanja, s katerimi opišemo polje nabojev, ni izpolnjena zveza $k^2 = \omega^2/c^2$, ki velja za ravna monokromatska valovanja.

Če bi formalno zapisali elektrostatsko polje kot superpozicijo ravnih valovanj, potem bi bila "frekvenca" teh valovanj očitno enaka nič, ker obravnavano polje ni časovno odvisno. Valovni vektorji pa so seveda od nič različni.

Oglejmo si polje, ki ga proizvaja točkast naboj e , ki se nahaja v koordinatnem izhodišču. Potencial ϕ tega polja je rešitev enačbe (glej §36):

$$\Delta \phi = -4\pi e \delta(\mathbf{r}). \quad (51.1)$$

Potencial ϕ razvijemo v Fourierov integral, kar pomeni, da ga zapišemo kot

$$\phi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \phi_{\mathbf{k}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad (51.2)$$

kjer d^3k označuje $dk_x dk_y dk_z$. V tej enačbi je $\phi_{\mathbf{k}} = \int \phi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} dV$. Na obe strani enačbe (51.2) delujemo z Laplaceovim operatorjem in dobimo

$$\Delta \phi = - \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \phi_{\mathbf{k}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3},$$

zato so Fourierove komponente izraza $\Delta \phi$ enake

$$(\Delta \phi)_{\mathbf{k}} = -k^2 \phi_{\mathbf{k}}.$$

Po drugi strani lahko $(\Delta \phi)_{\mathbf{k}}$ dobimo tako, da poiščemo Fourierove komponente obeh strani enačbe (51.1):

$$(\Delta \phi)_{\mathbf{k}} = - \int 4\pi e \delta(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} dV = -4\pi e.$$

Če izenačimo oba izraza za $(\Delta\phi)_{\mathbf{k}}$, dobimo

$$\phi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi e}{k^2}. \quad (51.3)$$

Naša naloga je s tem rešena.

Podobno kot potencial ϕ lahko razvijemo tudi polje

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}. \quad (51.4)$$

S pomočjo (51.2) dobimo

$$\mathbf{E} = -\nabla \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} = -\int i\mathbf{k} \phi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3},$$

Primerjamo z (51.4) in dobimo

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\phi_{\mathbf{k}} = -i\frac{4\pi e\mathbf{k}}{k^2}. \quad (51.5)$$

Od tod je razvidno, da polje valovanj, v katere smo razvili Coulombsko polje, kaže v smeri valovnega vektorja. Takšna valovanja imenujemo *longitudinalna*.

§52 Lastni nihajni načini polja

Oglejmo si elektromagnetno polje (v odsotnosti nabojev) v nekem omejenem prostoru. Zaradi lažjega računanja bomo privzeli, da ima prostor obliko kvadra s stranicami A, B in C . Vse količine, ki opisujejo polje v tem kvadru, lahko razvijemo v trojno Fourierovo vrsto (za vsako izmed treh koordinat). Razvoj (na primer za vektorski potencial) lahko zapišemo v obliki

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (52.1)$$

Vsota teče po vseh možnih vrednostih vektorja $\mathbf{k}$, katerega komponente so

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{A}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{B}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{C}, \quad (52.2)$$

kjer so n_x, n_y in n_z pozitivna ali negativna cela števila. Ker je $\mathbf{A}$ realen, morajo biti koeficienti v razvoju (52.1) povezani z enačbo $\mathbf{A}_{-\mathbf{k}} = \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*$. Iz enačbe $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ sledi, da za vsak $\mathbf{k}$ velja

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}} = 0, \quad (52.3)$$

kar pomeni, da je kompleksni vektor $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ "pravokoten" na ustrezni valovni vektor $\mathbf{k}$. Vektorji $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ so seveda časovno odvisni; iz valovne enačbe (46.7) sledi, da ustrezajo enačbi

$$\ddot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} + c^2 k^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}} = 0. \quad (52.4)$$

Če so dimenzije A, B, C zadosti velike, ležijo sosednje vrednosti k_x, k_y, k_z (torej tiste, pri katerih se n_x, n_y, n_z razlikujejo za ena) blizu skupaj. V tem primeru je smiselno govoriti o številu možnih vrednosti k_x, k_y, k_z v ozkih intervalih $\Delta k_x, \Delta k_y, \Delta k_z$.

Ker sosednjim vrednostim od (na primer) k_x ustrezajo vrednosti n_x , ki se razlikujejo za ena, je število Δn_x različnih vrednosti k_x na intervalu Δk_x kar enak številu vrednosti n_x v tem intervalu. Zato je

$$\Delta n_x = \frac{A}{2\pi} \Delta k_x, \quad \Delta n_y = \frac{B}{2\pi} \Delta k_y, \quad \Delta n_z = \frac{C}{2\pi} \Delta k_z.$$

Skupno število Δn različnih vrednosti vektorja $\mathbf{k}$ s komponentami v intervalih k_x , k_y , k_z je enako zmnožku $\Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z$, ali

$$\Delta n = \frac{V}{(2\pi)^3} \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z, \quad (52.5)$$

kjer je $V = ABC$ prostornina območja, v katerem je polje. Iz tega števila hitro izpeljemo število različnih vrednosti valovnega vektorja, ki imajo absolutno vrednost na intervalu Δk , in ki so usmerjeni v prostorski kot $\Delta \phi$. Zadostuje, da se preselimo v polarni koordinatni sistem v "prostoru k " in da namesto $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$ zapišemo diferencialno prostornino v polarnih koordinatah. Tako dobimo

$$\Delta n = \frac{V}{(2\pi)^3} k^2 \Delta k \Delta \phi. \quad (52.6)$$

Če $\Delta \phi$ nadomestimo z 4π , dobimo število možnih vrednosti vektorja $\mathbf{k}$ z absolutno vrednostjo v intervalu Δk v poljubni smeri: $\Delta n = (V/2\pi^2) k^2 \Delta k$.

Izračunajmo celotno energijo

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) dV$$

polja, ki jo izrazimo s količinami $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$. Električno in magnetno polje zapišemo kot

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} = -\frac{1}{c} \sum_{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \\ \mathbf{H} &= \nabla \times \mathbf{A} = i \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (52.7)$$

Ko računamo kvadrate teh vsot, moramo upoštevati, da zmnožki členov z valovnima vektorjema $\mathbf{k}$ in $\mathbf{k}'$, za katera velja $\mathbf{k} \neq -\mathbf{k}'$, odpadejo po integraciji po celotni prostornini. Takšni členi namreč vsebujejo faktor oblike $e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}}$, integral (na primer)

$$\int_0^A e^{i \frac{2\pi}{A} n_x x} dx,$$

s celim številom n_x različnim od nič pa je enak nič. V tistih členih, kjer je $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$, pa eksponentnega faktorja ni, tako da pri integraciji dobimo prostornino V .

Dobimo

$$\mathcal{E} = \frac{V}{8\pi} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}^* + (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*) \right\}.$$

Iz (52.3) sledi

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*) = k^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*,$$

in končno dobimo

$$\mathcal{E} = \frac{V}{8\pi c^2} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}^* + k^2 c^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^* \right\}. \quad (52.8)$$

Vsak člen v tej vrsti ustreza enemu izmed členov v razvoju (52.1).

Iz (52.4) je razvidno, da so vektorji $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ harmonične funkcije časa s frekvencami $\omega = ck$, ki so odvisne le od valovnega vektorja. Odvisno od izbire frekvenc lahko členi v razvoju (52.1) predstavljajo stoječe ali potujoče valove. Razvoj bomo zapisali v obliki, primerni za opis potujočih valovanj. V ta namen potencial zapišemo kot

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}), \quad (52.9)$$

od koder je razvidno, da je $\mathbf{A}$ realna funkcija. Vsak izmed vektorjev $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ je odvisen od časa kot

$$\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \sim e^{-i\omega_k t}, \quad \omega_k = ck. \quad (52.10)$$

Vsak člen v vrsti (52.9) bo odvisen le od razlike $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t$, ki ustreza valovanju, ki se širi v smeri $\mathbf{k}$.

Če primerjamo razvoja (52.9) in (52.1), vidimo, da so koeficienti povezani z

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \mathbf{a}_{\mathbf{k}} + \mathbf{a}_{-\mathbf{k}}^*,$$

iz (52.10) pa dobimo še zvezo med časovnimi odvodi:

$$\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} = -ick(\mathbf{a}_{\mathbf{k}} - \mathbf{a}_{-\mathbf{k}}^*).$$

To vstavimo v (52.8) in energijo polja izrazimo s koeficienti v razvoju (52.9). Členi oblike $\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a}_{-\mathbf{k}}$ in $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* \cdot \mathbf{a}_{-\mathbf{k}}^*$ se med seboj okrajšajo. Poleg tega upoštevamo še, da se vrsti $\sum \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*$ in $\sum \mathbf{a}_{-\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a}_{-\mathbf{k}}^*$ razlikujeta le v oznaki sumacijskega indeksa in sta zato enaki. Tako dobimo

$$\mathcal{E} = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}}, \quad \mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \frac{k^2 V}{2\pi} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*. \quad (52.11)$$

Celotno energijo polja lahko torej zapišemo kot vsoto energij vsakega posameznega valovanja.

Po podobnem postopku lahko izračunamo tudi celotno gibalno količino polja,

$$\frac{1}{c^2} \int \mathbf{S} dV = \frac{1}{4\pi c} \int \mathbf{E} \times \mathbf{H} dV,$$

in dobimo

$$\sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}}{k} \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{k}}}{c}. \quad (52.12)$$

Ta rezultat je pričakovan zaradi povezave med energijo in gibalno količino ravnega valovanja (glej §47).

Razvoj (52.9) omogoča zapis polja z diskretnim zaporedjem parametrov (vektorjev $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$) namesto z zvezno množico parametrov (kar je potrebno, če želimo podati potencial $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ v vseh točkah prostora). Sedaj bomo spremenljivke $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ pretvorili na tak način, da bodo dobljene enačbe polja po obliki podobne kanoničnim (Hamiltonovim) enačbam mehanike.

Vpeljemo realni “kanonični spremenljivki” $\mathbf{Q}_k$ in $\mathbf{P}_k$:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_k &= \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}}(\mathbf{a}_k + \mathbf{a}_k^*), \\ \mathbf{P}_k &= -i\omega_k \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}}(\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_k^*) = \dot{\mathbf{Q}}_k.\end{aligned}\tag{52.13}$$

Hamiltonovo funkcijo polja dobimo, če ta izraza vstavimo v enačbo (52.11):

$$\mathcal{H} = \sum_k \mathcal{H}_k = \sum_k \frac{1}{2}(\mathbf{P}_k^2 + \omega_k^2 \mathbf{Q}_k^2).\tag{52.14}$$

Hamiltonova enačba $\partial\mathcal{H}/\partial\mathbf{P}_k = \dot{\mathbf{Q}}_k$ je kar enaka $\mathbf{P}_k = \dot{\mathbf{Q}}_k$ (ta enakost je torej posledica gibalnih enačb in smo jo dosegli s primerno izbiro koeficienta v enačbi (52.13)). Gibalne enačbe $\partial\mathcal{H}/\partial\mathbf{Q}_k = -\dot{\mathbf{P}}_k$ so

$$\ddot{\mathbf{Q}}_k + \omega_k^2 \mathbf{Q}_k = 0,\tag{52.15}$$

in so torej enake enačbam polja.

Vektorja $\mathbf{Q}_k$ in $\mathbf{P}_k$ sta oba pravokotna na valovni vektor $\mathbf{k}$. Vsak ima torej dve neodvisni komponenti, ki določata polarizacijo ustreznega potujočega valovanja. Ti komponenti vektorja $\mathbf{Q}_k$ (v ravnini pravokotni na $\mathbf{k}$) označimo z Q_{kj} , $j = 1, 2$, in dobimo

$$\mathbf{Q}_k^2 = \sum_j Q_{kj}^2;$$

podobno velja tudi za $\mathbf{P}_k$. Zato je

$$\mathcal{H} = \sum_{kj} \mathcal{H}_{kj}, \quad \mathcal{H}_{kj} = \frac{i}{2}(P_{kj}^2 + \omega_k^2 Q_{kj}^2).\tag{52.16}$$

Hamiltonova funkcija torej razpade na vsoto med seboj neodvisnih členov $\mathcal{H}_{kj}$. Vsak člen vsebuje le en par količin Q_{kj} , P_{kj} in ustreza potujočem valovanju z določenim valovnim vektorjem in polarizacijo. Količina $\mathcal{H}_{kj}$ ima enako obliko kot Hamiltonova funkcija enodimenzionalnega harmoničnega “nihala”. Zato ta rezultat včasih imenujemo razvoj polja po nihajnih načinih.

Zapišimo še enačbo za polje, eksplicitno izraženo s spremenljivkami $\mathbf{P}_k$ in $\mathbf{Q}_k$. Iz (52.13) dobimo

$$\mathbf{a}_k = \frac{i}{k} \sqrt{\frac{\pi}{V}}(\mathbf{P}_k - i\omega_k \mathbf{Q}_k), \quad \mathbf{a}_k^* = -\frac{i}{k} \sqrt{\frac{\pi}{V}}(\mathbf{P}_k + i\omega_k \mathbf{Q}_k).\tag{52.17}$$

To vstavimo v (52.1) in dobimo vektorski potencial polja

$$\mathbf{A} = 2\sqrt{\frac{\pi}{V}} \sum_k \frac{1}{k}(ck\mathbf{Q}_k \cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{P}_k \sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}).\tag{52.18}$$

Električno in magnetno polje sta

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -2\sqrt{\frac{\pi}{V}} \sum_k (ck\mathbf{Q}_k \sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{P}_k \cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \\ \mathbf{H} &= -2\sqrt{\frac{\pi}{V}} \sum_k \frac{1}{k} \{ck(\mathbf{k} \times \mathbf{Q}_k) \sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + (\mathbf{k} \times \mathbf{P}_k) \cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}\}.\end{aligned}\tag{52.19}$$

Poglavje 7

Širjenje svetlobe

§53 Geometrijska optika

Ravno valovanje ima lastnost, da sta smer valovanja in njegova amplituda povsod enaki. Poljubno elektromagnetno valovanje te lastnosti seveda nima. Vseeno pa je veliko elektromagnetnih valovanj takšnih, da jih lahko na vsakem majhnem območju prostora smatramo kot ravna. Zadosten pogoj je to, da se amplituda in smer valovanja spremenita le malo na razdaljah velikostnega reda valovne dolžine. V tem primeru lahko vpeljemo pojem *valovne fronte* (angl. *wave surface*), torej ploskev, na kateri ima valovanje v vsaki točki enako fazo (ob istem času). (Valovne fronte ravnega valovanja so očitno ravnine, pravokotne na smer širjenja valovanja.) V vsakem majhnem območju prostora lahko smiselno govorimo o smeri potovanja valovanja pravokotno na valovno fronto. Tako lahko vpeljemo pojem *žarka* (angl. *ray*). To je krivulja, katere tangenta v vsaki točki kaže v smeri širjenja valovanja.

Veda o širjenju valovanja v tem primeru se imenuje *geometrijska optika*. Geometrijska optika obravnava širjenje valovanj (predvsem svetlobe) z vidika širjenja žarkov, pri čemer povsem pozabimo na valovne lastnosti valovanj. Rečemo lahko, da geometrijska optika ustreza limiti kratkih valovnih dolžin, $\lambda \rightarrow 0$.

Sedaj bomo izpeljali osnovno enačbo geometrijske optike, ki določa smer žarkov. Naj bo f poljubna količina, ki opisuje valovanje (poljubna komponenta vektorjev $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$). Pri ravnem monokromatskem valovanju ima f obliko

$$f = ae^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha)} = ae^{i(-k_i x^i + \alpha)} \quad (53.1)$$

(izpustili smo znak za realno vrednost $\Re$; v mislih moramo zato v nadaljevanju vzeti realni del vsakega izraza).

Polje zapišemo v obliki

$$f = ae^{i\psi}. \quad (53.2)$$

Če valovanje ni ravno, je pa takšno, da velja geometrijska optika, potem je amplituda a v splošnem funkcija koordinat in časa, faza ψ , ki jo imenujemo *ikonala* (angl. *eikonal*), pa nima preproste oblike, tako kot v (53.1). Bistveno je, da je ψ velika količina. To je razvidno iz tega, da se faza spremeni za 2π , ko se premaknemo za eno valovno dolžino, geometrijska optika pa ustreza limiti $\lambda \rightarrow 0$.

Na majhnem območju prostora in za kratek časovni interval lahko ikonala ψ razvijemo v

vrsto; do členov prvega reda dobimo

$$\psi = \psi_0 + \mathbf{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} + t \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

(koordinatno izhodišče in začetni čas sta bila izbrana v obravnavanem območju prostora in v izbranem časovnem intervalu; odvoda izračunamo v izhodišču). To primerjamo z (53.1), od koder razberemo

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \equiv \nabla \psi, \quad \omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (53.3)$$

To je posledica dejstva, da lahko v vsakem majhnem območju prostora (in vsak kratek časovni interval) valovanje smatramo kot ravno. V štiridimenzionalni obliki lahko (53.3) zapišemo kot

$$k_i = -\frac{\partial \psi}{\partial x^i}, \quad (53.4)$$

kjer je k_i valovni četverec.

V §48 smo videli, da so komponente četverca k^i povezane z $k^i k_i = 0$. V ta izraz vstavimo (53.4) in dobimo enačbo

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} = 0. \quad (53.5)$$

Ta enačba, *enačba ikonala* (angl. *eikonal equation*), je osnovna enačba geometrijske optike.

Enačbo ikonala lahko izpeljemo tudi neposredno iz valovne enačbe v limiti $\lambda \rightarrow 0$. Polje f je rešitev valovne enačbe

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x^i} = 0.$$

Vstavimo $f = ae^{i\psi}$ in dobimo

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x^i} e^{i\psi} + 2i \frac{\partial a}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} e^{i\psi} + if \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x^i} - \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} f = 0. \quad (53.6)$$

Ikonala ψ je, kot smo že poudarili, velika količina; zato so prvi trije členi zanemarljivi v primerjavi z zadnjim in ponovno dobimo enačbo (53).

Podali bomo nekaj pravil, katerih uporaba pri širjenju svetlobe v vakuumu da povsem očitne rezultate. Pravila pa so vseeno pomembna, saj v svojih splošnih oblikah veljajo tudi za širjenje svetlobe v snovi.

Iz enačbe ikonala je razvidna presenetljiva analogija med geometrijsko optiko in mehaniko delcev snovi. Gibanje delca opisuje Hamilton-Jacobijeva enačba (16.11). V tej enačbi, podobno kot v enačbi ikonala, nastopajo prvi parcialni odvodi, in obe sta drugega reda. Vemo, da je akcija S povezana z gibalno količino $\mathbf{p}$ in Hamiltonovo funkcijo $\mathcal{H}$ delca:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathcal{H} = -\frac{\partial S}{\partial t}.$$

Te enačbi primerjamo z (53.3) in vidimo, da v geometrijski optiki valovni vektor igra takšno vlogo kot gibalna količina delca v mehaniki, medtem ko igra frekvenca vlogo Hamiltonove funkcije, torej energije delca. Absolutna vrednost valovnega vektorja k je povezana s frekvenco z enačbo $k = \omega/c$. Ta zveza je podobno enačbi $p = \mathcal{E}/c$ med gibalno količino in energijo delca brez mase, ki se giblje s svetlobno hitrostjo.

Za delec veljata Hamiltonovi enačbi

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}.$$

Po analogiji lahko takoj zapišemo ustrezni enačbi za žarke:

$$\dot{\mathbf{k}} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \quad (53.7)$$

V vakuumu je $\omega = ck$, zato dobimo $\dot{\mathbf{k}} = 0$, $\mathbf{v} = c\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ je enotski vektor v smeri širjenja žarka); v vakuumu so torej žarki ravne črte, vzdolž katerih svetloba potuje s svetlobno hitrostjo c .

Analogija med valovnim vektorjem valovanja in gibalno količino delca je še posebno lepo razvidna iz naslednjega razmisleka. Imejmo valovanje, ki je superpozicija monokromatskih valovanj s frekvencami iz nekega kratkega intervala, in ki se nahaja v nekem omejenem območju prostora (to je *valovni paket*). Izračunajmo četverec gibalne količine polja valovnega paketa z uporabo enačbe (32.6) in z napetostnim tenzorjem (48.15) (za vsako izmed monokromatskih komponent). Če k^i v tej enačbi nadomestimo s povprečno vrednostjo, dobimo izraz oblike

$$P^i = Ak^i, \quad (53.8)$$

kjer je sorazmernostni koeficient A med četvercema P^i in k^i nek skalar. V tridimenzionalni obliki lahko zvezo zapišemo kot

$$\mathbf{P} = A\mathbf{k}, \quad \mathcal{E} = A\omega. \quad (53.9)$$

Vidimo, da se gibalna količina in energija valovnega paketa ob prehodu iz enega opazovalnega sistema v drugega transformirata kot valovni vektor in kot frekvenca.

Z uporabo opisane analogije lahko v geometrijski optiki izpeljemo načelo, ki je podobno načelu najmanjše akcije v mehaniki. Načela ne moremo zapisati v Hamiltonovi obliki kot $\delta \int L dt = 0$, ker se izkaže, da je za žarke nemogoče vpeljati funkcije, ki bi bila analogna Lagrangevi funkciji delca. Lagrangeva funkcija delca je povezana s Hamiltonovo po enačbi $L = \mathbf{p} \cdot \partial \mathcal{H} / \partial \mathbf{p} - \mathcal{H}$. Če bi Hamiltonovo funkcijo nadomestili s frekvenco ω , gibalno količino pa z valovnim vektorjem $\mathbf{k}$, bi za Lagrangevo funkcijo geometrijske optike dobili $\mathbf{k} \cdot \partial \omega / \partial \mathbf{k} - \omega$. Ta izraz pa je enak nič, ker je $\omega = ck$. Lagrangeve funkcije za žarke ne moremo vpeljati zato, ker je širjenje žarkov analogno gibanju delcev brez mase.

Naj ima valovanje konstantno frekvenco ω . Časovna odvisnost polja je tedaj podana z $e^{-i\omega t}$. Ikonala takšnega valovanja lahko torej zapišemo v obliki

$$\psi = -\omega t + \psi_0(x, y, z), \quad (53.10)$$

kjer je funkcija ψ_0 odvisna le od koordinat. Enačba ikonala (53) postane

$$(\nabla \psi_0)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (53.11)$$

Valovne fronte so ploskve konstantnega ikonala, torej družine ploskev oblike $\psi_0(x, y, z) = \text{konst.}$ Žarki so v vsaki točki pravokotni na ustrezno valovno fronto; njihova smer je torej določena z gradientom $\nabla \psi_0$.

Kot vemo, lahko v primeru, ko se energija ohranja, načelo najmanjše akcije za delce zapišemo tudi v obliki *Maupertuisovega načela*:

$$\delta S = \delta \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

kjer moramo integrirati po trajektoriji delca med dvema točkama na poti. V tem izrazu je gibalna količina funkcija energije in koordinat. Podobno načelo za žarke se imenuje *Fermatovo načelo*. Po analogiji ga zapišemo kot

$$\delta\psi = \delta \int \mathbf{k} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (53.12)$$

V vakuumu je $\mathbf{k} = (\omega/c)\mathbf{n}$ in dobimo

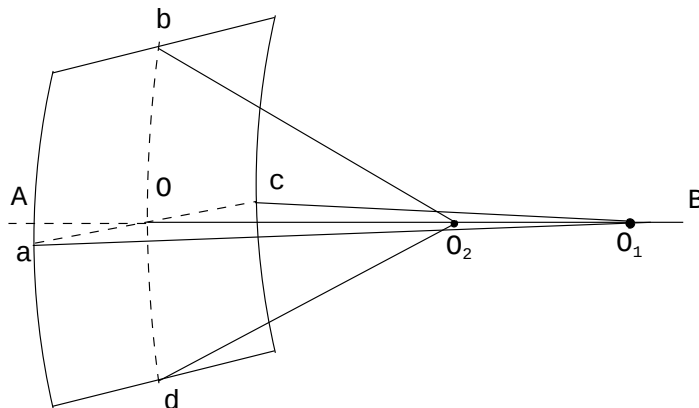
$$\delta \int dl = 0 \quad (53.13)$$

(upoštevali smo $d\mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = dl$): žarki v vakuumu potujejo premočrtno.

§54 Jakost

V geometrijski optiki lahko svetlobno valovanje obravnavamo kot snop žarkov. Žarki sami določajo le smer širjenja svetlobe v vsaki točki; ugotoviti moramo še, kakšna je porazdelitev jakosti svetlobe v prostoru.

Na neki valovni fronti obravnavanega snopa žarkov si izberemo infinitezimalno ploskvico. Iz diferencialne geometrije je znano, da ima ploskev v vsaki točki dva (v splošnem različna) glavna krivinska polmera *. Naj bosta ac in bd (slika 4) glavna normalna preseka †. Žarka skozi a in c se srečata v krivišču O_1 ‡, žarka skozi b in d pa v drugem krivišču O_2 .



Slika 4:

Pri isti kotni razpršenosti žarkov, ki izvirajo iz točke O_1 oziroma iz točke O_2 , sta ločni dolžini ac in bd očitno sorazmerni z ustreznima krivinskima polmeroma R_1 in R_2 (torej z razdaljama O_1O in O_2O). Površina ploskvice je sorazmerna z dolžinama ac in bd , torej z R_1R_2 . Z drugimi besedami, če nas zanima ploskvica na valovni fronti, ki jo omejuje izbrana skupina žarkov, potem se bo njena ploščina spreminjala sorazmerno z R_1R_2 , ko se bomo premikali vzdolž žarkov.

*Bronštejn, p. 215. op. prev.

†ibid.

‡ibid. p. 197

Po drugi strani pa je jakost, torej gostota pretoka energije, obratno sorazmerna s površino, skozi katero se pretaka dana količina svetlobne energije. Tako pridemo do zaključka, da je jakost enaka

$$I = \frac{\text{konst}}{R_1 R_2}. \quad (54.1)$$

Dobljeno enačbo si lahko razlagamo tudi tako. Na vsakem žarku (AB na sliki 4) lahko določimo točki O_1 in O_2 , ki sta krivišči vseh valovnih front, ki sekajo izbrani žarek. Razdalji OO_1 in OO_2 od točke O , kjer valovna fronta seka žarek, do točk O_1 in O_2 sta krivinska polmera R_1 in R_2 valovne fronte v točki O . Enačba (54.1) določa spreminjanje jakosti svetlobe vzdolž danega žarka kot funkcijo razdalj od določenih točk na tem žarku. Poudariti moramo, da te enačbe ne moremo uporabiti za primerjavo jakosti v različnih točkah na isti valovni fronti.

Ker je jakost določena s kvadratom amplitude polja, lahko spreminjanje polja vzdolž žarka zapišemo kot

$$f = \frac{\text{konst}}{\sqrt{R_1 R_2}} e^{ikR}, \quad (54.2)$$

kjer lahko fazni faktor e^{ikR} zapišemo kot e^{ikR_1} ali kot e^{ikR_2} . Količini e^{ikR_1} in e^{ikR_2} (za izbran žarek) se med seboj razlikujeta samo za konstanten faktor, ker je razlika $R_1 - R_2$, razdalja med obema kriviščema, konstanta.

Če sta oba krivinska polmera enaka, lahko (54.1) in (54.2) zapišemo kot

$$I = \frac{\text{konst}}{R^2}, \quad f = \frac{\text{konst}}{R} e^{ikR}. \quad (54.3)$$

Krivinska polmera sta vedno enaka, kadar svetloba izvira iz točkastega izvira. Valovne fronte so tedaj koncentrične sfere, R pa je razdalja od točkastega izvora.

Iz (54.1) je razvidno, da jakost postane neskončna v točkah $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, torej v kriviščih valovne fronte. Če to upoštevamo za vse žarke v snopu, ugotovimo, da je jakost svetlobe v snopu v splošnem neskončna na dveh ploskvah, kjer ležijo vsa krivišča valovnih front. Ti ploskvi imenujemo *kavstiki* (angl. *caustics*). Poseben primer je snop žarkov s sferičnimi valovnimi frontami, pri katerih se kavstiki zlijeta v eno samo točko (*gorišče* ali *fokus*).

Iz diferencialne geometrije poznamo lastnosti krivišč družine ploskev, med drugim tisto, da so žarki tangentni na kavstiko.

Potrebno si je zapomniti, da pri konveksnih valovnih frontah krivišča ne ležijo nujno na žarkih samih, temveč se lahko nahajajo tudi na podaljških žarkov onkraj optičnega sistema, od koder izhajajo. V tem primeru govorimo o *imaginarnih kavstikah* (ali goriščih) in jakost svetlobe nikjer ne postane neskončna.

Vedeti moramo, da v resnici jakost ne postane zares neskončna v točkah na kavstiki: jakost je zelo velika, vendar končna (glej nalogo v §59). Formalno naraščanje proti neskončnosti pomeni le, da približek geometrijske optike nikoli ne velja v bližini kavstik. To je povezano z dejstvom, da spreminjanje faze vzdolž žarka v skladu z enačbo (54.2) velja le na območjih žarka, ki se ne dotikajo kavstike. Pozneje (v §59) bomo pokazali, da se ob prehodu skozi kavstiko faza zmanjša za $\pi/2$. To pomeni, da če je na primer polje sorazmerno z e^{ikx} (kjer je x koordinata vzdolž žarka) na delu žarka pred prvim sekanjem kavstike, potem bo polje po prehodu skozi kavstiko sorazmerno z $e^{i(kx-\pi/2)}$. Isto se zgodi v bližini dotikališča z drugo kavstiko, tako da je polje onkraj te točke sorazmerno z $e^{i(kx-\pi)}$. *

*Čeprav enačba (54.2) sama ne velja v bližini kavstike, sprememba faze polja formalno ustreza spremembi predznaka (torej množenju z $e^{i\pi}$) količin R_1 in R_2 v tej enačbi.

§55 Kotni ikonal

Svetlobni žarek, ki potuje v vakuumu in zadane prozorno telo, bo po prehodu skozi to telo v splošnem imel drugačno smer kot na začetku. Sprememba smeri bo seveda odvisna od lastnosti telesa in od njegove oblike. Lahko pa izpeljemo splošna pravila, s katerimi lahko določimo spremembo smeri svetlobnega žarka na njegovi poti skozi poljubno snovno telo. Predpostaviti moremo le, da geometrijska optika velja tudi za širjenje žarkov v notranjosti obravnavanega telesa. Kot je v navadi, bomo prozorna telesa, skozi katera se širijo svetlobni žarki, imenovali *optični sistemi*.

Zaradi analogije med širjenjem žarkov in gibanjem delcev, opisane v §53, veljajo za spremembo smeri žarka enaki splošni zakoni, ko za spremembo smeri gibanja delca, ki se na začetku giblje v praznem prostoru, nato potuje skozi neko elektromagnetno polje, nato pa nadaljuje pot v praznem prostoru. Vseeno pa bomo v nadaljevanju ves čas govorili o širjenju svetlobnih žarkov, čeprav rezultati veljajo tudi za nabite delce *.

V prejšnjem razdelku smo videli, da lahko enačbo ikonala, ki opisuje širjenje žarkov, zapišemo v obliki (53.11) (za svetlobo z določeno frekvenco). V nadaljevanju bomo zaradi lažjega pisanja z ψ označili ikonal ψ_0 , deljen s konstanto ω/c . Osnovna enačba geometrijske optike ima tedaj obliko

$$(\nabla\psi)^2 = 1. \quad (55.1)$$

Vsaka rešitev te enačbe opisuje določen snop svetlobnih žarkov, pri čemer je smer vseh žarkov, ki gredo skozi dano točko v prostoru, določena z gradientom ikonala ψ v tej točki. Nas pa ne zanima, kako skozi optični sistem potuje prav določen snop žarkov, temveč iščemo splošna pravila, ki opisujejo potovanje poljubnih žarkov. Zato moramo uporabiti ikonal, ki je zapisan v takšni obliki, da lahko z njim opišemo vse mogoče svetlobne žarke, torej žarke, ki gredo skozi poljuben par točk v prostoru. V običajni obliki ikonala $\psi(\mathbf{r})$ opisuje fazo žarkov v nekem snopu, ki gredo skozi točko $\mathbf{r}$. Zato sedaj vpeljemo ikonal $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ kot funkcijo koordinat dveh točk ($\mathbf{r}$ in $\mathbf{r}'$ sta krajevna vektorja začetne in končne točke žarka). Žarek gre lahko skozi poljubni par točk $\mathbf{r}$ in $\mathbf{r}'$, zato je $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ fazna razlika (ali bolje, *dolžina optične poti*) tega žarka med točkama $\mathbf{r}$ in $\mathbf{r}'$. V nadaljevanju bosta $\mathbf{r}$ in $\mathbf{r}'$ vedno krajevna vektorja točk na žarku pred in po prehodu žarka skozi optični sistem.

Če je v $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ eden izmed krajevnih vektorjev, na primer $\mathbf{r}'$, konstanten, potem ψ kot funkcija spremenljivke $\mathbf{r}$ opisuje določen snop žarkov in sicer natanko tistega, ki gre skozi točko $\mathbf{r}'$. Potem mora ψ rešiti enačbo (55.1), pri čemer moramo odvajati po komponentah $\mathbf{r}$. Podobno enačbo za $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ dobimo, če fiksiramo krajevni vektor $\mathbf{r}$ in odvajamo po $\mathbf{r}'$. Velja torej

$$(\nabla_{\mathbf{r}}\psi)^2 = 1, \quad (\nabla_{\mathbf{r}'}\psi)^2 = 1. \quad (55.2)$$

Smer žarka določa gradient njegove faze. Ker je $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ razlika faze med točkama $\mathbf{r}$ in $\mathbf{r}'$, je smer žarka v točki $\mathbf{r}'$ podana z vektorjem $\mathbf{n}' = \partial\psi/\partial\mathbf{r}'$, v točki $\mathbf{r}$ pa z $\mathbf{n} = \partial\psi/\partial\mathbf{r}$. Iz (55.2) je razvidno, da sta $\mathbf{n}$ in $\mathbf{n}'$ enotska vektorja:

$$\mathbf{n}^2 = \mathbf{n}'^2 = 1. \quad (55.3)$$

Štirje vektorji $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$, $\mathbf{n}$ in $\mathbf{n}'$ so med seboj povezani, saj sta dva izmed njih ($\mathbf{n}$ in $\mathbf{n}'$) odvoda neke funkcije ψ , ki je odvisna od drugih dveh ($\mathbf{r}$ in $\mathbf{r}'$). Poleg tega funkcija ψ zadošča dodatna pogoja (55.2).

*Na primer za sisteme elektronske optike, pospeševalnike ipd. op. prev.

Na poti do zveze med $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$, $\mathbf{r}$ in $\mathbf{r}'$ je smiselno namesto ψ vpeljati novo količino, ki ne rabi zadostiti nobenemu drugemu pogoju (torej ne rabi biti rešitev nobene diferencialne enačbe). V funkciji ψ sta neodvisni spremenljivki $\mathbf{r}$ in $\mathbf{r}'$, zato je diferencial $d\psi$ enak

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} + \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}'} \cdot d\mathbf{r}' = -\mathbf{n} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{n}' \cdot d\mathbf{r}'.$$

Sedaj se z Legendrovo transformacijo preselimo iz nabora neodvisnih spremenljivk $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ v nabor $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$; zapišemo

$$d\psi = -d(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{r} \cdot d\mathbf{n} + d(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}') - \mathbf{r}' \cdot d\mathbf{n}',$$

in vpeljemo funkcijo

$$\chi = \mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}' - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - \psi, \quad (55.4)$$

za katero velja

$$d\chi = -\mathbf{r} \cdot d\mathbf{n} + \mathbf{r}' \cdot d\mathbf{n}'. \quad (55.5)$$

Funkcija χ se imenuje *kotni ikonal* (angl. *angular eikonal*); kot je razvidno iz (55.5), sta neodvisni spremenljivki sedaj $\mathbf{n}$ in $\mathbf{n}'$. Za χ ne veljajo dodatni pogoji. Enačba (55.3) sedaj namreč omejuje le neodvisni spremenljivki: izmed treh komponent n_x, n_y, n_z vektorja $\mathbf{n}$ sta le dve neodvisni (podobno velja tudi za $\mathbf{n}'$). Kot neodvisne spremenljivke bomo uporabljali n_y, n_z, n'_y, n'_z ; tedaj sta

$$n_x = \sqrt{1 - n_y^2 - n_z^2}, \quad n'_x = \sqrt{1 - n'^2_y - n'^2_z}.$$

To vstavimo v

$$d\chi = -x dn_x - y dn_y - z dn_z + x' dn'_x + y' dn'_y + z' dn'_z,$$

in dobimo diferencial $d\chi$

$$d\chi = -\left(y - \frac{n_y}{n_x}x\right) dn_y - \left(z - \frac{n_z}{n_x}x\right) dn_z + \left(y' - \frac{n'_y}{n'_x}x'\right) dn'_y + \left(z' - \frac{n'_z}{n'_x}x'\right) dn'_z.$$

Od tod dobimo naslednje enačbe

$$\begin{aligned} y - \frac{n_y}{n_x}x &= -\frac{\partial\chi}{\partial n_y}, & z - \frac{n_z}{n_x}x &= -\frac{\partial\chi}{\partial n_z}, \\ y' - \frac{n'_y}{n'_x}x' &= \frac{\partial\chi}{\partial n'_y}, & z' - \frac{n'_z}{n'_x}x' &= \frac{\partial\chi}{\partial n'_z}, \end{aligned} \quad (55.6)$$

kar je iskana zveza med $\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{r}$ in $\mathbf{r}'$. Funkcija χ opisuje lastnosti telesa, skozi katerega gre žarek (ali lastnosti polja, če opisujemo gibanje nabitega delca).

Pri konstantnih vrednostih $\mathbf{n}$ in $\mathbf{n}'$ vsak izmed dveh parov enačb (55.6) predstavlja ravno črto. Te črte so ravno žarki pred in po prehodu skozi optični sistem. Zato enačbe (55.6) neposredno določajo pot žarka na obeh straneh optičnega sistema.

§56 Ozki snopi žarkov

Pri obravnavi potovanja žarkov skozi optične sisteme nas še posebej zanimajo takšni snopi, pri katerih gredo vsi žarki skozi isto točko (takšne snope imenujemo *homocentrični snopi*).

Po prehodu skozi optični sistem homocentrični snopi v splošnem niso več homocentrični, kar pomeni, da se po prehodu skozi optični sistem ne združijo več v eno samo točko. Samo v posebnih primerih se bomo žarki, ki izvirajo iz svetle točki, po prehodu skozi optični sistem ponovno zbrali v eni sami točki (*sliki svetle točke*). *

Pokažemo lahko (glej §57), da je edini primer, ko homocentričen snop ostane povsem homocentričen po prehodu skozi optični sistem, identična preslikava. Tedaj se slika od *predmeta* razlikuje le v njenem položaju ali usmerjenosti, lahko pa je tudi zrcalno obrnjena.

Zato noben optični sistem ne more dati povsem ostre slike predmeta (ki je končne velikosti), razen v trivialnem primeru identičnega slikanja. † Slika razsežnega telesa bo zato vedno le približno ostra.

Najpomembnejši primer, pri katerem se homocentrični snop preslika v skoraj homocentrični snop, je tisti, v katerem zadosti ozek snop žarkov (torej snop, ki se razširja v majhen prostorski kot) potuje v bližini posebne črte (za izbran optični sistem). To črto imenujemo *optična os sistema*.

Vseeno moramo omeniti, da niti neskončno ozki snopi žarkov (v treh dimenzijah) v splošnem niso homocentrični; videli smo (slika 4), da se celo v tem primeru različni žarki sekajo v različnih točkah (ta pojav se imenuje *astigmatizem*). Izjema so le tiste točke na valovni fronti, v katerih sta oba glavna krivinska polmera enaka. Majhno območje valovne fronte v bližini teh točk lahko smatramo kot krogelno in ozek snop žarkov, ki temu območju ustreza, je homocentričen.

Oglejmo si osno simetrični optični sistem. ‡ Simetrijska os sovpada z optično osjo. Valovna fronta snopa žarkov, ki se gibljejo vzdolž te osi, je ravno tako osno simetrična; kot vemo, imajo rotacijske ploskve dva enaka krivinska polmera v točkah, kjer se sekajo s simetrijsko osjo. Zato ozek snop žarkov, ki se giblje v tej smeri, ostane homocentričen.

Kvantitativni opis tvorjenja slike z ozkim snopom žarkov, ki potujejo skozi osno simetrični optični sistem, bomo dobili iz enačb (55.6). Najprej moramo določiti, kakšno obliko ima funkcija χ v obravnavanem primeru.

Ker je snop žarkov ozek in se giblje v bližini optične osi, sta vektorja $\mathbf{n}$ in $\mathbf{n}'$ vsakega snopa usmerjena skoraj vzdolž osi. Če leži optična os v smeri osi X , potem bodo komponente n_y, n_z, n'_y in n'_z majhne v primerjavi z ena. Komponenta n_x je skoraj enaka ena, $n_x \approx 1$, komponenta n'_x pa je lahko približno enaka $+1$ ali -1 . V prvem primeru žarki nadaljujejo pot približno v začetni smeri in se pojavijo na drugi strani optičnega sistema, ki se v tem primeru imenuje *leča* (angl. *lens*). V nasprotnem primeru se žarki "obrnejo" in potujejo v skoraj nasprotni smeri; takšen optični sistem se imenuje *zrcalo* (angl. *mirror*).

Ker so n_y, n_z, n'_y, n'_z majhne količine, lahko kotni ikonal $\chi(n_y, n_z, n'_y, n'_z)$ razvijemo v vrsto in obdržimo začetne člene. Zaradi osne simetrije celotnega sistema mora χ biti invarianten na zasuke koordinatnega sistema okoli optične osi. Od tod je razvidno, da v razvoju χ ne

*Točka, v kateri se žarki sekajo, lahko leži na samih žarkih, ali pa na njihovih podaljških; v prvem primeru se slika imenuje *prava (realna)*, v drugem pa *navidezna (virtualna)*.

†Takšno slikanje dosežemo z ravnim zrcalom.

‡Pokazati se da, da lahko obravnavo tvorjenja slike z ozkim snopom žarkov, ki se gibljejo v bližini optične osi v sistemu, ki ni osno simetričen, poenostavimo na obravnavo tvorjenja slike v osno simetričnem sistemu z dodatnim zasukom dobljene slike glede na predmet.

more biti členov prvega reda, sorazmernih s prvimi potencami komponent vektorjev $\mathbf{n}$ in $\mathbf{n}'$ v smereh y in z ; takšni členi namreč ne bi bili invariantni proti zasukom. Členi drugega reda, ki iskano lastnost imajo, sta kvadrata $\mathbf{n}^2$ in $\mathbf{n}'^2$, ter skalarni produkt $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'$. Kotni ikonal osno simetričnega sistema ima torej do členov drugega reda obliko

$$\chi = \text{konst} + \frac{g}{2}(n_y^2 + n_z^2) + f(n_y n'_y + n_z n'_z) + \frac{h}{2}(n_y'^2 + n_z'^2), \quad (56.1)$$

kjer so f, g in h konstante.

Bolj podrobno bomo obravnavali leče, zato postavimo $n'_x \approx 1$; kot bomo videli kasneje, so enačbe za zrcala podobne. Izraz (56.1) vstavimo v (55.6) in dobimo

$$\begin{aligned} n_y(x - g) - f n'_y &= y, & f n_y + n'_y(x' + h) &= y', \\ n_z(x - g) - f n'_z &= z, & f n_z + n'_z(x' + h) &= z'. \end{aligned} \quad (56.2)$$

Oglejmo si homocentrični snop, ki izhaja iz točke x, y, z ; naj bo x', y', z' točka, v kateri se žarki iz snopa sekajo po prehodu skozi lečo. Če bi bila prvi in drugi par enačb (56.2) med seboj neodvisna, bi te štiri enačbe pri danih x, y, z, x', y', z' določale en sam nabor vrednosti n_y, n_z, n'_y, n'_z . To bi pomenilo, da bi en sam žarek z začetkom v točki x, y, z dosegel točko x', y', z' . Če naj vsi žarki iz točke x, y, z potekajo skozi točko x', y', z' , je torej potrebno, da so enačbe (56.2) med seboj odvisne; en par enačb mora biti posledica drugega para. Potrebni pogoj za takšno odvisnost je to, da so koeficienti v enem paru enačb sorazmerni s koeficienti v drugem paru. Zato mora veljati

$$\frac{x - g}{f} = -\frac{f}{x' + h} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}. \quad (56.3)$$

Od tod dobimo pomemben izraz

$$(x - g)(x' + h) = -f^2. \quad (56.4)$$

Dobljene enačbe so iskana zveza med koordinatami predmeta in slika pri tvorjenju slike z ozkim snopom žarkov.

Točki $x = g$ in $x' = -h$ na optični osi se imenujeta *glavni gorišči* (angl. *principal foci*) optičnega sistema. Oglejmo si snop žarkov, ki so vzporedni z optično osjo. Izvor takšnih žarkov očitno leži v neskončnosti, zato je $x = \infty$. Iz (56.3) v tem primeru dobimo $x' = -h$. To pomeni, da se vzporedni snop žarkov po prehodu skozi optični sistem združi v glavnem gorišču. Velja tudi obratno: snop žarkov, ki izhaja iz glavnega gorišča, postane po prehodu skozi sistem vzporeden.

V enačbi (56.3) merimo koordinati x in x' iz istega izhodišča, ki leži na optični osi. Bolj primerno pa je koordinate predmeta in slike meriti glede na dve različni izhodišči, ki ju postavimo v ustrezni glavni gorišči. Kot pozitivno smer koordinat si izberemo smer v kateri potuje svetloba. Nove koordinate predmeta in slike označimo z velikimi črkami. Velja

$$X = x - g, \quad X' = x' + h, \quad Y = y, \quad Y' = y', \quad Z = z, \quad Z' = z'.$$

Enačbi tvorjenja slike (56.3) in (56.4) se v novih koordinatah zapišeta kot

$$XX' = -f^2, \quad (56.5)$$

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{Z'}{Z} = \frac{f}{X} = -\frac{X'}{f}. \quad (56.6)$$

Količina f se imenuje *glavna goriščna razdalja* (angl. *principal focal length*) sistema.

Razmerje Y'/Y se imenuje *prečna povečava* (angl. *lateral magnification*). *Vzdolžno povečavo* (angl. *longitudinal magnification*) moramo zapisati v diferencialni obliki, saj koordinati nista preprosto sorazmerni; primerjati moramo kratko razdaljo na predmetu (v smeri optične osi) s kratko razdaljo na ustreznem delu slike. Iz (56.5) razberemo, da je vzdolžna povečava enaka

$$\left| \frac{dX'}{dX} \right| = \frac{f^2}{X^2} = \left(\frac{Y'}{Y} \right)^2. \quad (56.7)$$

Iz tega rezultata je razvidno, da niti za neskončno majhne predmete ne moremo dobiti geometrijsko natančne slike. Vzdolžna povečava ni nikoli enaka prečni (razen v trivialnem primeru identične preslikave).

Snop, ki gre skozi točko $X = f$ na optični osi, se ponovno združi v točki $X' = -f$ na osi; ti točki se imenujeta *glavni točki* (angl. *principal points*). Iz enačb (56.2) ($n_y X - f n'_y = Y$, $n_z X - f n'_z = Z$) je razvidno, da v tem primeru ($X = f, Y = Z = 0$) velja $n_y = n'_y$, $n_z = n'_z$. Zato vsak žarek, ki seka optično os v glavni točki, ponovno seka optično os v drugi glavni točki v smeri, ki je vzporedna začetni smeri.

Če koordinate predmeta in slike merimo glede na glavni točki (in ne glede na glavni gorišči), potem za ti koordinati ξ in ξ' velja

$$\xi' = X' + f, \quad \xi = X - f.$$

Če to vstavimo v (56.5), dobimo nov zapis enačbe tvorjenja slike:

$$\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi'} = -\frac{1}{f}. \quad (56.8)$$

Pokažemo lahko, da pri tankem optičnem sistemu (na primer pri zrcalu ali pri tanki leči) obe glavni točki skoraj sovpadata. V tem primeru je enačba (56.8) še posebej uporabna, saj merimo ξ in ξ' tako rekoč glede na isto točko.

Če je goriščna razdalja pozitivna, potem se predmeti pred goriščem ($X > 0$) preslikajo pokončno ($Y'/Y > 0$); takšni optični sistemi so *konvergentni*. Če pa je $f < 0$, potem iz $X > 0$ sledi $Y'/Y < 0$ in slike so obrnjene; takšni sistemi so *divergentni*.

Obstaja mejni primer tvorjenja slike, ki ni vsebovan v enačbi (56.8), in sicer primer, ko so vsi trije koeficienti f, g, h neskončni. Tedaj ima optični sistem neskončni goriščni razdalji, glavni gorišči pa sta v neskončnosti). V limiti, ko so f, g, h neskončni, dobimo iz (56.4) enačbo

$$x' = \frac{h}{g}x + \frac{f^2 - gh}{g}.$$

Ker nas zanima le primer, ko sta predmet in slika končno oddaljena od optičnega sistema, morajo iti f, g, h proti neskončnosti tako, da so razmerja h/g in $(f^2 - gh)/g$ končna. Označimo ju z α^2 in β in dobimo

$$x' = \alpha^2 x + \beta.$$

Za drugi koordinati dobimo iz splošne enačbe (56.7)

$$\frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \pm \alpha.$$

Če ponovno koordinati x in x' merimo glede na različni izhodišči, in sicer x glede na neko poljubno točko A na osi in x' glede na sliko točke A , potem dobimo enačbe tvorjenja slike preproste oblike

$$X' = \alpha^2 X, \quad Y' = \pm \alpha Y, \quad Z' = \pm \alpha Z. \quad (56.9)$$

Vzdolžna in prečna povečava sta torej konstantni (nista pa enaki). V tem primeru rečemo, da je tvorjenje slike *teleskopsko*.

Vse enačbe od (56.5) do (56.9), ki smo jih izpeljali za leče, veljajo tudi za zrcala in celo za optične sisteme brez osne simetrije, če le slika nastane s pomočjo ozkih snopov žarkov, ki potujejo blizu optične osi. Pri tem moramo izhodiščni točki za koordinati x predmeta in slike izbrati vzdolž optične osi iz ustreznih točk (glavnega gorišča ali glavne točke) v smeri širjenja žarka. Upoštevati moramo, da v optičnem sistemu brez osne simetrije, smeri optične osi pred in za sistemom ne ležita v isti ravnini.

NALOGE

NALOGA 1. Poišči goriščno razdaljo za nastanek slike s pomočjo dveh osno simetričnih optičnih sistemov, katerih osi sovpadata.

Rešitev: Naj bosta f_1 in f_2 goriščni razdalji obeh sistemov. Za vsak sistem ločeno velja

$$X_1 X'_1 = -f_1^2, \quad X_2 X'_2 = -f_2^2.$$

Ker je slika, ki jo naredi prvi sistem, predmet drugega sistema, mora veljati $X_2 = X'_1 - l$, kjer je l razdalja med zadnjim glavnim goriščem prvega sistema in prednjim goriščem drugega. Če izrazimo X'_2 z X_1 , dobimo

$$X'_2 = \frac{X_1 f_2^2}{f_1^2 + l X_1}$$

ali

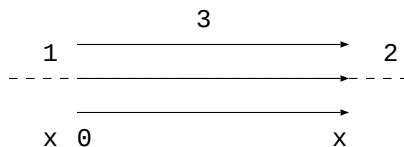
$$\left(X_1 + \frac{f_1^2}{l}\right) \left(X'_2 - \frac{f_2^2}{l}\right) = -\left(\frac{f_1 f_2}{l}\right)^2,$$

od koder je razvidno, da se glavni gorišči sestavljenega sistema nahajata v točkah $X_1 = -f_1^2/l$ in $X'_2 = f_2^2/l$, in da je goriščna razdalja enaka

$$f = -\frac{f_1 f_2}{l}$$

(da si izberemo predznak te razdalje, moramo zapisati ustrezno razdaljo za prečno povečavo).

Če je $l = 0$, je goriščna razdalja neskončna, $f = \infty$, kar pomeni, da je tvorjenje slike sestavljenega sistema teleskopsko. V tem primeru velja $X'_2 = X_1 (f_2/f_1)^2$, od koder sledi, da je parameter α v splošni enačbi (56.9) enak $\alpha = f_2/f_1$.



Slika 5:

NALOGA 2. Izračunaj goriščno razdaljo “magnetne leče” v obliki vzdolžnega homogenega polja na območju dolžine l , ki deluje kot leča za nabite delce (slika 5). *

Rešitev: Kinetična energija delca se med njegovim gibanjem v magnetnem polju ohranja; zato lahko Hamilton-Jacobijevo enačbo za okrajšano akcijo $S_0(\mathbf{r})$ (celotna akcija je enaka $S = -\mathcal{E}t + S_0$) zapišemo kot

$$\left(\nabla S_0 - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 = p^2,$$

pri čemer je

$$p^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - m^2c^2 = \text{konst.}$$

Vektorski potencial homogenega magnetnega polja zapišemo s pomočjo enačbe (19.4). Pri tem os X usmerimo v smeri polja in jo smatramo tudi kot optično os osno-simetričnega optičnega sistema. Tako dobimo Hamilton-Jacobijevo enačbo oblike

$$(\partial S_0 x)^2 + (\partial S_0 r)^2 + \frac{e^2}{4c^2} H^2 r^2 = p^2, \quad (1)$$

kjer je r razdalja od osi X , S_0 pa je funkcija spremenljivk x in r .

Za ozek snop delcev, ki se gibljejo v bližini optične osi, je koordinata r majhna, zato bomo poiskali S_0 kot potenčno vrsto po r . Prva člena razvoja sta

$$S_0 = px + \frac{1}{2}\sigma(x)r^2, \quad (2)$$

kjer je $\sigma(x)$ rešitev enačbe

$$p\sigma'(x) + \sigma^2 + \frac{e^2}{4c^2} H^2 = 0. \quad (3)$$

Na območju 1 pred lečo, velja

$$\sigma^{(1)} = \frac{p}{x - x_1},$$

kjer je $x_1 < 0$ konstanta. Ta rešitev ustreza prostemu curku delcev, ki izhajajo iz točke $x = x_1$ na optični osi na območju 1 in letijo v ravnih črtah. Akcija za prosto gibanje delca z gibalno količino p v smeri stran od točke $x = x_1$ je namreč

$$S_0 = p\sqrt{r^2 + (x - x_1)^2} \approx p(x - x_1) + \frac{pr^2}{2(x - x_1)}.$$

Podobno velja na območju 2 za lečo

$$\sigma^{(2)} = \frac{p}{x - x_2},$$

kjer je x_2 koordinata slike točke x_1 .

Na območju 3 v notranjosti leče, dobimo rešitev enačbe (3) z ločitvijo spremenljivk:

$$\sigma^{(3)} = \frac{eH}{2c} \cot\left(\frac{eH}{2cp}x + C\right),$$

kjer je C poljubna konstanta.

Konstanti C in x_2 (za izbran x_1) lahko določimo, če upoštevamo, da je $\sigma(x)$ zvezna v točkah $x = 0$ in $x = l$:

$$-\frac{p}{x_1} = \frac{eH}{2c} \cot C, \quad \frac{p}{l - x_2} = \frac{eH}{2c} \cot\left(\frac{eH}{2cp}l + C\right).$$

*Takšno polje je na primer tisto v notranjosti dolgega solenoida, pri čemer moramo zanemariti nehomogenosti polja v bližini robov solenoida.

Če iz teh enačb izločimo konstanto C , dobimo

$$(x_1 - g)(x_2 + h) = -f^2,$$

kjer je *

$$g = -\frac{2cp}{eH} \cot \frac{eHl}{2cp}, \quad h = g + l,$$

$$f = \frac{2cp}{eH \sin \frac{eHl}{2cp}}.$$

§57 Nastanek slike pri širokih snopih žarkov

S pomočjo ozkih snopov žarkov, ki smo jih obravnavali v prejšnjem razdelku, nastane slika, ki je le približna; slika je tem boljša (bolj ostra), čim ožji je snop žarkov. Sedaj nas zanima, kako nastane slika pri snopih žarkov poljubne širine.

Za razliko od slikanja predmetov z ozkim snopom žarkov, kar lahko dosežemo s poljubnim optičnim sistemom z osno simetrijo, je nastanek slike s širokimi snopi žarkov mogoče le pri prav posebno narejenih optičnih sistemih. Celó v tem primeru nastanek slike ni mogoč za vse točke v prostoru, kot smo ugotovili že v §56.

Izpeljava v nadaljevanju temelji na naslednji pomembni ugotovitvi. Mislimo si, da vsi žarki izvirajo iz neke točke O , potujejo skozi optični sistem, nato pa se ponovno združijo v neki točki O' . Pokažemo lahko, da je dolžina optične poti ψ za vse te žarke enaka. V bližini vsake izmed točk O in O' so valovne fronte žarkov, ki se v teh točkah sekajo, sfere s središči v O oziroma v O' . V limiti, ko se točkama približujemo, sfere degenerirajo v ti točki sami. Valovne fronte pa so ploskve konstantne faze, zato je razlika faze vzdolž različnih žarkov med pari točk, v katerih žarki sekajo obe valovni fronti, enaka. Od tod sledi, da je celotna fazna razlika med točkama O in O' enaka za različne žarke.

Oglejmo si pogoje, ki morajo biti izpolnjeni, da s širokim snopom dobimo sliko kratkega odseka predmeta; tudi slika odseka bo kratek odsek. Izberimo si smeri teh odsekov kot smeri osi ξ in ξ' , izhodišči pa postavimo v ustrezni točki O (na predmetu) in O' (na sliki). Naj bo ψ dolžina optične poti za žarke, ki izvirajo v točki O in ki dosežejo točko O' . Za žarke, ki svojo pot začnejo iz točke, ki je infinitezimalno blizu točke O in ima koordinato $d\xi$, in ki prispejo v točko na sliki s koordinato $d\xi'$, je dolžina optične poti $\psi + d\psi$, kjer je

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\xi} d\xi + \frac{\partial\psi}{\partial\xi'} d\xi'.$$

Vpeljemo “povečavo”

$$\alpha_\xi = \frac{d\xi'}{d\xi},$$

ki je razmerje med dolžino $d\xi'$ odseka na sliki in dolžino $d\xi$ odseka na predmetu. Ker je slikani odsek kratek, lahko količino α smatramo kot konstantno vzdolž odseka. Kot običajno zapišemo $\partial\psi/\partial\xi = -n_\xi$ in $\partial\psi/\partial\xi' = n_{\xi'}$ (n_ξ in $n_{\xi'}$ sta kosinusa kotov med smerjo žarka in ustreznima osema ξ in ξ'), in dobimo

$$d\psi = (\alpha_\xi n_{\xi'} - n_\xi) d\xi.$$

*Vrednost f je podana s pravilnim predznakom f . To lahko dokažemo le z dodatnimi izračuni.

Za vsak par točke na predmetu in točke na sliki, v katero naj se prva preslika, mora biti dolžina optične poti $\psi + d\psi$ enaka za vse žarke, ki začnejo pot v točki $d\xi$ in jo končajo v točki $d\xi'$. Od tod dobimo pogoj

$$\alpha_\xi n_{\xi'} - n_\xi = \text{konst.} \quad (57.1)$$

To je pogoj, ki smo ga iskali. Vse poti žarkov po optičnem sistemu mu morajo zadostiti, če želimo, da nastane slika kratkega odseka s pomočjo širokega snopa. Pogoj (57.1) mora biti izpolnjen za vse žarke, ki izhajajo iz točke O .

Oglejmo si uporabo tega pogoja na primeru slikanja s pomočjo osno simetričnega optičnega sistema. Obravnavajmo najprej sliko odseka, ki sovпада z optično osjo (os x); tudi slika odseka bo sovpadala z optično osjo. Žarek, ki potuje vzdolž optične osi ($n_x = 1$), zaradi osne simetrije sistema ob prehodu ne bo spremenil svoje smeri, zato bo tudi $n_{x'}$ enak 1. Od tod sledi, da je konstanta v (57.1) enaka $\alpha_x - 1$, zato lahko (57.1) zapišemo kot

$$\frac{1 - n_x}{1 - n'_x} = \alpha_x.$$

Z θ in θ' označimo kota med optično osjo in smerema žarka v točki predmeta in slike. Velja

$$1 - n_x = 1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad 1 - n'_x = 1 - \cos \theta' = 2 \sin^2 \frac{\theta'}{2}.$$

Tako dobimo pogoj za nastanek slike oblike

$$\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta'}{2}} = \text{konst} = \sqrt{\alpha_x}. \quad (57.2)$$

Sedaj pa si oglejmo slikanje kratkega dela ravnine, ki je pravokotna na optično os osno simetričnega sistema; tudi slika bo v tem primeru pravokotna na to os. Uporabimo (57.1) za poljubni odsek, ki leži v slikani ravnini, in dobimo

$$\alpha_r \sin \theta' - \sin \theta = \text{konst},$$

kjer sta ponovno θ in θ' kota med žarkom in optično osjo. Za žarke, ki izhajajo iz presečišča med ravnino predmeta in optično osjo, in ki so usmerjeni vzdolž osi ($\theta = 0$), mora zaradi simetrije veljati $\theta' = 0$. Zato je konstanta enaka nič in dobimo naslednji pogoj za nastanek slike

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \text{konst} = \alpha_r. \quad (57.3)$$

Vidimo, da je nastanek slike razsežnega telesa s širokim snopom žarkov nemogoč tudi za telesa z majhno prostornino, ker se pogoja (57.2) in (57.3) med seboj izključujeta.

§58 Meje geometrijske optike

Monokromatsko ravno valovanje ima po definiciji povsod in ves čas enako amplitudo. Takšno valovanje je neskončno razsežno v vseh smereh prostora in obstaja večno, od časa $-\infty$ do $+\infty$. Vsakršno valovanje, katerega amplituda ni konstantna povsod in ves čas, je lahko le približno monokromatsko. Sedaj bomo obravnavali vprašanje, kakšna je "stopnja enobarvnosti" nekega valovanja.

Oglejmo si elektromagnetno valovanje, katerega amplituda je (v vsaki točki) funkcija časa. Naj bo ω_0 neka povprečna frekvenca valovanja. Tedaj lahko polje valovanja, na primer električno polje, v neki točki zapišemo kot $\mathbf{E}_0(t)e^{-i\omega_0 t}$. To polje, četudi ni monokromatsko, lahko razvijemo po monokromatskih valovanjih, torej ga zapišemo kot Fourierjev integral. Amplituda komponente s frekvenco ω v razvoju je sorazmerna z integralom

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_0(t)e^{i(\omega-\omega_0)t} dt.$$

Faktor $e^{i(\omega-\omega_0)t}$ je periodična funkcija, katere povprečna vrednost je enaka nič. Če bi bila $\mathbf{E}_0$ povsem konstanta funkcija, bi ta integral bil enak nič za vsak $\omega \neq \omega_0$. Če pa se $\mathbf{E}_0(t)$ spreminja, vendar le počasi na časovnem intervalu velikostnega reda $1/|\omega - \omega_0|$, potem je integral skoraj enak nič, in sicer tem bolj, čim bolj počasi se spreminja $\mathbf{E}_0$. Če naj bo integral občutno različen od nič, se mora $\mathbf{E}_0(t)$ občutno spremeniti v časovnem intervalu reda $1/|\omega - \omega_0|$.

Z Δt označimo velikostni red časovnega intervala, v katerem se amplituda valovanja v dani točki prostora občutno spremeni. Iz prejšnjih ugotovitev je razvidno, da so frekvence, ki se najbolj razlikujejo od ω_0 in ki so v spektralnem razcepu še izdatno zastopane, določene s pogojem $1/|\omega - \omega_0| \sim \Delta t$. Če z $\Delta\omega$ označimo frekvenčni interval okoli povprečne frekvence ω_0 , ki nastopa v spektralnem razcepu valovanja, potem velja zveza

$$\Delta\omega\Delta t \sim 1. \quad (58.1)$$

Vidimo, da je valovanje tem bolj monokromatsko (torej tem manjši je $\Delta\omega$), čim večji je Δt , torej čim počasnejše je spreminjanje amplitude v izbrani točki prostora.

Enačbe, podobne enačbi (58.1), lahko izpeljemo tudi za valovni vektor. Naj bodo Δx , Δy , Δz velikostni redi razdalj vzdolž osi X , Y , Z , po katerih se amplituda valovanja občutno spremeni. Ob izbranem času ima polje valovanja kot funkcija koordinat obliko

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}}$$

kjer je $\mathbf{k}_0$ neka povprečna vrednost valovnega vektorja. Po analogiji z izpeljavo enačbe (58.1) lahko dobimo interval $\Delta\mathbf{k}$ vrednosti, ki nastopajo v razvoju valovanja v Fourierjev integral:

$$\Delta k_x \Delta x \sim 1, \quad \Delta k_y \Delta y \sim 1, \quad \Delta k_z \Delta z \sim 1. \quad (58.2)$$

Bolj podrobno si oglejmo valovanje, ki je bilo izsevano v končnem časovnem intervalu. Z Δt označimo velikostni red tega intervala. Amplituda v izbrani točki v prostoru se občutno spremeni v času Δt , v katerem celotno valovanje prepotuje mimo točke. Zaradi zveze (58.1) lahko trdimo, da to valovanje odstopa od enobarvnosti za količino $\Delta\omega$, ki ne more biti manjša od $1/\Delta t$ (lahko pa je seveda večja):

$$\Delta\omega \gtrsim \frac{1}{\Delta t}. \quad (58.3)$$

Podobno, če so Δx , Δy , Δz velikostni redi razsežnosti valovanja v prostoru, potem je razmazanost komponent valovnega vektorja, ki nastopajo v spektralnem razvoju, enaka

$$\Delta k_x \gtrsim \frac{1}{\Delta x}, \quad \Delta k_y \gtrsim \frac{1}{\Delta y}, \quad \Delta k_z \gtrsim \frac{1}{\Delta z}. \quad (58.4)$$

Iz teh enačb sledi, da pri svetlobnem snopu končne širine smer razširjanja svetlobe ne more biti povsem konstantno. Če os X leži vzdolž (povprečne) smeri svetlobnega snopa, potem je

$$\theta_y \gtrsim \frac{1}{k\Delta y} \sim \frac{\lambda}{\Delta y}, \quad (58.5)$$

kjer je θ_y velikostni red odklona snopa od njegove povprečne smeri v ravnini XY , λ pa je valovna dolžina.

Enačba (58.5) je tudi odgovor na vprašanje meje ostrine pri nastanku slike v optičnih sistemih. Svetlobni snop, katerega žarki naj bi se po pravilih geometrijske optike vsi sekali v eni točki, nam na slike ne dajo točke, temveč večjo piko. Velikost te pike, Δ , dobimo iz (58.5):

$$\Delta \sim \frac{1}{k\theta} \sim \frac{\lambda}{\theta}, \quad (58.6)$$

kjer je θ kot stožca svetlobnega snopa. To enačbo ne velja le za sliko, temveč tudi za predmet. Trdimo namreč lahko, da pri opazovanju svetlobnega snopa, ki izhaja iz svetle točke, te točke ne moremo razločiti od telesa velikost λ/θ . Na ta način enačba (58.6) določa mejo *ločljivosti* (angl. *resolving power*) mikroskopa. Najmanjšo vrednost Δ , ki jo dobimo za $\theta \sim 1$, je λ , kar je povsem v skladu z dejstvom, da mejo veljavnosti geometrijske optike določa valovna dolžina svetlobe.

NALOGA

NALOGA Določi velikostni red najmanjše širine snopa svetlobe, ki nastane iz vzporednega snopa, na razdalji l od zaslonke.

Rešitev: Velikost odprtine v zaslonki označimo z d . Po enačbe (58.5) je uklonski kot snopa enak λ/d , zato je širina snopa reda $d + (\lambda/d)l$. Najmanjša vrednost te količine je $\sqrt{\lambda l}$.

§59 Uklon (difrakcija)

Zakoni geometrijske optike so popolnoma veljavni le v idealiziranem primeru, ko smemo valovno dolžino smatrati kot neskončno kratko. Čim slabše je ta pogoj izpolnjen, tem večja so odstopanja od geometrijske optike. Pojavi, ki so posledica takšnih odstopanj, se imenujejo *uklon* (angl. *diffraction*).

Uklon lahko na primer opazimo, če na poti svetlobe * leži ovira – neprozorno telo (imenovali ga bomo *zaslon* (angl. *screen*) poljubne oblike. Do uklona prav tako pride, če svetloba sveti skozi luknje v neprozornem telesu. Če bi zakoni geometrijske optike strogo veljali, potem bi za zaslonom imeli območja "sence", ki bi se ostro ločila od osvetljenih območij. Zaradi uklona pa imamo namesto ostre meje med svetlobo in senco dokaj zapleteno porazdelitev jakosti svetlobe. Uklon je tem bolj opazen, čim manjši so zasloni ali odprtine v njih, oziroma čim večja je valovna dolžina.

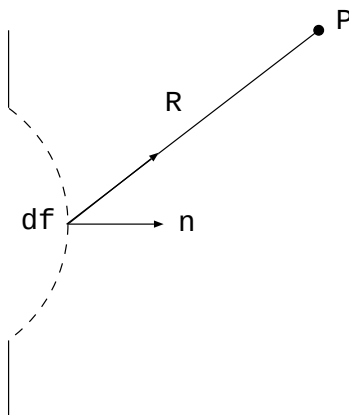
V teoriji uklona je naša naloga poiskati porazdelitev svetlobe (torej elektromagnetnega polja) v prostoru pri vnaprej podanih položajih in oblikah teles, ter legah izvorov svetlobe. Nalogo lahko točno rešimo le z reševanjem valovne enačbe s primernimi robnimi pogoji na

*V nadaljevanju bomo pri obravnavi uklona ves čas govorili o uklonu svetlobe, čeprav vse ugotovitve veljajo za poljubno elektromagnetno valovanje.

površini teles, ti pogoji pa so določeni z optičnimi lastnosti snovi. Tak pristop pa je običajno matematično zelo zahteven.

Vendarle obstaja približna metoda, ki v številnih primerih da zadovoljivo rešitev za porazdelitve svetlobe v bližini meje med svetlobo in senco. Ta postopek velja v primeru majhnega odstopanja od geometrijske optike, za kar morata biti izpolnjena dva pogoja. Prvič, dimenzije vseh teles morajo biti velike v primerjavi z valovno dolžino (ta zahteva velja tako za velikost zaslonov in odprtini v njih, kot za razdaljo med telesi in točkami, od koder svetloba izhaja in točkami, kjer svetlobo opazujemo). Drugič, svetlobni žarki se smejo le malo odkloniti od smeri, ki jih določa geometrijska optika.

Obravnavajmo zaslon z odprtino, skozi katero prodira svetloba iz nekega izvira. Slika 6 prikazuje zaslon od zgoraj (neprekinjena črta); svetloba potuje od leve proti desni. Z u označimo eno izmed komponent $\mathbf{E}$ ali $\mathbf{H}$. Tu bomo smatrali u kot funkcijo koordinat, torej brez faktorja $e^{-i\omega t}$, ki določa časovno odvisnost. Naša naloga je poiskati jakost svetlobe, torej polje u v poljubni točki opazovanja P na desni strani zaslona. Pri približnem reševanju te naloge v primeru, ko je odstopanje od geometrijske optike majhno, smemo privzeti, da je v točkah v odprtini polje enako, kot bi bilo v odsotnosti zaslona. Z drugimi besedami, vrednosti polja v odprtini so takšne, kot bi bile v geometrijski optiki. V vseh točkah tik za zaslonom smemo reči, da je polje enako nič. Zaradi tega lastnosti zaslona (oziroma snovi, iz katere je zaslon) ne igrajo nobene vloge. V obravnavanem primeru je očitno tudi to, da je pri uklonu pomembna le oblika odprtine, medtem ko je oblika neprozornega zaslona nebitvena.



Slika 6:

Izberimo si neko ploskev, ki prekriva odprtino v zaslonu, in ki jo omejujejo robovi odprtine (prečni profil te ploskve je prikazan črtkano na sliki 6). Ploskev razbijemo na majhne ploskvice s ploščino df , ki je majhna v primerjavi z velikostjo odprtine, vendar velika v primerjavi z valovno dolžino svetlobe. Vsako izmed teh ploskvic, skozi katere prodira svetloba, lahko smatramo kot izvor svetlobnega valovanja, ki se širi v vse smeri stran od ploskvice. Polje v točki P je v tem približku kar superpozicija polj, ki izvirajo iz vseh ploskvic df na ploskvi, ki prekriva odprtino. (To je *Huygensovo načelo*.)

Prispevek k polju v točki P zaradi ploskvice df je očitno sorazmeren z vrednostjo u polja na ploskvi df sami (spomnimo naj, da smo privzeli, da je polje na ploskvi df takšno, kot če ne bi imeli zaslona). Prispevek je poleg tega sorazmeren s projekcijo df_n ploščine df na ravnino, ki je pravokotna na smer $\mathbf{n}$ žarka, ki prihaja iz svetlobnega vira do ploskvice df . To je razvidno iz dejstva, da bodo ne glede na obliko ploskvice df skozi prodrli isti žarki, če

bo le projekcija df_n v vseh primerih enaka, zato bo tudi prispevek k polju v točki P vedno enak.

Prispevek k polju v točki P zaradi ploskvice df je torej sorazmeren z $u df_n$. Upoštevati moramo še, da se amplituda in faza valovanja spremenita na potu od df do P . Ta sprememba je določena z (54.3), zato moramo $u df_n$ pomnožiti z $(1/R)e^{ikR}$ (kjer je R razdalja od df do P , k pa je absolutna vrednost valovnega vektorja svetlobe). Iskani prispevek je torej

$$au \frac{e^{ikR}}{R} df_n,$$

kjer je a neka doslej neznana konstanta. Polje v točki P je seštevek prispevkov iz vseh ploskvic df in je torej enako

$$u_P = a \int u \frac{e^{ikR}}{R} df_n, \quad (59.1)$$

kjer integriramo po ploskvi, ki jo omejuje rob odprtine. V našem približku ta integral seveda ni odvisen od izbire ploskve. Ploskev (59.1) očitno velja tako za uklon na odprtini v zaslonu, kot za uklon na oviri, okoli katere svetloba potuje nemoteno. V slednjem primeru moramo v (59.1) integrirati po ploskvi, ki se od roba ovire razteza v neskončnost.

Določimo še konstanto a ! Imejmo ravno valovanje, ki potuje v smeri osi X . Valovne fronte so vzporedne z ravnino YZ . Naj bo u vrednost polja v ravnini YZ . Tedaj je v točki P , ki jo postavimo na os X , polje enako $u_P = e^{ikx}$. Po drugi strani lahko polje v točki P določimo iz enačbe (59.1), v kateri integriramo (na primer) po ravnini YZ . Pri tem so zaradi majhnega uklonskega kota pomembne le tiste točke v ravnini YZ , ki ležijo v bližini izhodišča, torej tiste, za katere velja $y, z \ll x$ (x je koordinata točke P). Zato je

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \approx x + \frac{y^2 + z^2}{x},$$

in iz (59.1) dobimo

$$u_P = au \frac{e^{ikx}}{x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{ky^2}{2x}} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{kz^2}{2x}} dz,$$

kjer je u konstanta (polje v ravnini YZ); v faktorju $1/R$ smemo vzeti $R \approx x = \text{konst.}$ S substitucijo $y = \xi \sqrt{2x/k}$ lahko integrala pretvorimo v integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi^2} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \xi^2 d\xi + i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \xi^2 d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1 + i),$$

in tako dobimo

$$u_P = au e^{ikx} \frac{2i\pi}{k}.$$

Po drugi strani je $u_P = u e^{ikx}$, od koder sledi

$$a = \frac{k}{2\pi i}.$$

To vstavimo v (59.1) in dobimo rešitev naše naloge:

$$u_P = \int \frac{ku}{2\pi i R} e^{ikR} df_n. \quad (59.2)$$

Pri izpeljavi enačbe (59.2) smo privzeli, da je izvor svetlobe točkast in da je svetloba povsem monokromatska. Pravega razsežnega izvira, ki oddaja svetlobo, ki ni monokromatska, vseeno ne rabimo posebej obravnavati. Zaradi popolne neodvisnosti (nekoherentnosti) svetlobe, ki jo oddajajo različne točke izvora, in zaradi nekoherentnosti različnih prostorskih komponent oddane svetlobe, je celotni uklonski vzorec preprosto enak kar vsoti porazdelitev jakosti, ki jih dobimo za uklon različnih neodvisnih komponent svetlobe.

Uporabimo enačbo (59.2) za opis spremembe faze žarka, ko gre ta skozi točko, v kateri se dotika kavstike (glej konec razdelka §54). Integracijska ploskev v (59.2) je lahko poljubna valovna fronta, računamo pa polje u_P v točki P , ki leži na nekem žarku pri razdalji x od točke, kjer žarek seka izbrano valovno fronto (v to sečišče postavimo koordinatno izhodišče O , YZ pa naj bo tangentna ravnina na valovno fronto v točki O). Pri integraciji v (59.2) je pomembno le majhno območje valovne fronte v bližini točke O . Če sta ravnini XY in XZ izbrani tako, da sovpadata z glavnima krivinskima ravninama valovne fronte v točki O , potem je v bližini te točke enačba ploskve enaka

$$X = \frac{y^2}{2R_1} + \frac{z^2}{2R_2},$$

kjer sta R_1 in R_2 krivinska polmera. Razdalja R od točke na valovni fronti s koordinatami X, y, z , do točke P s koordinatami $x, 0, 0$ je

$$R = \sqrt{(x - X)^2 + y^2 + z^2} \approx x + \frac{y^2}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_1} \right) + \frac{z^2}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Polje u na valovni fronti smemo smatrati kot konstantno; konstanten je približno tudi faktor $1/R$. Ker nas zanima le sprememba faze valovanja, lahko koeficiente kar izpuščamo in preprosto zapišemo

$$u_P \sim \frac{1}{i} \int e^{ikR} df_n \sim \frac{e^{ikx}}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{ik \frac{y^2}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_1} \right)} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{ik \frac{z^2}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_2} \right)}. \quad (59.3)$$

Krivišči valovne fronte ležita na obravnavanem žarku v točkah $x = R_1$ in $x = R_2$; v teh dveh točkah je žarek tangenten na kavstiko. Predpostavimo, da je $R_2 < R_1$. Pri $x < R_2$ sta koeficienta, ki stojita za imaginarno enoto i v eksponentih obeh integralov, pozitivna in oba integrala sta sorazmerna z $(1 + i)$. Zato je na delu žarka pred prvim dotikališčem s kavstiko $u_P \sim e^{ikx}$. Če je $R_2 < x < R_1$, torej če je točka med obema dotikališčema, potem je integral po y sorazmeren z $(1 + i)$, integral po z je sorazmeren z $(1 - i)$, njun produkt pa ne vsebuje i . Zato imamo tu $u_P \sim -ie^{ikx} = e^{i(kx - \pi/2)}$, kar pomeni, da se žarku v bližini prve kavstike faza spremeni za $-\pi/2$. Končno, če je $x > R_1$, velja $u_P \sim -e^{ikx} = e^{i(kx - \pi)}$, kar pomeni, da se žarku v bližini druge kavstike faza spremeni še za nadaljnjih $-\pi/2$.

NALOGA

NALOGA Izračunaj porazdelitev jakosti svetlobe v bližini točke, kjer je žarek tangenten na kavstiko.

Rešitev: Nalogo bomo rešili z uporabo enačbe (59.2). Integral bomo izračunali po poljubni valovni ploskvi, ki je zadosti oddaljena od točke, kjer je žarek tangenten na kavstiko. Na sliki 7 je ab del te valovne ploskve, $a'b'$ pa del kavstike; $a'b'$ je evoluta krivulje ab . Zanima nas porazdelitev jakosti

Jakost $I \sim |u_p|^2$ zapišemo kot

$$I = 2A \left(\frac{2k^2}{\rho} \right)^{1/6} \Phi^2 \left(x \left(\frac{2k^2}{\rho} \right)^{1/3} \right)$$

(izbira konstantnega faktorja je opisana spodaj).

Za velike pozitivne vrednosti x od tod dobimo asimptotično formulo

$$I \approx \frac{A}{2\sqrt{x}} \exp \left[-\frac{4x^{3/2}}{3} \sqrt{\frac{2k^2}{\rho}} \right],$$

kar pomeni da jakost pada eksponentno (območje sence). Za velike negativne vrednosti x pa velja

$$I \approx \frac{2A}{\sqrt{-x}} \sin^2 \left[\frac{2(-x)^{3/2}}{x} \sqrt{\frac{2k^2}{\rho}} + \frac{\pi}{4} \right],$$

kar pomeni, da jakost hitro niha; povprečna vrednost jakosti je

$$\bar{I} = \frac{A}{\sqrt{-x}}.$$

Od tod je razviden pomen konstante A - to je jakost daleč stran od kavstike, kot bi jo izračunali z geometrijsko optiko brez upoštevanja učinkov uklona.

Funkcija $\Phi(t)$ doseže svoj maksimum 0.9494 pri $t = -1.02$; največjo jakost imamo torej pri $x(2k^2/\rho)^{1/3} = -1.02$, kjer je

$$I = 2.03Ak^{1/3}\rho^{-1/6}.$$

V točki, kjer je žarek tangenten na kavsitko ($x = 0$), je $I = 0.89Ak^{1/3}\rho^{-1/6}$ [ker je $\Phi(0) = 0.629$].

V bližini kavstike je jakost sorazmerna z $k^{1/3}$, torej z $\lambda^{-1/3}$ (λ je valovna dolžina). Za $\lambda \rightarrow \infty$ postane jakost neskončna, kot mora biti (glej § 54).

§60 Fresnelov uklon

Če sta tako svetlobni vir, kot točka P , v kateri računamo jakost svetlobe, daleč stran od zaslona, potem jakost v točki P določajo le prispevki iz točk, ki ležijo na majhnem območju valovne fronte, po kateri integriramo v (59.2). To območje je tisto, ki leži blizu črte, ki povezuje izvor in točko P . Ker je odstopanje od geometrijske optike majhno, jakost svetlobe, ki pride do P iz različnih točk na valovni fronti, hitro upada, ko se oddaljujemo od te črte. Primer, ko pri uklonu igra vlogo le majhen del valovne fronte, se imenuje *Fresnelov uklon*.

amplitudo kot

$$\Phi(t) \approx \frac{1}{(-t)^{1/4}} \sin \left(\frac{2}{3}(-t)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right). \quad (3)$$

Airyjeva funkcija je povezana z MacDonaldovo funkcijo (modificirano Hankelovo funkcijo) reda 1/3:

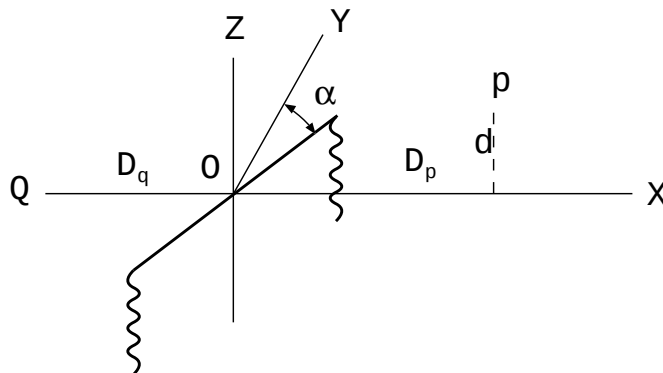
$$\Phi(t) = \sqrt{t/3\pi} K_{1/3} \left(\frac{2}{3}t^{3/2} \right). \quad (4)$$

Enačba (2) ustreza asimptotičnemu razvoju funkcije $K_\nu(t)$:

$$K_\nu(t) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^{-t}.$$

Oglejmo si Fresnelov uklon na zaslonu. Iz pravkar povedanega sledi, da je pri računanju uklona za dano točko P pomembno le majhno območje na robu zaslona. Majhna območja zaslona pa lahko smatramo kot ravna. V nadaljevanju bo zato rob zaslona za nas pomenil kratek odsek ravne črte.

Ravnino XY si izberimo tako, da sovpada z ravnino v kateri leži izvor svetlobe Q (slika 8) in rob zaslona. Ravnina XZ naj poteka skozi točko Q in točko opazovanja P , v kateri računamo jakost svetlobe. In končno, izhodišče O postavimo na rob zaslona. S tem smo določili vse tri osi.



Slika 8:

Z D_q označimo razdaljo od izvora svetlobe Q do izhodišča. Koordinata x točke opazovanja P naj bo D_p , njena koordinata z , torej razdalja od ravnine XY , pa naj bo d . V skladu z geometrijsko optiko bi svetlobe imeli le nad ravnino XY ; območje pod ravnino XY je območje, v kateri bi v geometrijski optiki imeli le senco (to je torej območje geometrijske sence).

Sedaj bomo določili porazdelitev jakosti svetlobe na ekranu v bližini geometrijske sence, torej za vrednosti d , ki so majhne v primerjavi z D_p in D_q . Negativni d pomeni, da se točka P nahaja v geometrijski senci.

Kot integracijsko območje v (59.2) si izberemo polravnino, katere meja je rob zaslona, in ki je pravokotna na ravnino XY . Koordinati točke na tej ploskvi, x in y , sta povezani z enačbo $x = y \tan \alpha$ (α je kot med robom zaslona in osjo Y), koordinata z pa je pozitivna. Polje valovanja iz izvora Q pri razdalji R_q od izvira je sorazmerno z e^{ikR_q} . Zato je polje u na integracijski ploskvi enako

$$u \sim \exp \left(ik \sqrt{y^2 + z^2 + (D_q + y \tan \alpha)^2} \right).$$

V integralu (59.2) moramo R nadomestiti z

$$R = \sqrt{y^2 + (z - d)^2 + (D_p - y \tan \alpha)^2}.$$

Počasi spreminjajoči se faktorji v integrandu so nepomembni v primerjavi z eksponentom. Zato lahko $1/R$ smatramo za konstanto, namesto df_n pa lahko pišemo $dy dz$. Polje v točki P je tedaj

$$u_P \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \exp \left(ik \left(\sqrt{(D_q + y \tan \alpha)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{(D_p - y \tan \alpha)^2 + (z - d)^2 + y^2} \right) \right) dy dz. \quad (60.1)$$

Kot rečeno, svetloba prihaja v točko P predvsem iz točk na integracijski ploskvi, ki so v bližini izhodišča. Zato so v integralu (60.1) pomembne le majhne koordinate y in z (majhne v primerjavi z D_q in D_p). Iz tega razloga lahko pišemo

$$\begin{aligned}\sqrt{(D_q + y \tan \alpha)^2 + y^2 + z^2} &\approx D_q + \frac{y^2 + z^2}{2D_q} + y \tan \alpha, \\ \sqrt{(D_p - y \tan \alpha)^2 + y^2 + z^2} &\approx D_p + \frac{(z - d)^2 + y^2}{2D_p} - y \tan \alpha.\end{aligned}$$

To vstavimo v (60.1). Ker nas zanima le polje kot funkcija razdalje d , lahko konstantni faktor $\exp(ik(D_p + D_q))$ izpustimo; integral po y nam da izraz, ki ni odvisen od d , zato ga lahko prav tako izpustimo. Tako dobimo

$$u_P \sim \int_0^\infty \exp\left(ik\left(\frac{1}{2D_q}z^2 + \frac{1}{2D_p}(z-d)^2\right)\right) dz.$$

Ta izraz pretvorimo:

$$u_P \sim \exp\left(ik\frac{d^2}{2(D_p + D_q)}\right) \int_0^\infty \exp\left(ik\frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q}\right)z - \frac{d}{D_p}\right]^2}{\frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q}}\right) dz. \quad (60.2)$$

Jakost polja je določena s kvadratom polja, torej s kvadratom modula $|u_P|^2$. Kar se tiče jakosti polja, je torej eksponentni faktor pred integralom irelevanten, saj ima modul ena. Z očitno substitucijo se integral poenostavi v

$$u_P \sim \int_{-w}^\infty e^{i\eta^2} d\eta, \quad (60.3)$$

kjer je

$$w = d\sqrt{\frac{kD_q}{2D_p(D_q + D_p)}}. \quad (60.4)$$

Jakost v točki P je torej

$$I = \frac{I_0}{2} \left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-w}^\infty e^{i\eta^2} d\eta \right|^2 = \frac{I_0}{2} \left[\left(C(w^2) + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(S(w^2) + \frac{1}{2}\right)^2 \right], \quad (60.5)$$

kjer sta

$$C(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{z}} \cos \eta^2 d\eta, \quad S(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{z}} \sin \eta^2 d\eta$$

Fresnelova integrala. Enačba (60.5) je rešitev naše naloge: dobili smo jakost svetlobe kot funkcijo spremenljivke d . Količina I_0 je jakost na osvetljenem območju v točkah, ki niso preblizu roba sence (bolj natančno, v točkah, kjer je $w \gg 1$, saj je $C(\infty) = S(\infty) = \frac{1}{2}$ v limiti $w \rightarrow \infty$).

Območje geometrijske sence ustreza negativnim vrednostim w . Preprosto lahko določimo asimptotično obnašanje funkcije $I(w)$ pri velikih negativnih vrednostih. Najprej integriramo per partes:

$$\int_{|w|}^\infty e^{i\eta^2} d\eta = -\frac{1}{2i|w|} e^{iw^2} + \frac{1}{2i} \int_{|w|}^\infty e^{i\eta^2} \frac{d\eta}{\eta^2}.$$

Nato še enkrat integriramo per partes na desni strani enačbe in ta postopek večkrat ponovimo. Tako dobimo razvoj po potencah $1/|w|$:

$$\int_{|w|}^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta = e^{iw^2} \left[-\frac{1}{2i|w|} + \frac{1}{4|w|^3} - \dots \right]. \quad (60.6)$$

Čeprav takšna neskončna vrsta ne konvergira, nam da prvi člen dober približek za funkcijo na levi pri zadosti velikih $|w|$, ker zaporedni členi na desni hitro padajo pri velikih vrednostih $|w|$ (takšna vrsta se imenuje *asimptotična*). Za jakost $I(w)$, (60.5), dobimo naslednjo asimptotično formulo, ki velja pri velikih negativnih vrednostih w :

$$I = \frac{I_0}{4\pi w^2}. \quad (60.7)$$

Vidimo, da v območju geometrijske sence, daleč stran od njenega roba, jakost pada proti nič obratno sorazmerno z razdaljo od roba sence.

Sedaj si oglejmo pozitivne vrednosti w , torej območje nad ravnino XY . Zapišemo

$$\int_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta^2} d\eta - \int_{-\infty}^{-w} e^{i\eta^2} d\eta = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_w^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta.$$

Pri zadosti velikih w lahko uporabimo asimptotični zapis integrala na desni strani enačbe. Dobimo

$$\int_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta \cong (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2iw} e^{iw^2}. \quad (60.8)$$

To vstavimo v (60.5) in dobimo

$$I = I_0 \left(1 + \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{\sin(w^2 - \frac{\pi}{4})}{w} \right). \quad (60.9)$$

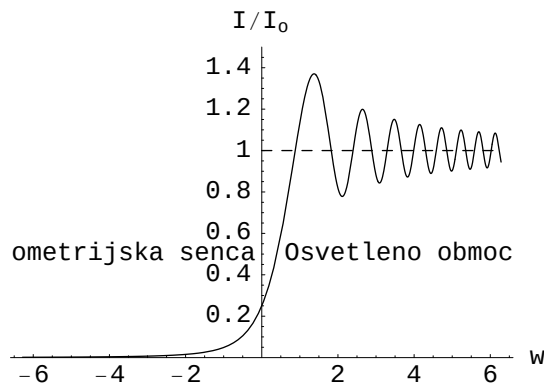
V osvetljenem območju, daleč stran od roba sence, ima jakost neskončno zaporedje maksimumov in minimumov, zato I/I_0 niha okoli ena. Amplituda teh nihanj pada obratno sorazmerno z razdaljo od roba geometrijske sence, vrednosti zaporednih maksimumov in minimumov pa se približujejo vrednosti 1.

Pri majhnih w se funkcija $I(w)$ kvalitativno podobno obnaša (slika 9). Na območju geometrijske sence jakost monotono upada, ko se oddaljujemo od roba. Na samem robu je $I/I_0 = \frac{1}{4}$. Pri pozitivnih w jakost niha med maksimumi in minimumi. V prvem (največjem) maksimumu je $I/I_0 = 1.37$.

§61 Fraunhoferjev uklon

Uklon, do katerega pride, ko raven vzporeden snop žarkov vpada na ekran, je fizikalno še posebej zanimiv. Zaradi uklona žarek ni več vzporeden in svetloba se širi tudi v smereh, ki niso enake začetni. Sedaj bi radi določili porazdelitev jakosti uklonjene svetlobe po smereh pri velikih razdaljah od zaslona (ta formulacija naloge se imenuje *Fraunhoferjev uklon*). Ponovno se bomo omejili na primer majhnih odstopanj od geometrijske optike, zato bomo privzeli, da so uklonski koti, pod katerimi se svetloba uklanja iz začetne smeri, majhni.

Naloge bi se lahko lotili s splošno enačbo (59.2) v limiti, ko sta vir svetlobe in točka opazovanja neskončno oddaljeni od zaslona. Posebna lastnost obravnavanega primera je ta,



Slika 9:

da je v integralu, ki določa jakost uklonjene svetlobe, pomembno celotna valovna fronta, po kateri integriramo (za razliko od Fresnelovega uklona, ker so pomembni le deli valovne fronte v bližini roba ekrana). *

Lažje pa je, če se naloge lotimo s čisto novim pristopom, brez uporabe splošne enačbe (59.2).

Z u_0 označimo polje, ki bi ga imeli za zasloni, če bi geometrijska optika veljala strogo. To polje je ravno valovanje povsod, razen na tistih delih prečnega preseka, ki ustrezajo "sencam" neprozornih zaslonov, in kjer je polje enako nič. Z S označimo tisti del ravnega prečnega preseka, kjer je polje u_0 različno od nič; ker je vsaka takšna ravnina valovna fronta ravnega valovanja, je $u_0 = \text{konst}$ na celotni ploskvi S .

V resnici valovanje, ki ima omejeni prečni obseg, ne more zares biti ravno valovanje (glej §58). V prostorskem Fourierjevem razvoju nastopajo komponente z valovnimi vektorji, ki imajo drugačno smer, in natanko to je izvor uklona.

Razvijmo polje u_0 kot dvodimenzionalni Fourierjev integral po koordinatah y in z v ravnini prečnega preseka valovanja. Fourierove komponente so

$$u_{\mathbf{q}} = \iint u_0 e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} dy dz, \quad (61.1)$$

kjer so vektorji $\mathbf{q}$ konstantni vektorji v ravnini YZ ; integrirati moramo po ploskvi S , kjer je u_0 od nič različen. Če je $\mathbf{k}$ valovni vektor vpadnega valovanja, ima komponenta polja $u_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ valovni vektor $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{q}$. Zato vektor $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ določa spremembo valovnega vektorja pri uklonjeni svetlobi. Absolutna vrednost $k = k' = \omega/c$ in majhna uklonska kota θ_y , θ_z v ravninah XY in XZ so povezani s komponentama vektorja $\mathbf{q}$ po enačbah

$$q_y = \frac{\omega}{c} \theta_y, \quad q_z = \frac{\omega}{c} \theta_z. \quad (61.2)$$

*Kriterij za Fresnelov oziroma za Fraunhoferjev uklon zlahka dobimo, če se vrnemo k enačbi (60.2) in jo uporabimo na primer za zarezo širine a (namesto za rob samostojnega zasloni). V (60.2) moramo integrirati po z od 0 do a . Fresnelov uklon ustreza primeru, ko je člen z^2 v eksponentu pomemben, in ko lahko zgornjo mejo integracije postavimo v neskončnost. To lahko storimo, če je izpolnjen pogoj

$$ka^2 \left(\frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q} \right) \gg 1.$$

Po drugi strani, če velja neenakost v drugi smeri, potem lahko člen z^2 zanemarimo; tedaj imamo opravka s Fraunhoferjevim uklonom.

Pri majhnih odstopanjih od geometrijske optike lahko privzamemo, da so komponente v razvoju polja u_0 enake komponentam dejanskega polja uklonjene svetlobe, zato je enačba (61.1) rešitev naše naloge.

Porazdelitev jakosti uklonjene svetlobe je podana kot funkcija vektorja $\mathbf{q}$ s kvadratom $|u_{\mathbf{q}}|^2$. Povezava z jakostjo vpadne svetlobe je podana z enačbo

$$\int \int u_0^2 dy dz = \int \int |u_{\mathbf{q}}|^2 \frac{dq_y dq_z}{(2\pi)^2} \quad (61.3)$$

[glej (49.8)]. Od tod je razvidno, da je relativna jakost svetlobe, uklonjene v prostorski kot $d\Omega = d\theta_y d\theta_z$, podana z

$$\frac{|u_{\mathbf{q}}|^2}{u_0^2} \frac{dq_y dq_z}{(2\pi)^2} = \left(\frac{\omega}{2\pi c} \right)^2 \left| \frac{u_{\mathbf{q}}}{u_0} \right|^2 d\Omega. \quad (61.4)$$

Oglejmo si Fraunhoferjev uklon na dveh “komplementarnih” zaslonih: prvi zaslon ima luknje tam, kjer je drugi neprozoren, in obratno. Z $u^{(1)}$ in $u^{(2)}$ označimo polje uklonjene svetlobe na prvem oziroma na drugem zaslonu (vpadna svetloba je v obeh primerih enaka). Ker $u_{\mathbf{q}}^{(1)}$ in $u_{\mathbf{q}}^{(2)}$ izrazimo z integraloma (61.1) po površinah odprtih obeh zaslonov, in ker so odprtine v obeh zaslonih komplementarne, je vsota $u_{\mathbf{q}}^{(1)} + u_{\mathbf{q}}^{(2)}$ enaka Fourierjevi komponenti polja, ki bi ga imeli v odsotnosti zaslona, torej polju vpadne svetlobe. Ker pa je vpadna svetloba pravo ravno valovanje s povsem določeno smerjo širjenja, je $u_{\mathbf{q}}^{(1)} + u_{\mathbf{q}}^{(2)} = 0$ za vse od nič različne vrednosti vektorja $\mathbf{q}$. Zato je $u_{\mathbf{q}}^{(1)} = -u_{\mathbf{q}}^{(2)}$, za ustrezni jakosti pa velja

$$|u_{\mathbf{q}}^{(1)}|^2 = |u_{\mathbf{q}}^{(2)}|^2 \text{ za } \mathbf{q} \neq 0. \quad (61.5)$$

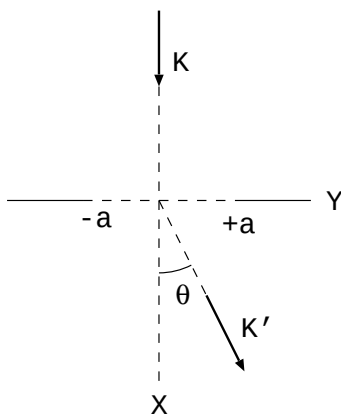
To pomeni, da pri komplementarnih zaslonih dobimo isto porazdelitev jakosti uklonjene svetlobe (to je *Babinetovo načelo*).

Poudariti moramo zanimivo posledico Babinetovega načela. Imejmo črno telo, ki povsem absorbira vso svetlobo, ki pada nanj. Če bi geometrijska optika strogo veljala, bi za osvetljenim črnim telesom imeli območje geometrijske sence, katere prečni presek bi imel površino, enako površini telesa v smeri, pravokotni na smer vpadne svetlobe. Zaradi uklona pa se svetloba, ki potuje mimo telesa, delno odkloni iz svoje začetne smeri. Zato daleč za telesom ne bomo imeli popolne sence, temveč bomo poleg svetlobe, ki potuje v začetni smeri, imeli tudi nekaj svetlobe, ki potuje pod majhnim kotom glede na začetno smer. Jakosti te sipane svetlobe ni težko določiti. Po Babinetovem načelu je količina svetlobe, ki se uklanja na obravnavanem telesu, enaka količini svetlobe, ki bi se uklonila na odprtini v neprozornem zaslonu, ki bi imela obliko in velikost enaki prečnemu preseku telesa. V Fraunhoferjevem uklonu na odprtini se iz začetne smeri odkloni vsa svetloba, ki gre skozi odprtino. Od tod sledi, da je celotna količina svetlobe, ki jo uklanja črno telo, enako količini svetlobe, ki pada na njegovo površino in je absorbirana.

NALOGE

NALOGA 1. Izračunaj, kakšen je Fraunhoferjev uklon ravnega valovanja, ki vpada pravokotno na neskončno zarezo (širine $2a$) z vzporednima stranicama v neprozornem zaslonu.

Rešitev: Ravnina zareze naj bo ravnina YZ , tako da je os Z vzporedna z zarezo (slika 10). Ker svetloba vpada v pravokotni smeri, je zareza ena izmed valovnih ploskev in jo lahko uporabimo kot



Slika 10:

integracijsko površino v enačbi (61.1). Ker je zarez neskončno dolga, se svetloba uklanja le v ravnini XY [ker je integral (61.1) enak nič, če je $q_z \neq 0$].

Zato polje razvijemo le po koordinati Y :

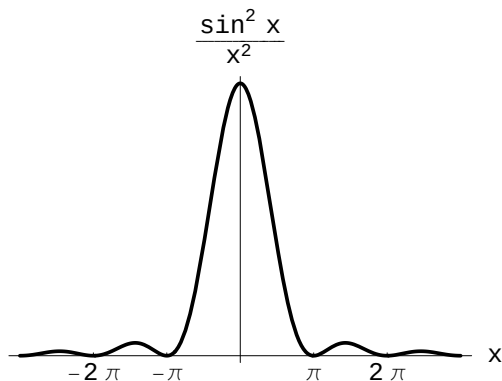
$$u_q = u_0 \int_{-a}^a e^{-iqy} dy = \frac{2u_0}{q} \sin qa.$$

Jakost uklonjene svetlobe v intervalu kotov $d\theta$ je

$$dI = \frac{I_0}{2a} \left| \frac{u_q}{u_0} \right|^2 \frac{dq}{2\pi} = \frac{I_0}{\pi a k} \frac{\sin^2 ka\theta}{\theta^2} d\theta,$$

kjer je $k = \omega/c$, I_0 pa je jakost svetlobe, ki pada na zarez.

Funkcija $dI/d\theta$ kot funkcija sipalnega kota ima obliko, prikazano na sliki 11. Ko θ narašča v poljubni smeri od $\theta = 0$, ima jakost zaporedje maksimalnih vrednosti s hitro upadajočo višino. Zaporedni maksimumi so ločeni z minimumi v točkah $\theta = n\pi/ka$ (kjer je n celo število); v minimumih je jakost enaka nič.



Slika 11:

NALOGA 2. Izračunaj Fraunhoferjev uklon na uklonski mrežici – ploskem zaslonu, v katerega je zarezano zaporedje enakih vzporednih zarez (širina zarez naj bo $2a$, dolžina neprozornega zaslona med sosednjima zarezama $2b$, število zarez pa naj bo N).

Rešitev: Mrežica naj leži v ravnini YZ , tako da je os Z vzporedna z zarezi. Do uklona pride v ravnini XY , z integracijo (61.1) pa dobimo

$$u_q = u'_q \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2inqd} = u'_q \frac{1 - e^{-2iNqd}}{1 - e^{-2iqd}},$$

kjer je $d = a + b$, u'_q pa je rezultat integracije po eni sami reži. Z rešitvijo iz prve naloge lahko zapišemo

$$dI = \frac{I_0 a}{N\pi} \left(\frac{\sin Nqd}{\sin qd} \right)^2 \left(\frac{\sin qa}{qa} \right)^2 dq = \frac{I_0}{N\pi ak} \left(\frac{\sin Nk\theta d}{\sin k\theta d} \right)^2 \frac{\sin^2 ka\theta}{\theta^2} d\theta$$

(I_0 je celotna jakost svetlobe, ki gre skozi vse reže).

V primeru velikega števila rež ($N \rightarrow \infty$) lahko izraz zapišemo drugače. Za vrednosti $q = \pi n/d$, kjer je n celo število, ima dI/dq maksimum; v bližini maksimuma (torej za $qd = n\pi + \epsilon$, pri čemer je ϵ majhna količina) velja

$$dI = I_0 a \left(\frac{\sin qa}{qa} \right)^2 \frac{\sin^2 N\epsilon}{\pi N \epsilon^2} d\epsilon.$$

V limiti $N \rightarrow \infty$ pa velja *

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 Nx}{\pi Nx^2} = \delta(x).$$

Zato lahko v bližini vsakega maksimuma zapišemo

$$dI = I_0 \frac{a}{d} \left(\frac{\sin qa}{qa} \right)^2 \delta\epsilon d\epsilon.$$

V tej limiti so torej maksimumi neskončno ozki, celotna jakost svetlobe v n -tem vrhu pa je

$$I^{(n)} = I_0 \frac{d}{\pi^2 a} \frac{\sin^2(n\pi a/d)}{n^2}.$$

NALOGA 3. Določi porazdelitev jakosti sipane svetlobe po smereh, če svetloba vpada pravokotno na zaslon z okroglo odprtino polmera a .

Rešitev: Vpeljemo valjne koordinate z, r, ϕ , pri čemer os Z poteka skozi sredino odprtine in je pravokotna na ravnino zaslona. Uklon je očitno simetričen okoli osi Z , zato ima vektor $\mathbf{q}$ samo radialno komponento $q_r = q = k\theta$. Če merimo kot ϕ od smeri vektorja $\mathbf{q}$ in integriramo v enačbi (61.1) po ravnini odprtine, dobimo:

$$u_q = u_0 \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-iqr \cos \phi} r d\phi dr = 2\pi u_0 \int_0^a J_0 q r r dr,$$

kjer je J_0 Besselova funkcija ničelnega reda. Z uporabo dobro poznanega pravila

$$\int_0^a J_0 q r r dr = \frac{a}{q} J_1(aq)$$

dobimo

$$u_q = 2\pi \frac{u_0 a}{q} J_1(aq),$$

*Za $x \neq 0$ je funkcija na levi strani izraza enaka nič, po dobro poznanem pravilu iz teorije Fourierjevih vrst pa je

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a f(x) \frac{\sin^2 Nx}{Nx^2} dx \right) = f(0).$$

Od tod je razvidno, da so lastnosti te funkcije kar enake lastnostim funkcije δ (glej opombo na strani 72).

po (61.4) pa dobimo jakost svetlobe, ki se sipa v prostorski kot $d\Omega$:

$$dI = I_0 \frac{J_1^2(ak\theta)}{\pi\theta^2} d\Omega,$$

kjer je I_0 celotna jakost svetlobe, ki pada na odprtino.

Poglavje 8

Polje gibajočih se nabojev

§62 Zakasneni potenciali

V 5. poglavju smo obravnavali statično polje, ki ga ustvarjajo nepremični naboji, v 6. poglavju pa spremenljiva polja v odsotnosti nabojev. Sedaj nas bodo zanimala spremenljiva polja v prisotnosti nabojev, ki se gibljejo na poljuben način.

Izpeljali bomo enačbe za potenciale, ki jih ustvarjajo gibajoči se naboji. Izpeljevali bomo z uporabo enačb v štiridimenzionalni obliki, ki je bolj primerna. Ponovili bomo izpeljavo iz §46, le da bomo uporabili drugačen drugi par Maxwellovih enačb oblike (30.2):

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c}j^i.$$

Ista desna stran se pojavi tudi v (46.8), in če si izberemo Lorentzevo umeritev

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = 0, \quad \text{torej} \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (62.1)$$

dobimo

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} = \frac{4\pi}{c}j^i. \quad (62.2)$$

Ta enačba določa potencial poljubnega elektromagnetnega polja. V tridimenzionalni obliki jo zapišemo z dvema enačbama, prvo za $\mathbf{A}$ in drugo za ϕ :

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (62.3)$$

$$\Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi \rho. \quad (62.4)$$

Pri statičnih poljih se ti enačbi poenostavita v že poznani enačbi (36.4) in (43.4), pri spremenljivih poljih brez nabojev pa v homogeni valovni enačbi.

Kot že vemo, lahko rešitev nehomogenih linearnih enačb (62.3) in (62.4) zapišemo kot vsoto rešitev teh enačb brez desnih strani in partikularnih rešitev enačb z desno stranjo. Partikularno rešitev dobimo tako, da celotni prostor razbijemo na neskončno majhna območja in določimo polja, ki jih ustvarjajo naboji v vsakem izmed teh majhnih delov prostora. Zaradi linearnosti enačb polja bo dejansko polje vsota polj, ki jih proizvajajo naboji v vsakem izmed delčkov prostora.

Naboj de v nekem delčku prostora je v splošnem funkcija časa. Če postavimo izhodišče koordinatnega sistema v obravnavani delček prostora, potem je gostota naboja enaka $\rho = de(t)\delta(\mathbf{R})$, kjer je $\mathbf{R}$ razdaljo od izhodišča. Zato moramo rešiti enačbo

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi de(t)\delta(\mathbf{R}). \quad (62.5)$$

Povsod razen v izhodišču je $\delta(\mathbf{R}) = 0$ in velja enačba

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \quad (62.6)$$

Funkcija ϕ je očitno središčno simetrična in je odvisna le od spremenljivke R . Če Laplaceov operator zapišemo v krogelnih koordinatah, se enačba (62.6) poenostavi v

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

To enačbo rešimo z nastavkom $\phi = \chi(R, t)/R$. Dobimo enačbo za χ :

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0.$$

To pa je enačba ravnega valovanja, ki ima rešitev oblike (glej §47)

$$\chi = f_1 \left(t - \frac{R}{c} \right) + f_2 \left(t + \frac{R}{c} \right).$$

Ker iščemo le partikularno rešitev enačbe, zadošča, da obdržimo le eno izmed funkcij f_1 in f_2 . Običajno je primerno, če postavimo $f_2 = 0$ (o tem je več povedanega v nadaljevanju). Potem je funkcija ϕ oblike

$$\phi = \frac{\chi \left(t - \frac{R}{c} \right)}{R} \quad (62.7)$$

povsod razen v izhodišču.

Do tu je bila funkcija χ poljubna; sedaj jo moramo določiti tako, da bomo dobili pravilno vrednost potenciala v izhodišču. Z drugimi besedami, funkcija χ mora biti takšna, da je v izhodišču zadoščeno enačbi (62.5). Opazimo, da potencial v izhodišču narašča proti neskončnosti, zato njegovi odvodi po koordinatah naraščajo hitreje kot odvodi potenciala po času. Zato lahko v limiti $R \rightarrow 0$ v enačbi (62.5) zanemarimo člen $(1/c^2)(\partial^2 \phi / \partial t^2)$ v primerjavi s členom $\Delta\phi$. Tedaj postane enačba (62.5) enaka enačbi (36.9), iz katere smo dobili Coulombov zakon. Zato mora v bližini izhodišča enačba (62.7) postati enaka Coulombovemu zakonu, od koder sledi, da je $\chi(t) = de(t)$, in posledično dobimo

$$\phi = \frac{de \left(t - \frac{R}{c} \right)}{R}.$$

Od tod brez težav dobimo rešitev enačbe (62.4) za poljubno porazdelitev nabojev $\rho(x, y, z, t)$. Najprej zapišemo $de = \rho dV$ (dV je diferencialna prostornina) in integriramo po celotnem prostoru. K tej rešitvi nehomogene enačbe (62.4) lahko prištejemo rešitev ϕ_0 te enačbe brez desne strani. Zato je splošna rešitev oblike

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{1}{R} \rho \left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c} \right) dV' + \phi_0, \quad (62.8)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}', \quad dV' = dx' dy' dz',$$

kjer sta

$$\mathbf{r} = (x, y, z), \quad \mathbf{r}' = (x', y', z');$$

R pa je razdalja od diferencialne prostornine dV do točke v polju, v kateri računamo potencial. Ta izraz lahko krajše zapišemo kot

$$\phi = \int \frac{\rho_{t-(R/c)}{R} dV + \phi_0, \quad (62.9)$$

kjer spodnji indeks pomeni, da moramo količino ρ vzeti ob času $t - (R/c)$, opustili pa smo tudi pisanje črtice ob diferencialu dV .

Podobno velja za vektorski potencial:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{t-(R/c)}}{R} dV + \mathbf{A}_0, \quad (62.10)$$

kjer je $\mathbf{A}_0$ rešitev enačbe (62.3) brez desne strani.

Potenciala (62.9) in (62.10) (brez ϕ_0 in $\mathbf{A}_0$) se imenujeta *zakasnjena (retardirana) potenciala*.

Količini $\mathbf{A}_0$ in ϕ_0 v (62.9) in (62.10) moramo določiti tako, da so izpolnjeni pogoji zastavljene naloge. Zadošča, če določimo začetne pogoje, torej če določimo vrednosti polja ob začetnem času. Pogosto pa takšnih začetnih pogojev niti ne potrebujemo, temveč imamo podane robne pogoje daleč stran od sistema, ki veljajo ves čas. Podan je lahko na primer robni pogoj, da od zunaj na sistem valovanje vpada. Zaradi tega se lahko polje, ki nastane ob interakciji valovanja s sistemom, od zunanjega polja razlikuje le za valovanje, ki ga seva sistem. To sevanje mora imeti pri velikih razdaljah obliko valovanja, ki se širi navzven iz sistema, torej v smeri naraščajoče spremenljivke R . Natanko ta pogoj pa je izpolnjen, če uporabljamo zakasnjene potenciale. Te rešitve torej predstavljajo polje, ki ga ustvarja sistem, medtem ko ϕ_0 in $\mathbf{A}_0$ ustrezata zunanjemu polju, ki deluje na sistem.

§63 Lienard-Wiechertov potencial

Določimo potencial polja, ki ga ustvarja naboj, ki se giblje po vnaprej določeni poti s trajektorijo $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t)$.

Po formulah za zakasnjene potenciale je polje v točki opazovanja $P(x, y, z)$ ob času t določeno z gibanjem naboja ob predhodnem času t' . Ta čas je takšen, da je čas širjenja svetlobnega signala iz točke $\mathbf{r}_0(t')$, kjer se je naboj nahajal, do točke P , kjer računamo polje, enak $t - t'$. Naj bo $\mathbf{R}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$ krajevni vektor od naboja e do točke P ; tako kot $\mathbf{r}_0(t)$ je tudi $\mathbf{R}(t)$ vnaprej določena funkcija časa. Čas t' določimo z enačbo

$$t' + \frac{R(t')}{c} = t. \quad (63.1)$$

Za vsako vrednost t ima ta enačba natanko eno rešitev t' . *

*To je sicer očitno, vendar se lahko tudi neposredno prepričamo. Točko P in čas opazovanja t si izberemo kot izhodišče O četvernega koordinatnega sistema in konstruiramo svetlobni stožec (§2) z vrhom v točki O . Spodnja polovica stožca, katere notranjost ustreza absolutni preteklosti (glede na dogodek O), je množica točk, iz katerih lahko potujejo signali v točko O . Točke, v katerih hiper-stožec seka svetovnico naboja, so rešitve enačbe (63.1). Ker pa je hitrost delca vedno manjša od svetlobne hitrosti, je naklon svetovnice glede na časovno os vedno manjši od naklona svetlobnega stožca. Od tod sledi, da lahko svetovnica delca seka spodnjo polovico svetlobnega stožca v eni sami točki.

V opazovalnem sistemu, v katerem delec ob času t' miruje, je potencial ob času t v točki, kjer polje opazujemo, enak Coulombskemu potencialu,

$$\phi = \frac{e}{R(t')}, \quad \mathbf{A} = 0. \quad (63.2)$$

Izraz za potencial v poljubnem opazovalnem sistemu dobimo tako, da poiščemo četverec hitrosti, ki se za $\mathbf{v} = 0$ ujema s pravkar zapisanima potencialoma ϕ in $\mathbf{A}$. Zaradi (63.1) lahko potencial ϕ v (63.2) zapišemo kot

$$\phi = \frac{e}{c(t - t')}.$$

Od tod dobimo iskani vektor četverec:

$$A^i = e \frac{u^i}{R_k u^k}, \quad (63.3)$$

kjer je u^k četverec hitrosti naboja, R^k pa je četverec $R^k = [c(t - t'), \mathbf{r} - \mathbf{r}']$, kjer so koordinate x', y', z', t' med seboj povezane z (63.1), ki se v četverni obliki glasi

$$R_k R^k = 0. \quad (63.4)$$

Sedaj se vrnimo k uporabi tridimenzionalnega zapisa in zapišimo potencial polja, ki ga proizvaja točkast naboj, ki se giblje po poljubni poti:

$$\phi = \frac{e}{(R - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{c})}, \quad \mathbf{A} = \frac{e \mathbf{v}}{c(R - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{c})}, \quad (63.5)$$

kjer je $\mathbf{R}$ krajevni vektor, ki kaže iz točke, kjer se naboj nahaja, proti točki P , kjer računamo polje, vse količine na desni strani enačbe pa moramo računati ob času t' , določenem iz enačbe (63.1). Potential polja, zapisan v obliki (63.5), se imenuje *Lienard-Wiechertov potencial*.

Jakost električnega in magnetnega polja dobimo iz enačb

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A},$$

kjer moramo ϕ in $\mathbf{A}$ odvajati po koordinatah x, y, z točke P , in po času opazovanja t . Enačbi (63.5) izražata potenciala kot funkciji spremenljivke t' , tako da sta potenciala preko zveze (63.1) implicitni funkciji spremenljivk x, y, z, t . Potrebne odvode dobimo tako, da najprej odvajamo po t' . Izraz $R(t') = c(t - t')$ odvajamo po t in dobimo

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{R} \frac{\partial t'}{\partial t} = c \left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t} \right).$$

(Vrednost odvoda $\partial \mathbf{R} / \partial t'$ dobimo tako, da odvajamo identiteto $R^2 = \mathbf{R}^2$ in vstavimo $\partial R(t') / \partial t' = -\mathbf{v}(t')$. Predznak minus dobimo zato, ker je $\mathbf{R}$ krajevni vektor, ki kaže od naboja e proti točki P in ne nasprotno.)

Od tod dobimo

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{Rc}}. \quad (63.6)$$

Če podobno odvajamo isti izraz po koordinatah, dobimo

$$\nabla t' = -\frac{1}{c} \nabla R(t') = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial R}{\partial t'} \nabla t' + \frac{\mathbf{R}}{R} \right),$$

tako da je

$$\nabla t' = -\frac{\mathbf{R}}{c(R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c})}. \quad (63.7)$$

S pomočjo teh enačb ni težko izračunati polj $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$. Vmesne korake bomo izpustili in navedli le rezultat:

$$\mathbf{E} = e \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{(R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c})^3} \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R \right) + \frac{e}{c^2 (R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c})^3} \mathbf{R} \times \left[\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R \right) \times \dot{\mathbf{v}} \right], \quad (63.8)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{R} \mathbf{R} \times \mathbf{E}. \quad (63.9)$$

Tu je $\dot{\mathbf{v}} = \partial \mathbf{v} / \partial t'$; vse količine na desni strani enačb moramo vzeti ob času t' . Zanimivo je, da je magnetno polje povsod pravokotno na električno.

Električno polje je sestavljeno iz dveh različnih prispevkov. Prvi člen je odvisen le od hitrosti delca (ne pa od njegovega pospeška) in se pri velikih razdaljah obnaša kot $1/R^2$. Drugi člen je odvisen od pospeška in pri velikih razdalja pada kot $1/R$. Pozneje (§66) bomo videli, da je ta člen povezan z elektromagnetnim valovanjem, ki ga seva pospešen delec.

Prvi člen mora ustrezati polju, ki ga ustvarja delec, ki se giblje s konstantno hitrostjo, saj v členu ne nastopa pospešek delca. Pri konstantni hitrosti je razlika

$$\mathbf{R}_{t'} - \frac{\mathbf{v}}{c} R_{t'} = \mathbf{R}_{t'} - \mathbf{v}(t - t')$$

kar enaka razdalji $\mathbf{R}_t$ od naboja do točke P v trenutku, ko polje “izmerimo”. Z neposrednim izračunom se lahko hitro prepričamo, da velja še

$$R_{t'} - \frac{1}{c} \mathbf{R}_{t'} \cdot \mathbf{v} = \sqrt{R_t^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{R}_t)^2} = R_t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta_t},$$

kjer je θ_t kot med $\mathbf{R}_t$ in $\mathbf{v}$. Prvi člen v (63.8) je torej povsem enak izrazu (38.9).

NALOGA

NALOGA Izpeljli Lienard-Wiechertov potencial z integracijo enačb (62.9) in (62.10).

Rešitev: Enačbo (62.8) zapišemo v obliki

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \iint \frac{\rho(\mathbf{r}', \tau)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta \left(\tau - t + \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \right) d\tau dV'$$

(in podobno za $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$), pri čemer smo vpeljali dodatno funkcijo delta in tako odpravili implicitne argumente funkcije ρ . Za točkast naboj, ki se giblje po tiru $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t)$, imamo

$$\rho(\mathbf{r}', \tau) = e \delta[\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(\tau)].$$

Če vstavimo ta izraz in integriramo po dV' , dobimo

$$\phi(\mathbf{r}, t) = e \int \frac{d\tau}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)|} \delta \left[\tau - t + \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)| \right].$$

Integracijo po τ izračunamo z uporabo pravila

$$\delta[F(\tau)] = \frac{\delta(\tau - t')}{F'(\tau')}$$

[kjer je t' koren enačbe $F(t') = 0$], in dobimo izraz (63.5).

§64 Spektralni razcep zakasnjenih potencialov

Polje, ki ga proizvajajo gibajoči se naboji, lahko razvijemo po ravnih enobarvnih valovanjih. Potenciali različnih monokromatskih komponent polja so oblike $\phi_\omega e^{-i\omega t}$, $\mathbf{A}_\omega e^{-i\omega t}$. Tudi gostoto naboja in gostoto toka naboja sistema delcev lahko razvijemo v Fourierovo vrsto ali integral. Očitno je vsaka Fourierova komponenta količin ρ in $\mathbf{j}$ odgovorna za nastanek ustrezne enobarvne komponente polja.

Fourierove komponente polja, izražene s Fourierevimi komponentami gostote naboja in toka, dobimo tako, da v (62.9) namesto ϕ in ρ vstavimo $\phi_\omega e^{-i\omega t}$ in $\rho_\omega e^{-i\omega t}$. Tako dobimo

$$\phi_\omega e^{-i\omega t} = \int \rho_\omega \frac{e^{-i\omega(t-\frac{R}{c})}}{R} dV.$$

Izpostavimo $e^{-i\omega t}$ in vstavimo absolutno vrednost valovnega vektorja $k = \omega/c$. Sledi

$$\phi_\omega = \int \rho_\omega \frac{e^{ikR}}{R} dV. \quad (64.1)$$

Podobno dobimo za $\mathbf{A}_\omega$:

$$\mathbf{A}_\omega = \int \mathbf{j}_\omega \frac{e^{ikR}}{cR} dV. \quad (64.2)$$

Opazimo lahko, da enačba (64.1) predstavlja posplošitev rešitve Poissonove enačbe za bolj splošno enačbo oblike

$$\Delta\phi_\omega + k^2\phi_\omega = -4\pi\rho_\omega \quad (64.3)$$

(ki jo dobimo iz enačb (62.4) za ρ in ϕ , katerih časovna odvisnost je vsebovana v faktorju $e^{-i\omega t}$).

Če imamo opravka z razvojem v Fourierov integral, potem so Fourierove komponente gostote naboja enake

$$\rho_\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho e^{i\omega t} dt.$$

To vstavimo v (64.1) in dobimo

$$\phi_\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{\rho}{R} e^{i(\omega t + kR)} dV dt. \quad (64.4)$$

Sedaj se bomo iz obravnave zveznih porazdelitev gostote naboja preselili k obravnavi točkastih nabojev, katerih gibanje nas pravzaprav zanima. Če bi imeli en sam naboj, bi zapisali

$$\rho = e\delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)],$$

kjer je $\mathbf{r}_0(t)$ krajevni vektor naboja, torej podana funkcija časa. Ta izraz vstavimo v (64.4) in izračunamo prostorski integral [pri čimer je $\mathbf{r}$ nadomeščen z $\mathbf{r}_0(t)$]. Dobimo

$$\phi_\omega = e \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{R(t)} e^{i\omega[t+R(t)/c]} dt, \quad (64.5)$$

kjer je $R(t)$ razdalja od gibajočega se naboja do točke, kjer opazujemo polje. Podobno dobimo tudi za vektorski potencial

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{v}(t)}{R(t)} e^{i\omega[t+R(t)/c]} dt, \quad (64.6)$$

kjer je $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_0(t)$ hitrost delca.

Enačbi, analogni enačbam (64.5) in (64.6), lahko zapišemo tudi za primer, kjer je spektralni razcep gostote naboja in gostote toka naboja sestavljen iz zaporedja diskretnih frekvenc. Pri periodičnem gibanju točkastega naboja [s periodo $T = 2\pi/\omega$] spektralni razcep vsebuje le frekvence oblike $m\omega_0$, ustrezne komponente vektorskega potenciala pa so

$$\mathbf{A}_n = \frac{e}{cT} \int_0^T \frac{\mathbf{v}(t)}{R(t)} e^{in\omega_0[t+R(t)/c]} dt \quad (64.7)$$

(in podobno za ϕ_n). Tako v (64.6) kot v (64.7) so Fourierove komponente definirane tako, kot je opisano v §49.

NALOGA

NALOGA Razvij polje naboja, ki se giblje enakomerno nepospešeno, v ravne valove.

Rešitev: Postopek je podoben tistemu iz § 51. Gostoto naboja zapišemo v obliki $\rho = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$, kjer je $\mathbf{v}$ hitrost delca. Izračunamo Fourierove komponente enačbe $\square\phi = -4\pi e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$ in dobimo $(\square\phi)_{\mathbf{k}} = -4\pi e e^{-i(\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})t}$.

Po drugi strani velja

$$\phi = \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \phi_{\mathbf{k}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3},$$

od koder sledi

$$(\square\phi)_{\mathbf{k}} = -k^2\phi_{\mathbf{k}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi_{\mathbf{k}}}{\partial t^2}.$$

Zato je

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi_{\mathbf{k}}}{\partial t^2} + k^2\phi_{\mathbf{k}} = 4\pi e e^{-i(\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})t},$$

od tod pa končno dobimo

$$\phi_{\mathbf{k}} = 4\pi e \frac{e^{-i(\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})t}}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)^2}.$$

Iz izraza je razvidno, da ima valovanje z valovnim vektorjem $\mathbf{k}$ frekvenco $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$. Na podoben način dobimo tudi vektorski potencial

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = 4\pi e \frac{\mathbf{v} e^{-i(\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})t}}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)^2}.$$

Zapišimo še polji:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\phi_{\mathbf{k}} + i\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{c}\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = 4\pi e i \frac{-\mathbf{k} + \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})}{c^2}\mathbf{v}}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)^2} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})t},$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{k}} = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi e}{c} i \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{v}}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)^2} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})t}.$$

§65 Lagrangeva funkcija do členov drugega reda

V običajni klasični mehaniki lahko sistem interagirajočih delcev opišemo z Lagrangevo funkcijo, ki je odvisna samo od koordinat in hitrosti delcev (vzetih ob enem in istem času). To je dopustno, če privzamemo, da je hitrost širjenja interakcij neskončna, kar je osnovna podmena klasične mehanike.

Ugotovili smo že, da moramo zaradi končne hitrosti širjenja polje obravnavati kot neodvisen sistem z lastnimi "prostostnimi stopnjami". Od tod je razvidno, da moramo pri opisu sistema interagirajočih delcev (nabojev), obravnavati sistem, ki je sestavljen iz delcev samih in iz polja. To pomeni, da kadar upoštevamo končno hitrost širjenja interakcij, sistema interagirajočih delcev ne moremo povsem dobro opisati z Lagrangevo funkcijo, ki je odvisna le od koordinat in hitrosti delcev, in ki ne vsebuje nobenih količin, ki so povezane z notranjimi "prostostnimi stopnjami" polja.

Če pa je hitrost vseh delcev v majhna v primerjavi s svetlobno hitrostjo, potem lahko sistem približno opišemo z Lagrangevo funkcijo. Izkaže se, da lahko vpeljemo Lagrangevo funkcijo, ki opisuje sistem ne le tedaj, ko zanemarimo vse člene s faktorji v/c (klasična Lagrangeva funkcija), temveč ko ta vsebuje člene do drugega reda, v^2/c^2 . To je povezano s tem, da se izsevno elektromagnetno valovanje zaradi gibajočih se nabojev (in posledično tudi "lastno" polje) pojavi šele v tretjem približku po v/c (glej §67). *

Uvodoma naj spomnimo, da je v ničelnem približku, torej ko povsem zanemarimo retardacijo potencialov, Lagrangeva funkcija sistema enaka

$$L^{(0)} = \sum_a \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 - \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} \quad (65.1)$$

(seštevamo po vseh nabojih v sistemu). Drugi člen je potencialna energija interakcije, ki je takšna, kot če bi naboji mirovali.

Višje približke bomo dobili po naslednjem postopku. Lagrangeva funkcija za naboj e_a v zunanem polju je

$$L_a = -m_a c^2 \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} - e_a \phi + \frac{e_a}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_a. \quad (65.2)$$

Izberemo si torej enega izmed nabojev v sistemu in določimo potenciala ϕ in $\mathbf{A}$ polja, ki ga ustvarjajo vsi ostali naboji na mestu izbranega naboja, ter ga izrazimo s koordinatami in hitrostmi nabojev, ki polje ustvarjajo (to lahko storimo le približno, in sicer do členov reda v^2/c^2 za ϕ in do členov reda v/c za $\mathbf{A}$). Takšna izraza za potenciala vstavimo v (65.2). Tako bomo dobili Lagrangevo funkcijo za enega izmed nabojev v sistemu (pri danem gibanju ostalih nabojev). Iz te Lagrangeve funkcije bomo nato zlahka dobili Lagrangevo funkcijo celotnega sistema.

Začnemo z izrazoma za retardirana potenciala

$$\phi = \int \frac{\rho_{t-R/c}}{R} dV, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{t-R/c}}{R} dV.$$

Če so hitrosti vseh nabojev majhne v primerjavi s svetlobno, potem se porazdelitev nabojev ne spremeni občutno v času R/c . Zato lahko razvijemo $\rho_{t-R/c}$ in $\mathbf{j}_{t-R/c}$ v vrsto po potencah

*Pri sistemih delcev, ki imajo enako razmerje med nabojem in maso, se sevanje pojavi šele v petem približku po v/c ; v tem primeru obstaja Lagrangeva funkcija do četrtega reda po v/c . [Glej B.M.Barker in R. F. O'Connell, *Can. J. Phys.* **58**, 1659 (1980).]

R/c . Skalarni potencial je do členov drugega reda enak

$$\phi = \int \frac{\rho dV}{R} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R\rho dV$$

(ρ brez dodatnega indeksa je vrednost količine ρ ob času t ; časovne odvode smo smeli izpostaviti pred integralski znak). Ker je $\int \rho dV$ konstantni celotni naboj sistema, je drugi člen v razvoju enak nič in velja

$$\phi = \int \frac{\rho dV}{R} + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R\rho dV. \quad (65.3)$$

Podobno bi lahko storili z $\mathbf{A}$, vendar enačba za vektorski potencial, izražen z gostoto toka, že vsebuje $1/c$, in ko ga vstavimo v Lagrangevo funkcije je pomnožen še z dodatnim faktorjem $1/c$. Ker nam zadostuje Lagrangeva funkcija do členov drugega reda, se lahko ustavimo pri prvem členu v razvoju potenciala $\mathbf{A}$, torej

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\rho \mathbf{v}}{R} dV \quad (65.4)$$

(tok $\mathbf{j}$ smo tu nadomestili z $\rho \mathbf{v}$).

Najprej predpostavimo, da obstaja en sam točkast naboj e . V tem primeru dobimo iz enačb (65.3) in (65.4)

$$\phi = \frac{e}{R} + \frac{e}{2c^2} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2}, \quad \mathbf{A} = \frac{e \mathbf{v}}{cR}, \quad (65.5)$$

kjer je R razdalja od naboja.

Namesto ϕ in $\mathbf{A}$ si izberimo drugačna potenciala ϕ' in $\mathbf{A}'$, ki ju dobimo s transformacijo (glej § 18):

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f,$$

kjer si za f izberemo funkcijo

$$f = \frac{e}{2c} \frac{\partial R}{\partial t}.$$

Tako dobimo *

$$\phi' = \frac{e}{R}, \quad \mathbf{A}' = \frac{e \mathbf{v}}{cR} + \frac{e}{2c} \nabla \frac{\partial R}{\partial t}.$$

Pri izračunu potenciala $\mathbf{A}'$ najprej upoštevamo $\nabla(\partial R/\partial t) = (\partial/\partial t)\nabla R$. Gradient pomeni odvajanje po koordinatah točke v polje, kjer računamo vrednost $\mathbf{A}'$. Zato je ∇R enotski vektor $\mathbf{n}$, ki kaže v smeri od naboja e proti točki, kjer določamo polje, in sledi

$$\mathbf{A}' = \frac{e \mathbf{v}}{cR} + \frac{e}{2c} \dot{\mathbf{n}}.$$

Zapišemo lahko

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \right) = \frac{\dot{\mathbf{R}}}{R} - \frac{\mathbf{R} \dot{R}}{R^2}.$$

Odvod $-\dot{\mathbf{R}}$ pri fiksni točki v polju je kar enak hitrosti naboja $\mathbf{v}$, odvod $\dot{R}$ pa dobimo, če odvajamo $R^2 = \mathbf{R}^2$, torej iz

$$R \dot{R} = \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}} = -\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}.$$

*Potenciala nista več umerjena z Lorentzevo umeritvijo (62.1), niti nista rešitvi enačb (62.3) in (62.4).

Dobimo

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{-\mathbf{v} + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})}{R}.$$

Če to vstavimo v izraz za $\mathbf{A}'$, končno dobimo

$$\phi' = \frac{e}{R}, \quad \mathbf{A}' = \frac{e[\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}]}{2cR}. \quad (65.6)$$

Če imamo več nabojev, moramo očitno sešteti takšna izraza po vseh nabojih v sistemu.

Ta izraza vstavimo v (65.2) in dobimo Lagrangevo funkcijo L_a za naboj e_a (pri vnaprej določenem gibanju vseh ostalih delcev). Pri tem moramo še razviti prvi člen v (65.2) po potencah v_a/c in obdržati člene do drugega reda. Tako dobimo:

$$L_a = \frac{m_a v_a^2}{2} + \frac{1}{8} \frac{m_a v_a^4}{c^2} - e_a \sum_b' \frac{e_b}{R_{ab}} + \frac{e_a}{2c^2} \sum_b' \frac{e_b}{R_{ab}} [\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}_b + (\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n}_{ab})(\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_{ab})]$$

(seštevamo po vseh nabojih z izjemo e_a ; $\mathbf{n}_{ab}$ je enotski vektor v smeri od e_b proti e_a).

Od tod ni več težko dobiti Lagrangevo funkcijo za celoten sistem. Hitro se lahko prepričamo, da ta funkcija ni vsota funkcij L_a za vse naboje, temveč da se glasi

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + \sum_a \frac{m_a v_a^4}{8c^2} - \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} + \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{2c^2 R_{ab}} [\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}_b + (\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n}_{ab})(\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_{ab})]. \quad (65.7)$$

Za vsak naboj (pri danem gibanju vseh ostalih) funkcija L preide v zgoraj podano funkcijo L_a . Izraz (65.7) je Lagrangeva funkcija sistema nabojev, ki je pravilna do členov drugega reda. (Prvi jo je izpeljal C. G. Darwin leta 1922.)

Poiščimo še Hamiltonovo funkcijo sistema nabojev v okviru istega približka. To bi lahko dosegli z uporabo splošnega pravila za računanje $\mathcal{H}$ iz L , vendar obstaja tudi lažja pot. Drugi in četrti člen v (65.7) sta majhna popravka k $L^{(0)}$ (65.1). Po drugi strani vemo iz mehanike, da za majhne popravke k L in $\mathcal{H}$ velja, da so enaki po velikosti, a nasprotnih predznakov (pri tem variacijo L jemljemo pri konstantnih koordinatah in hitrostih, popravek k $\mathcal{H}$ pa pri konstantnih koordinatah in gibalnih količinah). *

Zato lahko $\mathcal{H}$ zapišemo tako, da od

$$\mathcal{H}^{(0)} = \sum_a \frac{p_a^2}{2m_a} + \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}}$$

odštejemo drugi in četrti člen enačbe (65.7), hitrosti pa nadomestimo z gibalnimi količinami s prvim približkom $\mathbf{v}_a = \mathbf{p}_a/m_a$. Zato je

$$\mathcal{H} = \sum_a \frac{p_a^2}{2m_a} - \sum_a \frac{p_a^4}{8c^2 m_a^3} + \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} - \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{2c^2 m_a m_b R_{ab}} [\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b + (\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{n}_{ab})(\mathbf{p}_b \cdot \mathbf{n}_{ab})]. \quad (65.8)$$

NALOGE

*Glej *Mehanika*, §50.

NALOGA 1. Izračunaj (do členov drugega reda natančno) težišče sistema interagirajočih delcev.

Rešitev: Nalogo najlažje rešimo z uporabo enačbe

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_a \mathcal{E}_a \mathbf{r}_a + \int W \mathbf{r} dV}{\sum_a \mathcal{E}_a + \int W dV}$$

[glej (14.6)], kjer je $\mathcal{E}_a$ kinetična energija delca (vključno z njegovo mirovno energijo), W pa je gostota energije polja, ki ga ustvarjajo delci. Ker $\mathcal{E}_a$ vsebujejo velike količine $m_a c^2$, v naslednjem približku zadošča, da v $\mathcal{E}_a$ in W obdržimo le tiste člene, ki ne vsebujejo c . To pomeni, da v obzir vzamemo le nerelativistično kinetično energijo delcev in energijo elektrostatičnega polja. Tako dobimo

$$\begin{aligned} \int W \mathbf{r} dV &= \frac{1}{8\pi} \int E^2 \mathbf{r} dV \\ &= \frac{1}{8\pi} \int (\nabla \phi)^2 \mathbf{r} dV \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \left(\mathbf{df} \cdot \nabla \frac{\phi^2}{2} \right) \mathbf{r} - \frac{1}{8\pi} \int \nabla \frac{\phi^2}{2} dV - \frac{1}{8\pi} \int \phi \Delta \phi \mathbf{r} dV; \end{aligned}$$

integral po neskončno oddaljeni ploskvi odpade; tudi drugi integral lahko prevedemo na ploskovni integral in ga tako odpravimo. V tretji integral vstavimo $\Delta \phi = -4\pi\rho$ in dobimo

$$\int W \mathbf{r} dV = \frac{1}{2} \int \rho \phi \mathbf{r} dV = \frac{1}{2} \sum_a e_a \phi_a \mathbf{r}_a,$$

kjer je ϕ_a potencial, ki ga v točki $\mathbf{r}_a$ ustvarijo vsi naboji razen e_a . *

Končno dobimo

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\mathcal{E}} \sum_a \mathbf{r}_a \left(m_a c^2 + \frac{p_a^2}{2m_a} + \frac{e_a}{2} \sum_b' \frac{e_b}{R_{ab}} \right)$$

(seštevamo po vseh b razen $b = a$), kjer je

$$\mathcal{E} = \sum_a \left(m_a c^2 + \frac{p_a^2}{2m_a} + \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} \right)$$

celotna energija sistema. V izbranem približku lahko torej koordinate težišča izrazimo s količinami, ki se nanašajo izključno na delce.

NALOGA 2. Zapiši Hamiltonovo funkcijo v drugem približku za sistem dveh delcev. Iz naloge odpravi gibanje sistema kot celote.

Rešitev: Izberemo si opazovalni sistem, v katerem je celotna gibalna količina obeh delcev enaka nič. Gibalni količini zapišemo z odvodi akcije in dobimo

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}_1} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}_2} = 0.$$

Od tod je razvidno, da je v izbranem sistemu akcija funkcija spremenljivke $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, razlike krajevnih vektorjev obeh delcev. Zato imamo $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}$, kjer je $\mathbf{p} = \partial S / \partial \mathbf{r}$ gibalna količina relativnega gibanja delcev. Hamiltonova funkcija se glasi

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p^2 - \frac{1}{8c^2} \left(\frac{1}{m_1^3} + \frac{1}{m_2^3} \right) p^4 + \frac{e_1 e_2}{r} + \frac{e_1 e_2}{2m_1 m_2 c^2 r} [p^2 + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})^2].$$

*S tem, ko odpravimo lastna polja delcev, dosežemo "renormalizacijo" mas, ki smo jo opisali v opombi na strani 94.

Poglavje 9

Sevanje elektromagnetnega valovanja

§66 Polje sistema nabojev pri veliki oddaljenosti od sistema

Zanima nas, kakšno je polje, ki ga proizvaja sistem gibajočih se nabojev, pri oddaljenosti, ki je velika v primerjavi z velikostjo sistema.

Naj izhodišče koordinatnega sistema O leži nekje v notranjosti sistema nabojev. Z $\mathbf{R}_0$ označimo krajevni vektor od točke O do točke P , v kateri računamo polje, enotski vektor v tej smeri pa naj bo $\mathbf{n}$. Krajevni vektor do diferencialnega naboja $de = \rho dV$ označimo z $\mathbf{r}$, krajevni vektor od de do točke P pa z $\mathbf{R}$. Očitno velja $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$.

Pri veliki oddaljenosti od sistema nabojev je $R_0 \gg r$, tako da približno velja

$$R = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}| \approx R_0 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}.$$

To vstavimo v enačbi (62.9) in (62.10) za retardirana potenciala. V imenovalcu integrandov lahko $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}$ zanemarimo v primerjavi z R_0 . V $t - (R/c)$ pa tega v splošnem ne smemo storiti; o tem ne odloča razmerje med vrednostma R_0/c in $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{n}/c)$, temveč to, za koliko se količini ρ in $\mathbf{j}$ spremenita v času $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{n}/c)$. Ker je R_0 konstanta pri integriranju, jo lahko izpostavimo pred integralni znak. Za potenciala polja pri veliki oddaljenosti od sistema nabojev torej dobimo

$$\phi = \frac{1}{R_0} \int \rho_{t - \frac{R_0}{c} + \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{n}}{c}} dV, \quad (66.1)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_{t - \frac{R_0}{c} + \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{n}}{c}} dV. \quad (66.2)$$

Pri veliki oddaljenosti od sistema nabojev lahko polje na zadosti majhnih območjih prostora obravnavamo kot ravno valovanje. Za to ni potrebno le to, da je oddaljenost velika v primerjavi z velikostjo sistema, temveč mora ta biti tudi večja od valovne dolžine elektromagnetnih valovanj, ki jih seva sistem. Tisti del prostora, kjer sta pogoja izpolnjena, imenujemo *valovno območje* (angl. *wave zone*).

Pri ravnem valovanju sta polji $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ med seboj povezani z (47.4), $\mathbf{E} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}$. Ker je $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$, bo polje v valovnem območju povsem določeno, če izračunamo vektorski potencial. V ravnem valovanju je $\mathbf{H} = (1/c)\dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}$ [glej (47.3)], kjer pika označuje odvod po

času. * Če torej poznamo $\mathbf{A}$, dobimo $\mathbf{H}$ in $\mathbf{E}$ iz enačb [†]

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{c} (\dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}. \quad (66.3)$$

Vidimo, da je polje pri veliki oddaljenosti od sistema obratno sorazmerno s prvo potenco razdalje R_0 od sistema. Opazimo še, da čas t v izrazih od (66.1) do (66.3) vedno nastopa v obliki izraza $t - (R_0/c)$.

Za sevanje enega samega točkastega naboja, ki se giblje po poljubni poti, se izplača uporabiti Lienard-Wiechertov potencial. Pri veliki oddaljenosti lahko krajevni vektor $\mathbf{R}$ v enačbi (63.5) nadomestimo s konstantnim vektorjem $\mathbf{R}_0$, v pogoju (63.1), ki določa t' , pa uporabimo $R = R_0 - \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}$ (pri tem je $\mathbf{r}_0(t)$ krajevni vektor naboja). Sledi [‡]

$$\mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}(t')}{cR_0 \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}(t')}{c}\right)}, \quad (66.4)$$

čas t' pa je določen z

$$t' - \frac{\mathbf{r}_0(t)}{c} \cdot \mathbf{n} = t - \frac{R_0}{c}. \quad (66.5)$$

Izsevano elektromagnetno valovanje odnaša energijo. Pretok energije je podan s Poyntingovim vektorjem, ki ga lahko za ravno valovanje zapišemo v obliki

$$\mathbf{S} = c \frac{H^2}{4\pi} \mathbf{n}.$$

Jakost sevanja dI v diferencialni prostorski kot do je definirana kot količina energije, ki na enoto časa preide skozi diferencialno ploskvico $df = R_0^2 d\Omega$ do na krogelni ploskvi polmera R_0 s središčem v izhodišču. Ta količina mora biti enaka pretoku energije S pomnoženem z df , torej

$$dI = c \frac{H^2}{4\pi} R_0^2 d\Omega. \quad (66.6)$$

Ker je polje H obratno sorazmerno z R_0 , je količina energije, ki jo seva sistema na enoto časa v diferencialni prostorski kot do, enaka pri vseh oddaljenostih (če so vrednosti $t - (R_0/c)$ za vse razdalje enake). To je natanko tako, kot mora biti, ker se izsevana energija oddaljuje s hitrostjo c v okoliški prostor, in se nikjer ne nabira niti izginja.

Izpeljimo enačbo za spektralni razcep polja izsevanega valovanja. Te enačbe lahko dobimo neposredno iz tistih, ki smo jih izpeljali v §64. V (64.2) vstavimo $R = R_0 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}$ (v imenovalcu integranda lahko postavimo $R = R_0$) in dobimo Fourierove komponente vektorskega potenciala:

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e^{ikR_0}}{cR_0} \int \mathbf{j}_\omega e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} dV \quad (66.7)$$

*V tem primeru lahko enačbo preprosto preverimo z neposrednim izračunom rotorja izraza (66.2), pri čemer moramo člene reda $1/R_0^2$ zanemariti v primerjavi s členi reda $1/R_0$.

[†]Enačba $\mathbf{E} = -1/c \dot{\mathbf{A}}$ [glej (47.3)] tu ne velja za potenciala ϕ in $\mathbf{A}$, saj ta ne izpolnjujeta dodatnega pogoja, ki smo ga zanj zahtevali v §47.

[‡]Ta približek ustreza temu, da v enačbi (63.8) za električno polje zanemarimo prvi člen v primerjavi z drugim.

(kjer je $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$). Komponente $\mathbf{H}_\omega$ in $\mathbf{E}_\omega$ so določene z enačbo (66.3). Vanjo namesto $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ in $\mathbf{A}$ vstavimo $\mathbf{H}_\omega e^{-i\omega t}$, $\mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t}$ in $\mathbf{A}_\omega e^{-i\omega t}$, nato pa delimo z $e^{-i\omega t}$. Tako dobimo

$$\mathbf{H}_\omega = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_\omega, \quad \mathbf{E}_\omega = \frac{ic}{\omega}(\mathbf{k} \times \mathbf{A}_\omega) \times \mathbf{k}. \quad (66.8)$$

Ko govorimo o spektralni gostoti jakosti sevanja, moramo ločiti med razvojem v Fourierovo vrsto in razvojem v Fourierov integral. Razvoj v Fourierov integral uporabimo v primeru sevanja ob trku nabitih delcev. V tem primeru je količina, ki bi jo radi določili, celotna energija, ki je bila izsevana ob trku (in ki sta jo naboja torej izgubila). Naj bo $d\mathcal{E}_{n\omega}$ energija, izsevana v diferencialni prostorski kot do v obliki valovanj s frekvencami v intervalu $d\omega$. Enačba (49.8) nam pove, da dobimo delež celotnega sevanja na frekvenčnem območju širine $d\omega/2\pi$ iz običajne enačbe za jakost, če kvadrat polja nadomestimo z kvadratom amplitude (modula) ustrezne Fourierove komponente in pomnožimo z dva. Namesto (66.6) dobimo torej

$$d\mathcal{E}_{n\omega} = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{H}_\omega|^2 R_0^2 d\omega. \quad (66.9)$$

Če se naboji gibljejo periodično, potem moramo sevanje razviti v Fourierovo vrsto. Po splošni enačbi (49.4) dobimo jakosti različnih komponent Fourierovega razcepa iz običajne enačbe za jakost, če nadomestimo polje s Fourierovimi komponentami in pomnožimo z dva. Zato je jakost sevanja v diferencialni prostorski kot do s frekvenco $\omega = n\omega_0$ enaka

$$dI_n = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{H}_n|^2 R_0^2 d\omega. \quad (66.10)$$

Končno zapišimo še enačbe, ki določajo Fourierove komponente polja izsevanega valovanja iz poznanih trajektorij nabojev, ki sevajo. Pri razvoju v Fourierov integral imamo

$$\mathbf{j}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{j} e^{i\omega t} dt.$$

To vstavimo v (66.7), namesto zvezne porazdelitve toka pa v enačbi upoštevamo gibanje enega naboja po trajektoriji $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t)$ (glej §64). Dobimo

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e^{ikR_0}}{cR_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e\mathbf{v}(t) e^{i[\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0(t)]} dt. \quad (66.11)$$

Ker je $\mathbf{v} = d\mathbf{r}_0/dt$, velja $\mathbf{v} dt = d\mathbf{r}_0$, zato lahko zgornjo enačbo zapišemo v obliki integrala po poti vzdolž trajektorije naboja:

$$\mathbf{A}_\omega = e \frac{e^{ikR_0}}{cR_0} \int e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0)} d\mathbf{r}_0. \quad (66.12)$$

Fourierove komponente magnetnega polja zapišemo z uporabo enačbe (66.8):

$$\mathbf{H}_\omega = e \frac{i\omega e^{ikR_0}}{c^2 R_0} \int e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0)} \mathbf{n} \times d\mathbf{r}_0. \quad (66.13)$$

Če se naboji gibljejo periodično po sklenjenih orbitah, moramo polje razviti v Fourierovo vrsto. Komponente dobimo tako, da integracijo po času v enačbah (66.11)-(66.13) nadomestimo s povprečjem po periodi gibanja T (glej § 49). Fourierove komponente magnetnega polja

s frekvenco $\omega = n\omega_0 = n(2\pi/T)$ so

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_n &= e \frac{2\pi i n e^{ikR_0}}{c^2 T^2 R_0} \int_0^T e^{i[n\omega_0 t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0(t)]} \mathbf{n} \times \mathbf{v}(t) dt \\ &= e \frac{2\pi i n e^{ikR_0}}{c^2 T^2 R_0} \oint e^{i(n\omega_0 t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0)} \mathbf{n} \times d\mathbf{r}_0.\end{aligned}\quad (66.14)$$

V drugem integralu moramo integrirati po sklenjeni orbiti delca.

NALOGE

NALOGA 1. Poišči štiridimenzionalni zapis izraza za spektralni razcep četverca gibalne količine, ki ga izseva naboj, ki se giblje po dani trajektoriji.

Rešitev: Enačbo (66.8) vstavimo v (66.9) in upoštevamo, da zaradi pogoja (62.1) velja $k\phi_\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_\omega$. Dobimo

$$\begin{aligned}d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} &= \frac{c}{2\pi} (k^2 |\mathbf{A}_\omega|^2 - |\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_\omega|^2) R_0^2 d\omega \frac{d\omega}{2\pi} \\ &= \frac{ck^2}{2\pi} (|\mathbf{A}_\omega|^2 - |\phi_\omega|^2) R_0^2 d\omega \frac{d\omega}{2\pi} = -\frac{ck^2}{2\pi} A_{i\omega} A_\omega^{i*} R_0^2 d\omega \frac{d\omega}{2\pi}.\end{aligned}$$

Četverec potenciala $A_{i\omega}$ zapišemo k obliki, podobni (66.12):

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} = -\frac{k^2 e^2}{4\pi^2} \chi_i \chi^{i*} d\mathbf{k},$$

kjer χ^i označuje četverec

$$\chi^i = \int \exp(-ik_l x^l) dx^i$$

integrirati pa moramo vzdolž svetovnice delca. Končno se preselimo v štiridimenzionalni zapis [vključno s četverno "diferencialno prostornino" v prostoru k , kot v enačbi (10.2)], in dobimo izraz za izsevan četverec gibalne količine:

$$dP^i = \frac{e^2 k^i}{2\pi^2 c} \chi_j \chi^{j*} \delta(k_m k^m) d^4 k.$$

NALOGA 2. Poišči štiridimenzionalni zapis spektralnega razcepa četverca gibalne količine, ki ga izseva naboj, ki se giblje po danem tiru.

Rešitev: V enačbo (66.9) vstavimo (66.8) in upoštevamo, da zaradi pogoja (62.1) velja $k\phi_\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_\omega$. Dobimo

$$\begin{aligned}d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} &= \frac{c}{2\pi} (k^2 |\mathbf{A}_\omega|^2 - |\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_\omega|^2) R_0^2 d\omega \frac{d\omega}{2\pi} \\ &= \frac{ck^2}{2\pi} (|\mathbf{A}_\omega|^2 - |\phi_\omega|^2) R_0^2 d\omega \frac{d\omega}{2\pi} = -\frac{ck^2}{2\pi} A_{i\omega} A_\omega^{i*} R_0^2 d\omega \frac{d\omega}{2\pi}.\end{aligned}$$

Če četverni potencial $A_{i\omega}$ zapišemo v obliki, podobni tisti iz enačbe (66.12), dobimo

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} = -\frac{k^2 e^2}{4\pi^2} \chi_i \chi^{i*} d\mathbf{k},$$

kjer je χ^i enak

$$\chi^i = \int \exp(-ik_l x^l) dx^i$$

integriramo pa po svetovnici delca. Na koncu se preselimo v štiridimenzionalni zapis [vključimo štiridimenzionalni diferencial prostornini v prostoru k , kot v (10.2)] in dobimo izsevani četverec gibalne količine:

$$dP^i = \frac{e^2 k^i}{2\pi^2 c} \chi_i \chi^{i*} \delta(k_m k^m) d^4 k.$$

§67 Sevanje dipola

Čas $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{n}/c)$ v integrandu izrazov (66.1) in (66.2) za retardirana potenciala lahko zanemarimo, če se porazdelitev nabojev v tem času ne spremeni veliko. Hitro lahko določimo pogoje, da bo ta zahteva izpolnjena. Naj T označuje velikostni red časa, v katerem se porazdelitev nabojev v sistemu občutno spremeni. Sevanje sistema bo seveda vsebovalo tudi valovanje s periodo reda T (torej s frekvenco reda $1/T$). Za označimo velikostni red razsežnosti sistema. Tedaj bo čas $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{n}/c)$ približno enak a/c . Porazdelitev naboja v sistemu se ne bo občutno spremenila v tem času, če velja $a/c \ll T$. Količina cT pa je ravno valovna dolžina sevanja λ . Zato lahko pogoj $a \ll cT$ zapišemo kot

$$a \ll \lambda, \quad (67.1)$$

kar pomeni, da mora biti sistem majhen v primerjavi z valovno dolžino izsevane svetlobe.

Pogoj (67.1) lahko dobimo tudi iz (66.7). Količina $\mathbf{r}$ v integrandu zavzame vrednosti na območju velikostnega reda razsežnosti sistema, saj je izven sistema $\mathbf{j}$ enak nič. Zato je eksponent $i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ majhen in ga lahko zanemarimo za valovanja, pri katerih je $ka \ll 1$, kar je enakovredno enačbi (67.1).

Pogoj lahko zapišemo še v eni obliki, če upoštevamo, da je $T \sim a/v$, in je zato $\lambda \sim ca/v$, kjer je v velikostni red hitrosti nabojev. Iz $a \ll \lambda$ nato dobimo

$$v \ll c, \quad (67.2)$$

kar pomeni, da morajo biti hitrosti nabojev majhne v primerjavi s svetlobno hitrostjo.

Privzeli bomo, da je ta pogoj izpolnjen, in si ogledali sevanje pri oddaljenostih od se-vajočega sistema, ki so velike v primerjavi z valovno dolžino (in vsekakor velike v primer-javi z razsežnostjo sistema). Kot smo poudarili v § 66, lahko pri takšni oddaljenosti polje obravnavamo kot ravno valovanje, zato bo polje povsem določeno, če izračunamo vektorski potencial.

Vektorski potencial (66.2) zapišemo kot

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_\nu dV, \quad (67.3)$$

kjer čas $t' = t - (R_0/c)$ ni več odvisen od integracijskih spremenljivk. Vstavimo $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ in enačbo zapišemo v obliki

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \left(\sum e \mathbf{v} \right)$$

(seštevamo po vseh nabojih v sistemu; zaradi krajšega zapisa izpuščamo indeks t' – vse količine na desni strani enačbe se nanašajo na čas t'). Velja

$$\sum e \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \sum e \mathbf{r} = \dot{\mathbf{d}},$$

kjer je $\mathbf{d}$ dipolni moment sistema. Zato je

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \dot{\mathbf{d}}. \quad (67.4)$$

Magnetno polje dobimo s pomočjo enačbe (66.3):

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c^2 R_0} \ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}, \quad (67.5)$$

električno polje pa je enako

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2 R_0} (\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}. \quad (67.6)$$

Ugotovimo, da je v tem približku sevanje določeno z drugim odvodom dipolnega momenta sistema. Tovrstno sevanje imenujemo *sevanje dipola* (angl. *dipole radiation*).

Ker je $\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r}$, je $\dot{\mathbf{d}} = \sum e\dot{\mathbf{v}}$. Naboji lahko torej sevajo le, če so pospešeni. Naboji, ki se gibljejo enakomerno premočrtno, ne sevajo. To sledi tudi neposredno iz načela relativnosti, ker lahko enakomerno premočrtno gibajoči se delec opišemo tudi v inercialnem sistemu, v katerem delec miruje, mirujoči delec pa ne seva.

Če vstavimo (67.5) v (66.6), dobimo jakost sevanja dipola:

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3} (\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n})^2 d\Omega = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta d\Omega, \quad (67.7)$$

kjer je θ kot med $\ddot{\mathbf{d}}$ in $\mathbf{n}$. To je količina energije, ki jo sistem izseva na enoto časa v diferencialni prostorski kot $d\Omega$. Opozorimo naj, da je kotna porazdelitev sevanja podana s faktorjem $\sin^2 \theta$.

Če vstavimo $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ in integriramo po θ od 0 do π , dobimo celotno sevanje:

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2. \quad (67.8)$$

Če se v zunanjem polju giblje en sam naboj, je $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ in $\ddot{\mathbf{d}} = e\mathbf{w}$, kjer je $\mathbf{w}$ pospešek naboja. Celotno sevanje naboja, ki se giblje, je

$$I = \frac{2e^2 w^2}{3c^3}. \quad (67.9)$$

Opozorimo naj, da izoliran sistem delcev, ki imajo vsi isto razmerje med nabojem in maso, ne more sevati kot dipol. Dipolni moment takšnega sistema je namreč

$$\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r} = \sum \frac{e}{m} m\mathbf{r} = \text{konst} \sum m\mathbf{r},$$

kjer je konst razmerje med nabojem in maso, ki je enako za vse delce. Vsota $\sum m\mathbf{r}$ pa je enaka $\mathbf{R} \sum m$, kjer je $\mathbf{R}$ krajevni vektor težišča sistema (spomniti se moramo, da so vse hitrosti majhne, $v \ll c$, zato velja nerelativistična mehanika). Zato je $\ddot{\mathbf{d}}$ sorazmeren s pospeškom težišča, ki pa je enak nič, ker se težišče giblje premočrtno nepospešeno.

Zapišimo še enačbo za spektralni razcep jakosti sevanja dipola. V primeru sevanja ob trku vpeljemo količino $d\mathcal{E}_\omega$, energijo izsevano ob trku v obliki valovanj s frekvenco ω v intervalu $d\omega/2\pi$ (glej § 66). Dobimo jo, če vektor $\ddot{\mathbf{d}}$ v (67.8) nadomestimo s Fourierovo komponento $\ddot{\mathbf{d}}_\omega$ in pomnožimo z dva:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{4}{3c^3} (\ddot{\mathbf{d}}_\omega)^2 \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Izraz lahko poenostavimo. Velja namreč

$$\ddot{\mathbf{d}}_{\omega} e^{-i\omega t} = \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{d}_{\omega} e^{-i\omega t}) = -\omega^2 \mathbf{d}_{\omega} e^{-i\omega t},$$

od koder sledi $\ddot{\mathbf{d}}_{\omega} = -\omega^2 \mathbf{d}_{\omega}$. Tako dobimo

$$d\mathcal{E}_{\omega} = \frac{4\omega^4}{3c^3} |\mathbf{d}_{\omega}|^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (67.10)$$

V primeru, ko se delci gibljejo periodično, po podobni poti dobimo jakost sevanja s frekvenco $\omega = n\omega_0$:

$$I_n = \frac{4\omega_0^4 n^4}{3c^3} |\mathbf{d}_n|^2. \quad (67.11)$$

NALOGE

NALOGA 1. Kako seva dipol $\mathbf{d}$, ki se vrti v ravnini s konstantno kotno hitrostjo Ω . *

Rešitev: Ravnina vrtenja naj bo ravnina XY . Velja

$$d_x = d_0 \cos \Omega t, \quad d_y = d_0 \sin \Omega t.$$

Ker sta ti funkciji monokromatski, je tudi sevanje monokromatsko s frekvenco $\omega = \Omega$. Z uporabo enačbe (67.7) dobimo kotno porazdelitev sevanja (povprečeno po periodi vrtenja):

$$\overline{dI} = \frac{d_0^2 \Omega^4}{8\pi c^3} (1 + \cos^2 \theta) d\Omega,$$

kjer je θ kot med smerjo sevanja $\mathbf{n}$ in osjo Z . Celotno sevanje je

$$\overline{dI} = \frac{2d_0^2 \Omega^4}{3c^3}.$$

Sevanje je polarizirano v smeri vektorja $\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n} = \omega^2 \mathbf{n} \times \mathbf{d}$. Če ta vektor razcepimo na komponento v ravnini $\mathbf{n}$, Z in pravokotno nanjo, ugotovimo, da je sevanje eliptično polarizirano, razmerje med osema elipse je enako $n_z = \cos \theta$; posebni primer je sevanje v smeri osi Z , ki je krožno polarizirano.

NALOGA 2. Določi kotno porazdelitev sevanja sistema nabojev, ki se kot celota giblje s hitrostjo $\mathbf{v}$, če poznamo porazdelitev sevanja v opazovalnem sistemu, v katerem naboji kot celota mirujejo.

Rešitev: Naj bo

$$dI' = f(\cos \theta', \phi') d\Omega', \quad d\Omega' = d\cos \theta d\phi'$$

jakost sevanja v opazovalnem sistemu K' , ki se giblje skupaj s sistemom nabojev (θ' in ϕ' sta polarni koordinati; polarna os naj leži v smeri gibanja sistema). Energija $d\mathcal{E}$, ki je izsevana v času dt v nepremičnem (laboratorijskem) opazovalnem sistemu K je povezana z energijo $d\mathcal{E}'$, ki je izsevana v sistemu K' , s pretvorbenim pravilom

$$d\mathcal{E}' = \frac{d\mathcal{E} - \mathbf{V} \cdot d\mathbf{P}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = d\mathcal{E} \frac{1 - \frac{V}{c} \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

*Sevanje rotatorja ali simetrične vrtavke, ki ima dipolni moment, je te vrste. V prvem primeru je $\mathbf{d}$ celotni dipolni moment rotatorja; v drugem primeru je $\mathbf{d}$ projekcija dipolnega momenta vrtavke na ravnino, ki je pravokotna na precesijsko os vrtavke (i.e. torej na smer celotne vrtilne količine).

(gibalna količina sevanja, ki potuje v dani smeri, je povezana z energijo po enačbi $|\mathbf{dP}| = d\mathcal{E}/c$). Polarna kota θ in θ' smeri sevanja v sistemih K in K' sta med seboj povezana z enačbama (5.6), azimutna kota ϕ in ϕ' pa sta enaka. Končno moramo upoštevati še, da časovni interval dt' v sistemu K' ustreza intervalu

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

v sistemu K .

Tako dobimo jakost v sistemu K , $dI = (d\mathcal{E}/dt)$ do:

$$dI = \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^2}{\left(1 - \frac{V}{c} \cos \theta\right)^3} f\left(\frac{\cos \theta - \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c} \cos \theta}, \phi\right) d\Omega.$$

Za dipol, ki se giblje v smeri lastne osi, je $f = \text{konst} \cdot \sin^2 \theta'$ in z uporabo zgornje enačbe dobimo

$$dI = \text{konst} \cdot \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^3 \sin^2 \theta}{\left(1 - \frac{V}{c} \cos \theta\right)^5} d\Omega.$$

§68 Dipolno sevanje ob trku

Ko obravnavamo sevanje, ki nastane ob trkih, nas običajno ne zanima sevanje, ki nastane ob trku dveh delcev, ki se gibljeta po določenih trajektorijah. Bolj zanimivo je sipanje celotnega snopa delcev, ki se gibljejo vzporedno, računamo pa celotno sevanje na enoto gostote toka delcev.

Če je gostota toka enaka ena, torej če na enoto časa preide skozi enoto čelnega preseka snopa natanko en delec, tedaj je število delcev s "parametrom trka" med ρ in $\rho + d\rho$ enako $2\pi\rho d\rho$ (to je ploščina obroča, ki ga omejujeta kroga s polmeroma ρ in $\rho + \Delta\rho$). Iskano celotno sevanje dobimo, če pomnožimo energijo $\Delta\mathcal{E}$, ki jo izseva en delec (pri danem parametru trka) z $2\pi\rho d\rho$, in integriramo po ρ od 0 do ∞ . Tako dobljena količina ima dimenzijo energije, pomnožene s ploščino. Imenujemo jo *efektivno sevanje* (po analogiji z efektivnim presekom pri sipanju), označimo pa jo z $\varkappa$: *

$$\varkappa = \int_0^\infty \Delta\mathcal{E} \cdot 2\pi\rho d\rho. \quad (68.1)$$

Na podoben način lahko določimo efektivno sevanje v dan diferencialni prostorski kot do, na danem frekvenčnem intervalu $d\omega$, ipd. †

Izpeljali bomo splošno enačbo za kotno porazdelitev sevanja pri sipanju snopa delcev na središčno simetričnem polju, če privzamemo, da je sipanje povsem dipolno.

Jakost sevanja (ob nekem času) za vsakega izmed delcev v obravnavanem snopu je podana z enačbo (67.7), v kateri moramo za $\mathbf{d}$ vzeti dipolni moment delca glede na sipalec. ‡ Najprej

*Razmerje med $\varkappa$ in energijo sistem, ki seva, se imenuje sipalni presek za izgubo energije z sevanjem.

†Če je izraz, ki ga moramo integrirati, odvisen od kota projekcije dipolnega momenta delca na ravnino, ki leži prečno na snop, potem moramo najprej izračunati povprečje po vseh smereh v tej ravnini, šele potem pa pomnožimo z $2\pi\rho d\rho$ in integriramo.

‡V resnici moramo običajno vzeti dipolni moment dveh delcev – sipanega delca in sipalca – glede na njuno skupno težišče.

izračunamo povprečje tega izraz po vseh smereh vektorja $\ddot{\mathbf{d}}$ v ravnini, pravokotni na smer snopa. Velja $(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n})^2 = \ddot{\mathbf{d}}^2 - (\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{d}})^2$, od koder je razvidno, da računanje povprečja prizadene le $(\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{d}})^2$. Ker je sipalno polje središčno simetrično, vpadni snop pa je vzporeden, ima sipalni proces (in s tem tudi sevanje) osno simetrijo glede na os, ki poteka skozi sipalec. Ta os naj bo os X . Iz simetrije je razvidno, da se prvi potenci $\ddot{d}_y$ in $\ddot{d}_z$ ob računanju povprečja izničita, in ker na $\ddot{d}_x$ povprečenje ne vpliva, velja

$$\overline{\ddot{d}_x \ddot{d}_y} = \overline{\ddot{d}_x \ddot{d}_z} = 0.$$

Povprečni vrednosti od $\ddot{d}_y^2$ in od $\ddot{d}_z^2$ sta enaki in znašata

$$\overline{\ddot{d}_y^2} = \overline{\ddot{d}_z^2} = \frac{1}{2}[(\ddot{\mathbf{d}})^2 - \ddot{d}_x^2].$$

Če vse to upoštevamo, brez težav dobimo

$$\overline{(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n})^2} = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{d}}^2 + \ddot{d}_x^2) + \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{d}}^2 - 3\ddot{d}_x^2) \cos^2 \theta,$$

kjer je θ kot med smerjo izsevane svetlobe $\mathbf{n}$ in osjo X .

Jakost integriramo po času in po vseh parametrih trka. Dobimo naslednji izraz za efektivno sevanje kot funkcijo smeri sevanja:

$$d\kappa_{\mathbf{n}} = \frac{do}{4\pi c^3} \left[A + B \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right], \quad (68.2)$$

kjer sta

$$A = \frac{2}{3} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{\mathbf{d}}^2 dt 2\pi \rho d\rho, \quad B = \frac{1}{3} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} (\ddot{\mathbf{d}}^2 - 3\ddot{d}_x^2) dt 2\pi \rho d\rho. \quad (68.3)$$

Drugi člen v (68.2) je zapisan v takšni obliki, da odpade pri računanju povprečja po vseh smereh, zato je efektivno sevanje enako $\kappa = A/c^3$. Poudariti moramo, da je kotna porazdelitev sevanja simetrična glede na ravnino, ki poteka skozi sipalec in je pravokotna na snop žarkov, saj se izraz (68.2) ne spremeni, če θ nadomestimo z $\pi - \theta$. Ta jo posebna lastnost dipolnega sevanja, ki ne velja več v višjih približkih po v/c .

Jakost sevanja, ki nastane pri trku, lahko razstavimo na dva prispevka – na sevanje, ki je polarizirano v ravnini, v kateri ležita os X in smer $\mathbf{n}$ (ta ravnina naj bo ravnina XY), in na sevanje z vektorjem polarizacije v pravokotni ravnini XZ .

Vektor električnega polja kaže v smeri vektorja

$$\mathbf{n} \times (\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}) = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{d}}) - \ddot{\mathbf{d}}$$

[glej (67.6)]. Komponenta tega vektorja v smeri, pravokotni na ravnino XY , je $-\ddot{d}_z$, njegova projekcija na ravnino XY pa je $|\sin \theta \ddot{d}_x - \cos \theta \ddot{d}_y|$. Slednjo količino najlažje določimo s pomočjo komponente magnetnega polja v smeri osi Z , katere smer je $\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}$.

Jakost polja $\mathbf{E}$ kvadriramo in izračunamo povprečje po vseh smereh vektorja $\ddot{\mathbf{d}}$ v ravnini YZ . Tako lahko ugotovimo, da je povprečje zmnožka projekcije polja na ravnino XY s projekcijo pravokotno nanjo enako nič. To pomeni, da lahko jakost zapišemo kot vsoto dveh neodvisnih prispevkov, dveh jakosti sevanja s polarizacijo v dveh med seboj pravokotnih smereh.

Jakost sevanja, polariziranega pravokotno na ravnino XY , je določena s povprečjem kvadrata $\ddot{d}_z^2 = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{d}}^2 - \ddot{d}_x^2)$. Ustrezni del efektivnega sevanja dobimo iz izraza

$$d\kappa_{\mathbf{n}}^{\perp} = \frac{d\omega}{4\pi c^3} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\ddot{\mathbf{d}}^2 - \ddot{d}_x^2) dt 2\pi \rho d\rho. \quad (68.4)$$

Ta del sevanja je izotropen. Izraza za efektivno sevanje, katerega vektor električnega polja leži v ravnini XY , ni potrebno zapisati, saj očitno velja

$$d\kappa_{\mathbf{n}}^{\parallel} + d\kappa_{\mathbf{n}}^{\perp} = d\kappa_{\mathbf{n}}.$$

Na podoben način lahko izpeljemo izraz za kotno porazdelitev efektivnega sevanja v danem frekvenčnem intervalu $d\omega$:

$$d\kappa_{\mathbf{n},\omega} = \left[A(\omega) + B(\omega) \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right] \frac{d\omega}{2\pi c^3} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (68.5)$$

kjer sta

$$A(\omega) = \frac{2\omega^4}{3} \int_0^{\infty} \ddot{\mathbf{d}}_{\omega}^2 2\pi \rho d\rho, \quad B(\omega) = \frac{\omega^4}{3} \int_0^{\infty} (\ddot{\mathbf{d}}_{\omega}^2 - 3\ddot{d}_{x\omega}^2) 2\pi \rho d\rho. \quad (68.6)$$

§69 Nizkofrekvenčno sevanje ob trku

Oglejmo si nizkofrekvenčni “rep” spektralne porazdelitve zavornega sevanja (nem. *bremsstrahlung*), torej področje frekvenc, manjših od frekvence ω_0 , okoli katere je zbrana večina spektralne gostote:

$$\omega \ll \omega_0. \quad (69.1)$$

V nasprotju s predhodnim razdelkom tu ne bomo privzeli, da so hitrosti trkajočih delcev majhne v primerjavi s svetlobno hitrostjo; naslednje enačbe bodo veljavne za poljubne hitrosti. V nerelativističnem primeru je $\omega_0 \sim 1/\tau$, kjer je τ velikostni red trajanja trka; v ultrarelativističnem primeru je ω_0 sorazmeren s kvadratom energije sevajočega delca (glej § 77).

V integralu

$$\mathbf{H}_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H} e^{i\omega t} dt$$

je polje $\mathbf{H}$ sevanja občutno različno od nič le v časovnem intervalu dolžine reda $1/\omega_0$. Zaradi (69.1) lahko zato predpostavimo, da v integrandu velja $\omega t \ll 1$, zato lahko $e^{i\omega t}$ nadomestimo z ena; tedaj je

$$\mathbf{H}_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H} dt.$$

Upoštevamo $\mathbf{H} = \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}/c$ in izračunamo integral po času. Dobimo

$$\mathbf{H}_{\omega} = \frac{1}{c} (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \times \mathbf{n}, \quad (69.2)$$

kjer je $\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1$ razlika vektorskega potenciala, ki jo ob trku povzroči trkajoči delec.

Celotno sevanje (s frekvenco ω), izsevano v času trajanja trka, dobimo, če (69.2) vstavimo v (66.9):

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{R_0^2}{4c\pi^2} [(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \times \mathbf{n}]^2 d\omega d\Omega. \quad (69.3)$$

V ta izraz vstavimo Lienard-Wiechertov vektorski potencial (66.4). Sledi

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{1}{4\pi^2 c^3} \left[\sum e \left(\frac{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{n}}{1 - (1/c)\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_2} - \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{n}}{1 - (1/c)\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_1} \right) \right]^2 d\omega, \quad (69.4)$$

kjer sta $\mathbf{v}_1$ in $\mathbf{v}_2$ hitrosti delca pred in po trku, sešteti pa moramo po vseh delcih, ki sodelujejo pri trku. Vidimo, da je izraz pred $d\omega$ neodvisen od frekvenca. Z drugimi besedami, spektralna porazdelitev je pri nizkih frekvencah neodvisna od frekvenca, $d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega}/d\omega$ pa gre proti konstanti, ko gre $\omega \rightarrow 0$. *

Če so hitrosti delcev majhne v primerjavi s svetlobno hitrostjo, potem se enačba (69.4) poenostavi v

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{1}{4\pi^2 c^3} \left[\sum e(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \times \mathbf{n} \right]^2 d\omega. \quad (69.5)$$

Ta izraz ustreza sevanju dipola z vektorskim potencialom, podanim z izrazom (67.4).

Te formule lahko uporabimo na zanimivem primeru sevanja ob nastanku novega nabitega delca (na primer razpada, pri katerem iz jedra odleti delec β). Ta proces lahko obravnavamo kot hitro spremembo hitrosti delca od nič do njegove trenutne vrednosti. [Zaradi simetrije enačbe (69.5) na zamenjavo količin $\mathbf{v}_1$ in $\mathbf{v}_2$ je sevanje v tem procesu enako sevanju, ki bi nastalo pri obratnem procesu, v katerem se delec v trenutku ustavi.] Bistveno je to, da je "trajanje" tega procesa enako $\tau \rightarrow 0$, zato je pogoj (69.1) izpolnjen za vse frekvence. †

NALOGA

NALOGA Določi spektralno porazdelitev celotnega sevanja izsevanega, ko odleti nabiti delec s hitrostjo v .

Rešitev: Po enačbi (69.4) (v katero vstavimo $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1 = 0$) velja

$$d\mathcal{E}_{\omega} = d\omega \frac{e^2 v^2}{4\pi^2 c^3} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)^2} 2\pi \sin \theta d\theta.$$

Izračunamo integral ‡ in dobimo

$$d\mathcal{E}_{\omega} = \frac{e^2}{\pi c} \left(\frac{c}{v} \ln \frac{c+v}{c-v} - 2 \right) d\omega. \quad (1)$$

V limiti $v \ll c$ se enačba poenostavi v

$$d\mathcal{E}_{\omega} = \frac{2e^2 v^2}{3\pi c^3} d\omega,$$

kar lahko dobimo tudi neposredno iz (69.5).

*Če integriramo po parametru trka, lahko dobimo analogen rezultat za efektivno sevanje pri sipanju snopa delcev. Upoštevati pa moramo, da rezultat za efektivno sevanje ne velja, če med delci deluje Coulombska interakcija, saj je integral po ρ (logaritmčno) divergenten za velike ρ . V naslednjem razdelku bomo videli, da je v tem primeru efektivno sevanje pri nizkih frekvencah logaritemsko odvisno od frekvenca in ni konstantno.

†Veljavnost teh enačb je vseeno omejena s kvantnim pogojem, da je energija $\hbar\omega$ majhna v primerjavi s celotno kinetično energijo delca.

‡Čeprav je pogoj (69.1) izpolnjen za vse frekvence, saj se proces zgodi v "trenutku", ne moremo dobiti celotne izsevanje energije z integracijo enačbe (1) po ω – integral pri visokih frekvencah divergira. Delec se namreč pri visokih frekvencah ne obnaša klasično. Poleg tega dobimo v obravnavanem primeru divergenco tudi zaradi napačne formulacije klasične naloge, saj smo delcu v začetnem trenutku pripisali neskončen pospešek.

§70 Sevanje v primeru Coulombske interakcije

V tem razdelku bomo za poznejšo uporabo izpeljali nekaj rezultatov o dipolnem sevanju sistema dveh nabitih delcev. Predpostavimo, da so hitrosti delcev majhne v primerjavi s svetlobno hitrostjo.

Enakomerno gibanje sistema kot celote, torej gibanje njegovega težišča, nas ne zanima, saj ne povzroča sevanja. Ogledali si bomo torej le medsebojno gibanje delcev. Koordinatno izhodišče naj leži v težišču. Dipolni moment sistema $\mathbf{d} = e_1 \mathbf{r}_1 + e_2 \mathbf{r}_2$ zapišemo kot

$$\mathbf{d} = \frac{e_1 m_2 - e_2 m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} = \mu \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \mathbf{r}, \quad (70.1)$$

kjer se indeksa 1 in 2 nanašata na prvi in drugi delec, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ je krajevni vektor med njima, μ pa je reducirana masa

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Opišimo najprej sevanje pri eliptičnem gibanju dveh delcev, med katerima deluje privlačna Coulombska sila. Kot že vemo iz mehanike *, lahko to gibanje opišemo kot gibanje delca z maso μ po elipsi, katere enačbo v polarnih koordinatah zapišemo kot

$$1 + \epsilon \cos \phi = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{r}, \quad (70.2)$$

kjer sta dolžina glavne osi a in ekscentričnost ϵ podani z

$$a = \frac{\alpha}{2|\mathcal{E}|}, \quad \epsilon = \sqrt{1 - \frac{2|\mathcal{E}|M^2}{\mu\alpha^2}}. \quad (70.3)$$

Tu je $\mathcal{E}$ celotna energija delcev (brez njune mirovne energije!), ki je negativna pri omejenem gibanju; $M = \mu r^2 \dot{\phi}$ je vrtilna količina, α pa je konstanta iz Coulombovega zakona

$$\alpha = |e_1 e_2|.$$

Časovno odvisnost koordinat lahko opišemo s parametričnima enačbama

$$r = a(1 - \epsilon \cos \xi), \quad t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}} (\xi - \epsilon \sin \xi). \quad (70.4)$$

Perioda gibanja po elipsi ustreza spremembi parametra ξ od 0 do 2π :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}.$$

Izračunajmo Fourierove komponente dipolnega momenta. Ker je gibanje periodično, imamo opravka z razvojem v Fourierovo vrsto. Dipolni moment je sorazmeren s krajevnim vektorjem $\mathbf{r}$, zato se naloga poenostavi na izračun Fourierovih komponent koordinat $x = r \cos \phi$ in $y = r \sin \phi$. Časovna odvisnost količin x in y je podana s parametričnimi enačbami

$$\begin{aligned} x &= a(\cos \xi - \epsilon), & y &= a\sqrt{1 - \epsilon^2} \sin \xi, \\ \omega_0 t &= \xi - \epsilon \sin \xi. \end{aligned} \quad (70.5)$$

*Glej *Mehanika*, § 15.

Vpeljali smo frekvenco

$$\omega_0 = 2\pi/T = \sqrt{\alpha/\mu a^3} = \frac{(2|\mathcal{E}|)^{3/2}}{\alpha\mu^{1/2}}.$$

Namesto Fourierevih komponent koordinat lahko izračunamo Fourierove komponente hitrosti in upoštevamo, da velja $\dot{x}_n = -i\omega_0 n x_n$ in $\dot{y}_n = -i\omega_0 n y_n$. Zapišemo torej

$$x_n = \frac{\dot{x}_n}{-i\omega_0 n} = \frac{i}{\omega_0 n T} \int_0^T e^{i\omega_0 n t} \dot{x} dt.$$

Sedaj upoštevamo, da je $\dot{x} dt = dx = -a \sin \xi d\xi$, in prevedemo integral po t na integral po ξ :

$$x_n = -\frac{ia}{2\pi n} \int_0^{2\pi} e^{in(\xi - \epsilon \sin \xi)} \sin \xi d\xi.$$

Podobno izračunamo še

$$y_n = \frac{ia\sqrt{1-\epsilon^2}}{2\pi n} \int_0^{2\pi} e^{in(\xi - \epsilon \sin \xi)} \cos \xi d\xi = \frac{ia\sqrt{1-\epsilon^2}}{2\pi n\epsilon} \int_0^{2\pi} e^{in(\xi - \epsilon \sin \xi)} d\xi$$

(iz prvega dobimo drugi integral tako, da integrand zapišemo kot $\cos \xi \equiv (\cos \xi - 1/\epsilon) + 1/\epsilon$; integral z $\cos \xi - 1/\epsilon$ znamo izračunati, in sicer dobimo identično nič). Sedaj uporabimo rezultat iz teorije Besselovih funkcij:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n\xi - x \sin \xi)} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\xi - x \sin \xi) d\xi = J_n(x), \quad (70.6)$$

kjer je $J_n(x)$ n -ta Besselova funkcija. Z uporabo tega pravila dobimo naslednja izraza za iskani Fourierovi komponenti:

$$x_n = \frac{a}{n} J'_n(n\epsilon), \quad y_n = \frac{ia\sqrt{1-\epsilon^2}}{n\epsilon} J_n(n\epsilon) \quad (70.7)$$

(črtica ob znaku za Besselovo funkcijo pomeni odvod po argumentu funkcije).

Izraz za jakost monokromatskih komponent sevanja dobimo, če x_n in y_n vstavimo v enačbo

$$I_n = \frac{4\omega_0^4 n^4}{3c^3} \mu^2 \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 (|x_n|^2 + |y_n|^2)$$

[glej (67.11)]. Če a in ω_0 izrazimo z α in energijo $\mathcal{E}$, končno dobimo

$$I_n = \frac{64n^2 \mathcal{E}^4}{3c^3 \alpha^2} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \left[J_n'^2(n\epsilon) + \frac{1-\epsilon^2}{\epsilon^2} J_n^2(n\epsilon) \right]. \quad (70.8)$$

Poiščimo asimptotično formulo za jakost zelo visokih harmonikov (velik n) pri gibanju po orbiti, ki je približno parabolična (ϵ blizu 1). Najprej uporabimo približek

$$J_n(n\epsilon) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{n} \right)^{1/3} \Phi \left[\left(\frac{n}{2} \right)^{2/3} (1 - \epsilon^2) \right], \quad n \gg 1, \quad 1 - \epsilon \ll 1, \quad (70.9)$$

kjer je Φ Airyjeva funkcija, definirana na strani 152. *

*Če je $n \gg 1$, dobimo največji prispevek k vrednosti integrala

$$J_n(n\epsilon) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos[n(\xi - \epsilon \sin \xi)] d\xi$$

To vstavimo v (70.8) in dobimo

$$I_n = \frac{64 \cdot 2^{3/2} n^{4/3} \mathcal{E}^4}{3\pi c^3 \alpha^2} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \cdot \left\{ (1 - \epsilon^2) \Phi^2 \left[\left(\frac{n}{2} \right)^{2/3} (1 - \epsilon^2) \right] + \left(\frac{2}{n} \right)^{2/3} \Phi'^2 \left[\left(\frac{n}{2} \right)^{2/3} (1 - \epsilon^2) \right] \right\}. \quad (70.10)$$

Rezultat lahko lepše zapišemo z MacDonaldovo funkcijo K_y :

$$I_n = (1 - \epsilon^2)^2 \frac{64}{9\pi^2} \frac{n^2 \mathcal{E}^4}{c^3 \alpha^2} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \left\{ K_{1/3}^2 \left[\frac{n}{3} (1 - \epsilon^2)^{3/2} \right] + K_{2/3}^2 \left[\frac{n}{3} (1 - \epsilon^2)^{3/2} \right] \right\}$$

(enačbe, ki jih za izpeljavo potrebujemo, so zapisane v opombi na strani 205).

Sedaj obravnavajmo še trk dveh nabitih delcev, ki se privlačita. Njuno medsebojno gibanje opišemo kot gibanje delca z maso μ po hiperboli z enačbo

$$1 + \epsilon \cos \phi = \frac{a(\epsilon^2 - 1)}{r}, \quad (70.11)$$

kjer je

$$a = \frac{\alpha}{2\mathcal{E}}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}M^2}{\mu\alpha^2}} \quad (70.12)$$

(sedaj je $\mathcal{E} > 0$). Časovna odvisnost razdalje r je podana s parametričnima enačbama

$$r = a(\epsilon \cosh \xi - 1), \quad t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}} (\epsilon \sinh \xi - \xi), \quad (70.13)$$

kjer parameter ξ zavzame vrednosti od $-\infty$ do $+\infty$. Koordinati x in y zapišemo kot

$$x = a(\epsilon - \cosh \xi), \quad y = a\sqrt{\epsilon^2 - 1} \sinh \xi. \quad (70.14)$$

Fourierove komponente (sedaj imamo opravka z razcepom v Fourierev integral) izračunamo na podoben način kot v predhodnem primeru. Dobimo

$$x_\omega = \frac{\pi a}{\omega} H_{iv}^{(1)'}(i\nu\epsilon), \quad y_\omega = -\frac{\pi a\sqrt{\epsilon^2 - 1}}{\omega\epsilon} H_{iv}^{(1)}(i\nu\epsilon), \quad (70.15)$$

kjer je $H_{iv}^{(1)}$ Hankelova funkcija prve vrste četrtega reda, vpeljali pa so tudi zapis

$$\nu = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\alpha}{\mu a^3}}} = \frac{\omega\alpha}{\mu v_0^3} \quad (70.16)$$

na območju majhnih vrednosti ξ (pri večjih vrednostih ξ integral hitro niha okoli ničle). Zato razvijemo argument funkcije kosinus po potencah ξ :

$$J_n(n\epsilon) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \left[n \left(\frac{1 - \epsilon^2}{2} \xi + \frac{\xi^3}{6} \right) \right] d\xi;$$

ker integral hitro konvergira, smo zgornjo mejo poslali proti neskončnosti; člen z ξ^3 moramo obdržati, ker je člen prvega reda pomnožen z majhnim koeficientom $1 - \epsilon \approx (1 - \epsilon^2)/2$. Zgornji integral lahko zapišemo v obliki (70.9) z substitucijo, ki je očitna.

(v_0 je relativna hitrost delcev v neskončnosti; celotna energija je $\mathcal{E} = \mu v_0^2$). * V izračunih smo uporabili rezultat iz teorije Besselovih funkcij

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{p\xi - ix \sinh \xi} d\xi = i\pi H_p^{(1)}(ix). \quad (70.17)$$

Vstavimo (70.15) v enačbo

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{4\omega^4 \mu^2}{3c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 (|x_\omega|^2 + |y_\omega|^2) \frac{d\omega}{2\pi}$$

[glej (67.10)], pa dobimo

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{\pi \mu^2 \alpha^2 \omega^2}{6c^3 \mathcal{E}^2} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \left\{ [H_{iv}^{(1)'}(i\nu\epsilon)]^2 + \frac{\epsilon^2 - 1}{\epsilon^2} [H_{iv}^{(1)}(i\nu\epsilon)]^2 \right\} d\omega. \quad (70.18)$$

Bolj kot energija nas zanima “efektivno sevanje” ob sipanju vzporednega snopa delcev (glej §68). Izračunamo ga tako, da $d\mathcal{E}_\omega$ pomnožimo z $2\pi\rho d\rho$ in integriramo po ρ od 0 do neskončnosti. Integral po ρ pretvorimo v integral po ϵ (med 1 in ∞), pri čemer upoštevamo, da je $2\pi\rho d\rho = 2\pi a^2 \epsilon d\epsilon$; to sledi iz definicije (70.12), v kateri sta vrtilna količina M in energija $\mathcal{E}$ povezani s parametrom trka ρ in hitrostjo v_0 z

$$M = \mu\rho v_0, \quad \mathcal{E} = \mu \frac{v_0^2}{2}.$$

Tako dobimo integral, ki ga lahko integriramo z uporabo pravila

$$z \left[Z_p'^2 + \left(\frac{p^2}{z^2} - 1 \right) Z_p^2 \right] = \frac{d}{dz} (z Z_p Z_p'),$$

kjer je $Z_p(z)$ poljubna rešitev Besselove enačbe p -tega reda. † Če upoštevamo, da gre Hankelova funkcija $H_{iv}^{(1)}(i\nu\epsilon)$ proti nič, ko gre ϵ proti neskončnosti, dobimo kot končni rezultat naslednjo enačbo:

$$d\mathcal{K}_\omega = \frac{4\pi^2 \alpha^3 \omega}{3c^3 \mu v_0^5} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 |H_{iv}^{(1)}(i\nu)| H_{iv}^{(1)'}(i\nu) d\omega. \quad (70.19)$$

Oglejmo si mejna primera nizkih in visokih frekvenc. V integralu (definiciji Hankelove funkcije)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu(\xi - \sinh \xi)} d\xi = i\pi H_{iv}^{(1)}(i\nu), \quad (70.20)$$

je edino območje integracijskega parametra ξ , ki da znaten prispevek k vrednosti integrala, tisto, za katero je eksponent velikostnega reda 1. Pri nizkih frekvencah ($\nu \ll 1$), je pomembno območje velikih vrednosti ξ . Pri velikih ξ pa je $\sinh \xi \gg \xi$. Zato je približno

$$H_{iv}^{(1)'}(i\nu) \approx -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\nu \sinh \xi} d\xi = H_0^{(1)}(i\nu).$$

* Funkcija $H_{iv}^{(1)}(i\nu\epsilon)$ je imaginarna, odvod $H_{iv}^{(1)'}(i\nu\epsilon)$ pa je realen.

† Pravilo je neposredna posledica Besselove enačbe

$$Z'' + \frac{1}{z} Z' + \left(1 - \frac{p^2}{z^2} \right) Z = 0.$$

Podobno ugotovimo, da je

$$H_{iv}^{(1)'}(i\nu) \approx H_0^{(1)'}(i\nu).$$

Z uporabo naslednjega približka za majhne x iz teorije Besselovih funkcij

$$iH_0^{(1)}(ix) \approx \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma x}$$

($\gamma = e^C$, kjer je C Eulerjeva konstanta; $\gamma = 1.781\dots$) dobimo končni izraz za efektivno sevanje pri nizkih frekvencah:

$$d\kappa_\omega = \frac{16\alpha^2}{3v_0^2 c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \ln \left(\frac{2\mu v_0^3}{\gamma \omega \alpha} \right) d\omega, \quad \text{za } \omega \ll \frac{\mu v_0^3}{\alpha}. \quad (70.21)$$

Frekvenčna odvisnost efektivnega sevanja je torej logaritemska.

Pri visokih frekvencah ($\nu \gg 1$) pa je pomembno območje majhnih vrednosti ξ v integralu (70.20). Zato razvijemo eksponent v integrandu po potencah ξ in dobimo približni rezultat

$$H_{iv}^{(1)}(i\nu) \approx -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i\nu\xi^3}{6}} d\xi = -\frac{2i}{\pi} \Re \left(\int_0^\infty e^{-\frac{i\nu\xi^3}{6}} d\xi \right).$$

S substitucijo $i\nu\xi^3/6 = \nu$ integral prevedemo na funkcijo gama in dobimo

$$H_{iv}^{(1)}(i\nu) \approx -\frac{i}{\pi\sqrt{3}} \left(\frac{6}{\nu} \right)^{1/3} \Gamma \left(\frac{1}{3} \right).$$

Podobno izpeljemo tudi

$$H_{iv}^{(1)'}(i\nu) \approx \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \left(\frac{6}{\nu} \right)^{2/3} \Gamma \left(\frac{2}{3} \right).$$

Nato uporabimo rezultat iz teorije funkcije gama,

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

in dobimo efektivno sevanje pri visokih frekvencah:

$$d\kappa_\omega = \frac{16\pi\alpha^2}{3^{3/2}v_0^2 c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 d\omega, \quad \text{za } \omega \gg \frac{\mu v_0^3}{\alpha}, \quad (70.22)$$

torej izraz, ki ni odvisen od frekvence.

Zaključimo z obravnavo sevanja, ki nastane ob trku dveh delcev, med katerima deluje odbojna Coulombska interakcija $U = \alpha/r$ ($\alpha > 0$). Delca se gibata po hiperboli

$$-1 + \epsilon \cos \phi = \frac{a(\epsilon^2 - 1)}{r}, \quad (70.23)$$

$$x = a(\epsilon + \cosh \xi), \quad y = a\sqrt{\epsilon^2 - 1} \sinh \xi,$$

$$t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}} (\epsilon \sinh \xi + \xi) \quad (70.24)$$

[a in ϵ sta definirana v (70.12)]. Vse rezultate lahko izrazimo s predhodnimi, zato ne bomo zapisali celotnega postopka. Integral

$$x_\omega = \frac{ia}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu(\epsilon \sinh \xi + \xi)} \sinh \xi \, d\xi \quad (70.25)$$

za Fourierovo komponento koordinate x , se s substitucijo $\xi \rightarrow i\pi - \xi$ prevede na integral, ki velja v primeru privlačne interakcije, ki je pomnožen z dodatnim faktorjem $-e^{-\pi\nu}$; to velja tudi za y_ω .

Zato se izraza za Fourierovi komponenti x_ω in y_ω v primeru odbojne sile razlikujeta od istih izrazov v primeru privlačne sile za faktor $e^{-\pi\nu}$. Edina razlika v izrazu za sevanje je torej dodatni faktor $e^{-2\pi\nu}$. Pri nizkih frekvencah tako dobimo isti rezultat (70.12) (saj velja $e^{-2\pi\nu} \approx 1$, ko je $\nu \ll 1$). Pri visokih frekvencah pa je efektivno sevanje enako

$$d\mathcal{K}_\omega = \frac{16\pi\alpha^2}{3^{3/2}v_0^2c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \exp \left(-\frac{2\pi\omega\alpha}{\mu v_0^3} \right) d\omega, \quad \text{za } \omega \gg \frac{\mu v_0^3}{\alpha}. \quad (70.26)$$

Efektivno sevanje pada eksponentno z naraščajočo frekvenco.

NALOGE

NALOGA 1. Izračunaj povprečno celotno jakost sevanja v primeru eliptičnega gibanja dveh nabojev, ki se privlačita.

Rešitev: Z uporabo izraza (70.1) za dipolni moment dobimo za celotno jakost sevanja:

$$I = \frac{2\mu^2}{3c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \ddot{\mathbf{r}}^2 = \frac{2\alpha^2}{3c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{1}{r^4},$$

pri čemer smo uporabili gibalno enačbo $\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\alpha\mathbf{r}/r^2$. Koordinato r izrazimo z ϕ iz enačbe orbite (70.2) in z uporabo enačbe $dt = \mu r^2 d\phi/M$ nadomestimo časovni integral z integralom po kotu ϕ (ki teče od 0 do 2π). Rezultat je povprečna jakost

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T I \, dt = \frac{2^{3/2}}{3c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{\mu^{5/2}\alpha^3|\mathcal{E}|^{3/2}}{M^5} \left(3 - \frac{2|\mathcal{E}|M^2}{\mu\alpha^2} \right).$$

NALOGA 2. Izračunaj celotno sevanje $\Delta\mathcal{E}$ ob trku dveh nabitih delcev.

Rešitev: V primeru privlačne interakcije je trajektorija hiperbola (70.11), v primeru odbojne interakcije pa hiperbola (70.23). Kot med asimptotama hiperbole in njeno osjo je ϕ_0 , ki ga določimo z enačbo $\cos \phi_0 = 1/\epsilon$, kot odklona delcev (v koordinatnem sistemu, kjer težišče miruje) pa je $\chi = |\pi - 2\phi_0|$. Izračun potek podobno kot v prvi nalogi (integral izračunamo med mejama $-\phi_0$ in ϕ_0). V primeru privlačne sile je rezultat

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{\mu^3 v_0^5}{3c^3|\alpha|} \tan^3 \frac{\chi}{2} \left[(\pi + \chi) \left(1 + 3 \tan^2 \frac{\chi}{2} \right) + 6 \tan \frac{\chi}{2} \right] \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2,$$

v primeru odbojne sile pa

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{\mu^3 v_0^5}{3c^3\alpha} \tan^3 \frac{\chi}{2} \left[(\pi - \chi) \left(1 + 3 \tan^2 \frac{\chi}{2} \right) - 6 \tan \frac{\chi}{2} \right] \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2.$$

V obeh enačbah je χ pozitiven kot, ki ga določimo z enačbo

$$\cot \frac{\chi}{2} = \frac{\mu v_0^2 \rho}{\alpha}.$$

Za čelni trk ($\rho \rightarrow 0, \chi \rightarrow \pi$) nabojev, ki se med seboj odbijata, tako dobimo

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{8\mu^3 v_0^5}{45c^3 \alpha} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2.$$

NALOGA 3. Izračunaj celotno efektivno sevanje pri sipanju snopa delcev na odbojnem Coulomb-skem polju.

Rešitev: Iskana količina je

$$\chi = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} I dt 2\pi \rho d\rho = \frac{2\alpha^2}{3c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 2\pi \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{r^4} dt \rho d\rho.$$

Časovni integral nadomestimo z integralom po r vzdolž poti delca tako, da zapišemo $dt = dr/v_r$. Radialna hitrost $v_r \equiv \dot{r}$ lahko izrazimo z r z enačbo

$$v_r = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left[\mathcal{E} - \frac{M^2}{2\mu r^2} - U(r) \right]} = \sqrt{v_0^2 - \frac{\rho^2 v_0^2}{r^2} - \frac{2\alpha}{\mu r}}.$$

Po r moramo integrirati od ∞ do razdalje najmanjše oddaljenosti $r_0 = r_0(\rho)$ (točka, kjer je $v_r = 0$), nato pa ponovno od r_0 do ∞ ; to je enako z dva pomnoženi vrednosti integrala od r_0 do ∞ . Dvojni integral najlažje izračunamo tako, da zamenjamo vrsti red integriranja: najprej integriramo po ρ , nato pa po r . Tako dobimo

$$\chi = \frac{8\pi}{9c^3} \alpha \mu v_0 \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2.$$

NALOGA 4. Izračunaj kotno porazdelitev celotnega sevanja, ki nastane, ko en naboj leti mimo drugega, v primeru ko je hitrost tako velika (vseeno pa majhna v primerjavi s svetlobno), da je odklon od premočrtnega gibanja majhen.

Rešitev: Odklonski kot je majhen, če je kinetična energija $\mu v^2/2$ velika v primerjavi s potencialno energijo, ki je velikostnega reda α/ρ ($\mu v^2 \gg \alpha/\rho$). Kot ravnino gibanja si izberemo ravnino XY , izhodišče postavimo v težišče, os X pa v smeri hitrosti. V prvem približku je trajektorija ravna črta $x = vt$, $y = \rho$. V naslednjem približku se gibalni enačbi glasita

$$\mu \ddot{x} = \frac{\alpha}{r^2} \frac{x}{r} \approx \frac{\alpha vt}{r^3}, \quad \mu \ddot{y} = \frac{\alpha}{r^2} \frac{y}{r} \approx \frac{\alpha \rho}{r^3},$$

kjer je

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \approx \sqrt{\rho^2 + v^2 t^2}.$$

Z uporabo (67.7) dobimo

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}} = d\omega \frac{\mu^2}{4\pi c^3} \left[\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right] \int_{-\infty}^{\infty} [\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 - (\ddot{x}n_x + \ddot{y}n_y)] dt,$$

kjer je $\mathbf{n}$ enotski vektor v smeri diferencialnega prostorskega kota $d\omega$. Integrand izrazimo z t in izračunamo integral. Dobimo

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}} = \frac{\alpha^2}{32vc^3\rho^3} \left[\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right]^2 (4 - n_x^2 - 3n_y^2) d\omega.$$

§71 Kvadrupolno in magnetno dipolno sevanje

Sedaj si bomo ogledali sevanje, ki je povezano z višjimi členi v razvoju vektorskega potenciala po potencah razmerja med velikostjo sistema a in valovno dolžino λ . Ker je a/λ majhna količina, so ti členi običajno majhni v primerjavi s prvim (dipolnim) členom, so pa pomembni tedaj, ko je dipolni moment sistema enak nič, in sistem ne seva dipolno.

Integrand v (66.2)

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_{t'} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{c} dV,$$

razvijemo po potencah $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}/c$ do prvega reda:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_{t'} dV + \frac{1}{c^2 R_0} \frac{\partial}{\partial t'} \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{j}_{t'} dV.$$

Vstavimo $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ in upoštevamo, da so naboji točkasti. Dobimo

$$\mathbf{A} = \frac{\sum e \mathbf{v}}{cR_0} + \frac{1}{c^2 R_0} \frac{\partial}{\partial t} \sum e \mathbf{v} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}). \quad (71.1)$$

(V nadaljevanju bomo spuščali indeks t' pri vseh količinah, podobno kot smo to storili v § 67.)

Drugi člen preoblikujemo:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) + \frac{1}{2} \mathbf{v}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) - \frac{1}{2} \mathbf{r}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) + \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Za $\mathbf{A}$ dobimo izraz

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0} + \frac{1}{2c^2 R_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum e \mathbf{r}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) + \frac{1}{cR_0} (\dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}), \quad (71.2)$$

kjer je $\mathbf{d}$ dipolni moment sistema, $\mathbf{m}$ pa je magnetni moment:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum e \mathbf{r} \times \mathbf{v}.$$

V nadaljevanju bomo upoštevali, da lahko k $\mathbf{A}$ prištejemo poljuben vektor, sorazmeren z $\mathbf{n}$, ne da bi s tem spremenili polje, saj sta po (66.3) polji $\mathbf{H}$ in $\mathbf{E}$ invariantni na takšne transformacije. Zato lahko (71.2) nadomestimo z

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0} + \frac{1}{6c^2 R_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum e [3\mathbf{r}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{n}r^2] + \frac{1}{cR_0} \dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}.$$

Izraz, ki sledi znaku za seštevanje, je zmnožek $n_\beta D_{\alpha\beta}$ vektorja $\mathbf{n}$ in tenzorja kvadrupolnega momenta $D_{\alpha\beta} = \sum e (3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta} r^2)$ (glej § 41). Vpeljemo vektor $\mathbf{D}$ s komponentami $D_\alpha = D_{\alpha\beta} n_\beta$ in dobimo končni izraz za vektorski potencial

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0} + \frac{1}{6c^2 R_0} \ddot{\mathbf{D}} + \frac{1}{cR_0} \dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}. \quad (71.3)$$

S poznanim potencialom $\mathbf{A}$ lahko določimo polji sevanja $\mathbf{H}$ in $\mathbf{E}$ z uporabo splošne enačbe (66.3):

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \frac{1}{c^2 R_0} \left\{ \ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n} + \frac{1}{6c} \ddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n} + (\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} \right\} \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{c^2 R_0} \left\{ (\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} + \frac{1}{6c} (\ddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} + \mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{m}} \right\}\end{aligned}\quad (71.4)$$

Jakost sevanja dI v diferencialni prostorski kot do je podana s splošno enačbo (66.6). Tu bomo izračunali celotno sevanje, torej energijo, ki jo sistem izseva v vse smeri prostora na enoto časa. V ta namen bomo izračunali povprečje dI po vsem smereh $\mathbf{n}$; celotno sevanje je enako temu povprečju, pomnoženem z 4π . Pri računanju povprečja kvadrata magnetnega polja odpadejo vsi navzkrižni zmnožki v $\mathbf{H}$, preostanejo le povprečni kvadrati treh členov. S preprostim izračunom * dobimo naslednji rezultat za I :

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2 + \frac{1}{180c^5} \ddot{D}_{\alpha\beta}^2 + \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{m}}^2. \quad (71.5)$$

Celotno sevanje je sestavljeno iz treh neodvisnih prispevkov, ki se imenujejo *dipolno*, *kvadrupolno* in *magnetno dipolno* sevanje.

Omenimo naj, da pri številnih sistemih magnetnega sevanja ni. Ni ga na primer pri sistemih, v katerih imajo vsi naboji enako razmerje med nabojem in maso (v tem primeru tudi dipolnega sevanja ni, glej § 67). V takšnem sistemu je namreč magnetni moment sorazmeren z vrtilno količino (glej § 44), zato se ohranja tudi magnetni moment, $\dot{\mathbf{m}} = 0$. Iz istega razloga tudi poljubni sistem dveh delcev ne seva kot magnetni dipol (glej nalogo v § 44. V tem primeru ne moremo nič reči o obstoju dipolnega sevanja).

NALOGE

NALOGA 1. Izračunaj celotno efektivno sevanje pri sipanju snopa nabitih delcev na delcih iste vrste.

Rešitev: Pri sipanju identičnih delcev ne pride do dipolnega sipanja (pa tudi do magnetnega dipolnega sipanja ne), zato moramo izračunati kvadrupolno sevanje. Tenzor kvadrupolnega moment sistema dveh enakih delcev (glede na njuno težišče) je

$$D_{\alpha\beta} = \frac{e}{2} (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}),$$

* Povprečje vrednosti zmnožka komponent enotskega vektorja lahko izračunamo z uporabnim trikom. Ker je tenzor $n_\alpha n_\beta$ simetričen, ga lahko izrazimo z enotskim tenzorjem $\delta_{\alpha\beta}$. Ker je sled tenzorja enaka ena, mora veljati

$$\overline{n_\alpha n_\beta} = \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta}.$$

Povprečje zmnožka štirih komponent je

$$\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta} = \frac{1}{15} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}).$$

Desno stran smo sestavili iz enotskih vektorjev na tak način, da smo dobili tenzor četrtega reda, ki je simetričen v vseh svojih indeksih; koeficient smo dobimo tako, da skrcimo po dveh parih indeksov, pri čemer moramo dobiti ena.

pri čemer so x_α komponente vektorja medsebojne oddaljenosti med delcema $\mathbf{r}$. Tenzor $D_{\alpha\beta}$ najprej trikrat odvajamo, nato pa prvi, drugi in tretji odvod količin x_α po času izrazimo z relativno hitrostjo med delcema v_α kot:

$$\dot{x}_\alpha = v_\alpha, \quad \mu \ddot{x}_\alpha = \frac{m}{2} \ddot{x}_\alpha = \frac{e^2 x_\alpha}{r^3}, \quad \frac{m}{2} \ddot{\ddot{x}}_\alpha = e^2 \frac{v_\alpha r - 3x_\alpha v_r}{r^4},$$

kjer je $v_r = \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}/r$ radialna komponenta hitrosti (druga enačba je gibalna enačba naboja, tretjo pa dobimo z odvajanje druge). Izračun nas pripelje do naslednjega izraza za jakost:

$$I = \frac{\ddot{\ddot{D}}_{\alpha\beta}^2}{180c^5} = \frac{2e^6}{15m^2c^5r^4}(v^2 + 11v_\phi^2)$$

($v^2 = v_r^2 + v_\phi^2$); v in v_ϕ lahko izrazimo z r z uporabo enačb

$$v^2 = v_0^2 - \frac{4e^2}{mr}, \quad v_\phi = \frac{\rho v_0}{r}.$$

Časovni integral nadomestimo z integralom po r na enak način, kot smo to storili v tretji nalogi v § 70. Zapišemo

$$dt = \frac{dr}{v_r} = \frac{dr}{\sqrt{v_0^2 - \frac{\rho^2 v_0^2}{r^2} - \frac{4e^2}{mr}}}.$$

V dvojnem integralu (po ρ in po r) najprej opravimo integracijo po ρ , nato pa po r . Kot končni rezultat tako dobimo

$$\kappa = \frac{4\pi}{9} \frac{e^4 v_0^3}{mc^5}.$$

NALOGA 2. Poišči silo reakcije, ki deluje na sistem nabojev, ki se gibljejo stacionarno v omejenem prostoru in pri tem sevajo.

Rešitev: Iskano silo $\mathbf{F}$ dobimo tako, da izračunamo, koliko gibalne količine se izgubi na enoto časa, torej gostoto toka gibalne količine, ki jo odnese elektromagnetno valovanje, ki ga seva sistem:

$$F_\alpha = - \oint \sigma_{\alpha\beta} = - \int \sigma_{\alpha\beta} n_\beta R_0^2 d\Omega;$$

integriramo po veliki sferi polmera R_0 . Napetostni tenzor je podan z enačbo (33.3), polji $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ pa z (71.4). Ker sta ti polji prečni, se integral poenostavi na

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{8\pi} \int 2H^2 \mathbf{n} R_0^2 d\Omega.$$

Povprečje po smeri $\mathbf{n}$ dobimo z uporabo enačb v opombi na strani 192 (produkt lihega števila komponent vektorja $\mathbf{n}$ ne prispeva nič). Rezultat je: *

$$F_\alpha = -\frac{1}{4\pi c^4} \left[\frac{1}{15c} \ddot{D}_{\alpha\beta} \ddot{d}_\beta + \frac{2}{3} (\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{m})_\alpha \right].$$

*Omenimo naj, da je ta sila višjega reda po $1/c$ kot Lorentzova sila trenja (§ 75). Slednja ne prispeva k celotni sili odboja: vsota sil (75.5), ki delujejo na delec v električno nevtralnem sistemu, je enaka nič.

§72 Sevalno polje v bližini izvora

Enačbe za dipolno sevanje smo izpeljali za polje pri razdaljah od izvora, ki so velike v primerjavi z valovno dolžino (in ki so še toliko večje od razsežnosti sistema, ki seva). V tem razdelku bomo kot prej predpostavili, da je valovna dolžina velika v primerjavi z velikostjo sistema, ogledali pa si bomo polje pri razdaljah, ki so *enakega velikostnega reda* kot valovna dolžina.

Enačba (67.4) za vektorski potencial

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \dot{\mathbf{d}} \quad (72.1)$$

še vedno velja, ker smo pri njeni izpeljavi privzeli le to, da je R_0 velik v primerjavi z razsežnostjo sistema. Vendar pa zdaj polja ne moremo več smatrati kot ravno valovanje niti na majhnih območjih prostora. Enačbi (67.5) in (67.6) za električno in magnetno polje ne veljata več. Polji lahko zato izračunamo le tako, da najprej določimo tako vektorski potencial $\mathbf{A}$ kot skalarni potencial ϕ .

Enačbo za skalarni potencial lahko dobimo neposredno iz tiste za vektorski potencial, če si izberemo umeritev (62.1),

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0.$$

V to enačbo vstavimo (72.1) in integriramo po času. Dobimo

$$\phi = -\nabla \cdot \frac{\mathbf{d}}{R_0}. \quad (72.2)$$

Integracijsko konstantno (poljubno funkcijo koordinat) smo izpustili, saj nas zanima le tisti del potenciala, ki se spreminja s časom. Spomnimo naj, da moramo v enačbi (72.2), tako kot v enačbi (72.1), vzeti vrednost $\mathbf{d}$ ob času $t' = t - (R_0/c)$. *

Jakost električnega in magnetnega polja ni težko izračunati z uporabo običajnih zvez med potencialoma in poljema:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \nabla \times \frac{\dot{\mathbf{d}}}{R_0}, \quad (72.3)$$

$$\mathbf{E} = \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{d}}{R_0} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{\mathbf{d}}}{R_0}. \quad (72.4)$$

Izraz za $\mathbf{E}$ lahko zapišemo v drugačni obliki, če upoštevamo, da je $\mathbf{d}_{t'}/R_0$ [tako kot poljubna druga funkcija koordinat in časa oblike $1/R_0 f(t - R_0/c)$] rešitev valovne enačbe

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\mathbf{d}}{R_0} \right) = \Delta \left(\frac{\mathbf{d}}{R_0} \right).$$

Z uporabo pravila

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a}$$

*Včasih vpeljemo *Hertzov vektor*, definiran kot

$$\mathbf{Z} = -\frac{1}{R_0} \mathbf{d} \left(t - \frac{R_0}{c} \right).$$

Tedaj lahko zapišemo

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{Z}}, \quad \phi = \nabla \cdot \mathbf{Z}.$$

dobimo

$$\mathbf{E} = \nabla \times (\nabla \times \frac{\mathbf{d}}{R_0}). \quad (72.5)$$

Dobljeni rezultati določajo polje pri razdaljah, primerljivih z valovno dolžino. Pazljivi moramo biti na to, da v vseh zapisanih enačbah ne smemo izpostaviti $1/R_0$ pred znak za odvod, saj je razmerje med členi reda $1/R_0^2$ in $1/R_0$ enakega velikostnega reda kot λ/R_0 .

Zapišimo še enačbe za Fourierove komponente polja. Komponento $\mathbf{H}_\omega$ določimo tako, da v (72.3) vstavimo namesto $\mathbf{H}$ in $\mathbf{d}$ njuni monokromatski komponenti $\mathbf{H}_\omega e^{-i\omega t}$ in $\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t}$. Pri tem moramo paziti, da se količine na desnih straneh enačb od (72.1) do (72.5) nanašajo na čas $t' = t - (R_0/c)$. Zato moramo namesto $\mathbf{d}$ vstaviti izraz

$$\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega(t - \frac{R_0}{c})} = \mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t + ikR_0}.$$

Dobljen izraz delimo še z $e^{-i\omega t}$ in dobimo

$$\mathbf{H}_\omega = -ik\nabla \times \left(\mathbf{d}_\omega \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \right) = ik\mathbf{d}_\omega \times \nabla \frac{e^{ikR_0}}{R_0},$$

če izračunamo še odvod pa sledi

$$\mathbf{H}_\omega = ik\mathbf{d}_\omega \times \mathbf{n} \left(\frac{ik}{R_0} - \frac{1}{R_0^2} \right) e^{ikR_0}, \quad (72.6)$$

kjer je $\mathbf{n}$ enotski vektor v smeri $\mathbf{R}_0$.

Na podoben način dobimo iz

$$\mathbf{E}_\omega = k^2 \mathbf{d}_\omega \frac{e^{ikR_0}}{R_0} + (\mathbf{d}_\omega \cdot \nabla) \nabla \frac{e^{ikR_0}}{R_0},$$

z odvajanjem pa od tod sledi

$$\mathbf{E}_\omega = \mathbf{d}_\omega \left(\frac{k^2}{R_0} + \frac{ik}{R_0^2} - \frac{1}{R_0^3} \right) e^{ikR_0} + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}_\omega) \left(-\frac{k^2}{R_0} - \frac{3ik}{R_0^2} + \frac{3}{R_0^3} \right) e^{ikR_0}. \quad (72.7)$$

Pri velikih razdaljah v primerjavi z valovno dolžino ($kR_0 \gg 1$) lahko zanemarimo člene reda $1/R_0^2$ in $1/R_0^3$ v enačbah (72.7) in (72.6), in dobimo polje v "valovnem območju":

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{k^2}{R_0} \mathbf{n} \times (\mathbf{d}_\omega \times \mathbf{n}) e^{ikR_0}, \quad \mathbf{H}_\omega = -\frac{k^2}{R_0} \mathbf{d}_\omega \times \mathbf{n} e^{ikR_0}.$$

Pri razdaljah, ki so majhne v primerjavi z valovno dolžino ($kR_0 \ll 1$), lahko zanemarimo člena z $1/R_0$ in $1/R_0^2$ in postavimo $e^{ikR_0} \approx 1$; tedaj je

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{1}{R_0^3} [3\mathbf{n}(\mathbf{d}_\omega \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{d}_\omega],$$

kar je enako statičnemu polju električnega dipola (§ 40); v tem približku magnetnega polja ni.

NALOGE

NALOGA 1. Izračunaj polji kvadrupolnega in magnetno dipolnega sevanja v bližini izvira.

Rešitev: Zaradi enostavnosti predpostavimo, da električnega dipolnega sevanja ni. Tedaj velja (glej izračun v § 71):

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \mathbf{j}_{t-\frac{R}{c}} \frac{dV}{R} \approx -\frac{1}{c} \int (\mathbf{r} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{j}_{t-\frac{R}{c}}}{R_0} dV,$$

kar dobimo z razvojem po $\mathbf{r} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{R}$. V nasprotju z izpeljavo v § 71 tu ne moremo izpostaviti faktorja $1/R_0$ pred znak za odvajanje. Diferencialni operator prenesemo pred integral in integral zapišemo s tenzorskim zapisom:

$$A_\alpha = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial X_\beta} \int \frac{x_\beta j_\alpha}{R_0} dV$$

(X_β so komponente krajevnega vektorja $\mathbf{R}_0$). Integral pretvorimo v vsoto po nabojih in dobimo

$$A_\alpha = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial X_\beta} \frac{(\sum e v_\alpha x_\beta)_{t'}}{R_0}.$$

Kot v § 71 lahko ta izraz razcepimo na kvadrupolni in magnetni dipolni del. Ustrezna skalarna potenciala izračunamo iz vektorskih potencialov na enak način kot v § 71. Tako dobimo za kvadrupolno sevanje

$$A_\alpha = -\frac{1}{6c} \frac{\partial}{\partial X_\beta} \frac{\dot{D}_{\alpha\beta}}{R_0}, \quad \phi = \frac{1}{6} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{D_{\alpha\beta}}{R_0},$$

za magnetno dipolno sevanje pa

$$\mathbf{A} = \nabla \times \frac{\mathbf{m}}{R_0}, \quad \phi = 0$$

[vse količine na desnih straneh enačb se kot vedno nanašajo na čas $t' = t - (R_0/c)$].

Jakosti polja magnetnega dipolnega sevanja sta

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \nabla \times \frac{\dot{\mathbf{m}}}{R_0}, \quad \mathbf{H} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{m} R_0).$$

S primerjavo z (72.3) in (72.5) ugotovimo, da se $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ zapišeta z $\mathbf{m}$ na enak način, kot se $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ zapišeta z $\mathbf{d}$ v primeru električnega dipolnega sevanja.

Spektralne komponente potencialov kvadrupolnega sevanja so

$$A_\alpha^{(\omega)} = \frac{ik}{6} D_{\alpha\beta}^{(\omega)} \frac{\partial}{\partial X_\beta} \frac{e^{ikR_0}}{R_0}, \quad \phi^{(\omega)} = \frac{1}{6} D_{\alpha\beta}^{(\omega)} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{e^{ikR_0}}{R_0}.$$

Ker sta izraza za polje zelo kompleksna, ju ne bomo zapisali.

NALOGA 2. Izračunaj, kako hitro izgublja vrtilno količino sistem nabojev zaradi dipolnega sevanja elektromagnetnih valov.

Rešitev: Iz enačbe (32.9) izvemo, da je gostota toka vrtilne količine elektromagnetnega valovanja podana s prostorskimi komponentami tenzorja četverca $x^i T^{kl} - x^k T^{il}$. Preselimo se v tridimenzionalni zapis in vpeljemo tridimenzionalni vektor vrtilne količine s komponentami $\frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} M^{\beta\gamma}$; gostota toka je tedaj podana s tridimenzionalnim tenzorjem

$$\frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} (x_\beta \sigma_{\gamma\delta} - x_\gamma \sigma_{\beta\delta}),$$

kjer je $\sigma_{\alpha\beta} \equiv T^{\alpha\beta}$ tridimenzionalni Maxwellov napetostni tenzor (vse indekse pišemo spodaj v skladu z običajnim dogovorom za tridimenzionalni zapis). Celotna vrtilna količina, ki jo izgubi sistem na enoto časa, je enaka pretoku vrtilne količine sevanja skozi krogelno površino polmera R_0 :

$$-\frac{dM_\alpha}{dt} = \oint e_{\alpha\beta\gamma} x_\beta \sigma_{\gamma\delta} n_\delta df,$$

kjer je $df = R_0^2$ do, $\mathbf{n}$ pa je enotski tenzor v smeri $\mathbf{R}_0$. Uporabimo tenzor $\sigma_{\alpha\beta}$ iz (33.3) in dobimo

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{R_0^3}{4\pi} \int [(\mathbf{n} \times \mathbf{E})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) + (\mathbf{n} \times \mathbf{H})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})] d\Omega. \quad (1)$$

Ko uporabimo to enačbo za sevalno polje pri veliki oddaljenosti od sistema, se ne smemo ustaviti pri členih reda $\sim 1/R_0$; v tem približku je $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0$, zato bi bil integral enak nič. Te členi [podani z (67.5), (67.6)] zadostujejo, da izračunamo faktorja $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$ in $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$; longitudinalni komponenti polja $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}$ in $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}$ dobimo iz členov reda $\sim 1/R_0^2$ (posledica tega je, da integrand v (1) postane $\sim 1/R_0^3$ in razdalja R_0 odpade iz rešitve, kot tudi mora). V dipolnem približku $\lambda \gg a$, zato moramo ločiti člene, ki vsebujejo dodatne faktorje [glede na (67.5), (67.6)] $\sim \lambda/R_0$ ali $\sim a/R_0$; zadostuje, da obdržimo prve. Te člene dobimo iz (72.3) in (72.5); z izračunom do drugega reda po $1/R_0$ dobimo *

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \frac{2}{cR_0^2} \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{d}}, \quad \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (2)$$

V (1) vstavimo (2) in (67.6), pa dobimo

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{1}{2\pi c^3} \int (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}})(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{d}}) d\Omega.$$

Integrand nato zapišemo kot $e_{\alpha\beta\gamma} n_\beta \ddot{d}_\gamma n_\delta \dot{d}_\delta$ in izračunamo povprečje po smeri $\mathbf{n}$. Sledi

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\frac{2}{3c^3} \dot{\mathbf{d}} \cdot \ddot{\mathbf{d}}. \quad (3)$$

Omenimo naj, da je za linearno nihalo ($\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos \omega t$ z realno amplitudo $\mathbf{d}_0$) izraz (3) enak nič; takšen sistem ne izgublja vrtilne količine s sevanjem.

§73 Sevanje hitrega delca

Obravnavajmo nabiti delec, ki se giblje s hitrostjo, ki ni majhna v primerjavi s svetlobno.

Enačb iz § 67, ki smo jih izpeljali ob predpostavki $v \ll c$, ne moremo neposredno uporabiti. Lahko pa delec obravnavamo v opazovalnem sistemu, v katerem delec ob izbranem trenutku miruje; v tem opazovalnem sistemu omenjene enačbe seveda veljajo (poudariti moramo, da lahko to storimo le za *en sam* delec; za sistem več delcev v splošnem ne moremo poiskati opazovalnega sistema, v katerem bi vsi delci hkrati mirovali).

V tem opazovalnem sistemu delec v času dt izseva energijo

$$d\mathcal{E} = \frac{2e^2}{3c^3} w^2 dt \quad (73.1)$$

[kar sledi iz (67.9)], kjer je w pospešek delca v tem opazovalnem sistemu. V tem opazovalnem sistemu je celotna izsevana gibalna količina enaka nič:

$$dP = 0. \quad (73.2)$$

Izsevana gibalna količina je namreč podana z integralom gostote gibalne količine v polju sevanja po sklenjeni ploskvi, ki obkroža delec. Ker je dipolno sevanje simetrično, sta gibalni količini, oddani v dve nasprotni smeri, po velikosti enaki, a nasprotnih smeri; zato je integral identično enak nič.

*Od nič različno vrednost za $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}$ bi dobili le, če bi upoštevali člene višjega reda po a/R_0 .

Da se bomo lahko preselili v poljubni opazovalni sistem, moramo najprej enačbi (73.1) in (73.2) zapisati v štiridimenzionalni obliki. Hitro se lahko prepričamo, da moramo “izsevno četverno gibalno količino” dP_i zapisati kot

$$dP^i = -\frac{2e^2}{3c} \frac{du^k}{ds} \frac{du_k}{ds} dx^i = -\frac{2e^2}{3c} \frac{du^k}{ds} \frac{du_k}{ds} u^i ds. \quad (73.3)$$

V opazovalnem sistemu, kjer delec miruje, so namreč prostorske komponente četverca hitrosti du^i enake nič, tako da velja

$$\frac{du^k}{ds} \frac{du_k}{ds} = -\frac{w^2}{c^4};$$

zato so prostorske komponente četverca dP^i enake nič, časovna komponenta pa je enaka enačbi (73.1).

Celotna četverna gibalna količina, ki jo izseva delec, ko potuje v danem elektromagnetnem polju, je enaka integralu izraza (73.3), torej

$$\Delta P^i = -\frac{2e^2}{3c} \int \frac{du^k}{ds} \frac{du_k}{ds} dx^i. \quad (73.4)$$

To enačbo lahko zapišemo tudi drugače, če četverec pospeška du^i/ds zapišemo s tenzorjem elektromagnetnega polja, pri čemer uporabimo gibalno enačbo (23.4):

$$mc \frac{du_k}{ds} = \frac{e}{c} F_{kl} u^l.$$

Dobimo

$$\Delta P^i = -\frac{2e^4}{3m^2 c^5} \int (F_{kl} u^l)(F^{km} u_m) dx^i. \quad (73.5)$$

Časovni komponenti enačb (73.4) in (73.5) sta enaki celotni izsevani energiji $\Delta \mathcal{E}$. Če vse četverne količine zapišemo s tridimenzionalnimi oblikami, dobimo

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{2e^2}{3c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w^2 - \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{w})^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} dt \quad (73.6)$$

($\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}}$ je pospešek delca). Iz enačbe (73.5) pa dobimo

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{2e^4}{3m^2 c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right\}^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt. \quad (73.7)$$

Izraza za celotno izsevno gibalno količino se od zgornjih dveh izrazov razlikujeta le v tem, da imata v integrandu dodatni faktor $\mathbf{v}$.

Iz enačbe (73.7) je razvidno, da je pri hitrostih blizu svetlobne celotna izsevna energija na enoto časa od hitrosti odvisna kot $[1 - (v^2/c^2)]^{-1}$, in je torej sorazmerna s kvadratom energije potujočega delca. Edina izjema je gibanje v električnem polju v smeri polja. V tem primeru se faktor $[1 - (v^2/c^2)]$ v imenovalcu okrajša z enakim faktorjem v števcu, tako da sevanje ni odvisno od energije delca.

Zanima nas še kotna porazdelitev sevanja hitrega delca. Pri reševanju te naloge si pomagamo z Lienard-Wiechertovima izrazoma za polji, (63.8) in (63.9). Pri velikih oddaljenostih

zadostuje, če obdržimo člen najnižjega reda po $1/R$ [drugi člen v (63.8)]. Če vpeljemo enotski vektor $\mathbf{n}$ v smeri sevanja ($\mathbf{R} = \mathbf{n}R$), dobimo enačbi

$$\mathbf{E} = \frac{e}{c^2 R} \frac{\mathbf{n} \times \left\{ \left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \mathbf{w} \right\}}{\left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \right)^3}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad (73.8)$$

kjer moramo vse količine na desni vzeti ob “zakasnjem” času $t' = t - (R/c)$.

Jakost sevanja, izsevanega v prostorski kot $d\Omega$, je $dI = (c/4\pi)E^2 R^2 d\Omega$. Razvijemo E^2 in dobimo

$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left\{ \frac{2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})}{c \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c} \right)^5} + \frac{\mathbf{w}^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c} \right)^4} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c} \right)^6} \right\} d\Omega. \quad (73.9)$$

Če nas zanima kotna porazdelitev celotnega sevanja, ki je nastalo med gibanjem delca, moramo jakost integrirati po času. Pri tem je pomembno, da upoštevamo, da je integrand funkcija spremenljivke t' ; zato moramo zapisati

$$dt = \frac{\partial t}{\partial t'} dt' = \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \right) dt' \quad (73.10)$$

[glej (63.6)], nato pa lahko brez težav integriramo po t' . Tako dobimo naslednji izraz za celotno sevanje v prostorski kot $d\Omega$:

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}} = \frac{e^2}{4\pi c^3} d\Omega \int \left\{ \frac{2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})}{c \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c} \right)^4} + \frac{\mathbf{w}^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c} \right)^3} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c} \right)^5} \right\} dt'. \quad (73.11)$$

Kot je razvidno iz (73.9), je v splošnem kotna porazdelitev sevanja dokaj zapletena. V ultrarelativističnem primeru, ko je $(1 - v/c) \ll 1$, pa ima porazdelitev karakteristično obliko, ki je povezana s prisotnostjo visokih potenc razlike $1 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}/c)$ v imenovalcih različnih členov v tem izrazu. Zato je jakost velika v ozkem kotnem območju, za katere je razlika $1 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})/c$ majhna. Z θ označimo kot med $\mathbf{n}$ in $\mathbf{v}$. Velja

$$1 - \frac{v}{c} \cos \theta \approx 1 - \frac{v}{c} + \frac{\theta^2}{2} \approx \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \theta^2 \right);$$

ta razlika je majhna za

$$\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (73.12)$$

Zato ultrarelativistični delec seva predvsem v smeri svojega gibanja, na ozkem kotnem območju (73.12) okoli smeri vektorja hitrosti.

Poudariti moramo še, da pri poljubni hitrosti in pospešku delca vedno obstajata dve smeri, v katerih je jakost izsevane svetlobe enaka nič. To sta smeri, za kateri je vektor $\mathbf{n} - (\mathbf{v}/c)$ vzporeden z vektorjem $\mathbf{w}$, tako da je polje (73.8) enako nič. (Glej nalogo 2 v tem razdelku.)

Končno bomo podali še izraza, v katera se (73.9) poenostavi v dveh posebnih primerih.

Če sta hitrost in pospešek delca vzporedna, je

$$\mathbf{H} = \frac{e}{c^2 R} \frac{\mathbf{w} \times \mathbf{n}}{\left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \right)^3},$$

jakost pa je

$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{w^2 \sin^2 \theta}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^6} d\Omega. \quad (73.13)$$

Jakost je seveda simetrična okoli skupne smeri vektorjev $\mathbf{v}$ in $\mathbf{w}$, in je enaka nič v smeri hitrosti ($\theta = 0$) in v nasprotni smeri ($\theta = \pi$). V ultrarelativističnem primeru ima jakost kot funkcija spremenljivke θ dva ostra vrhova na območju (73.12) in naglo pade k nič pri $\theta = 0$.

Če sta hitrost in pospešek med seboj pravokotna, potem iz (73.9) dobimo

$$dI = \frac{e^2 w^2}{4\pi c^3} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^4} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^6} \right] d\Omega, \quad (73.14)$$

kjer je θ ponovno kot med $\mathbf{n}$ in $\mathbf{v}$, kot ϕ pa je kot azimuta vektorja $\mathbf{n}$ glede na ravnino, ki je napeta na vektorja $\mathbf{v}$ in $\mathbf{w}$. Jakost je simetrična glede na ravnino vektorjev $\mathbf{v}$ in $\mathbf{w}$ in je enaka nič v dveh smereh v tej ravnini, ki ležita pod kotom $\theta = \cos^{-1}(v/c)$ glede na vektor hitrosti.

NALOGE

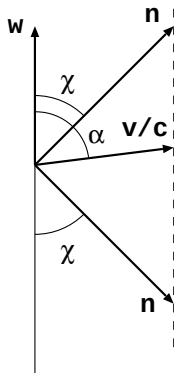
NALOGA 1. Izračunaj celotno sevanje relativističnega naboja e_1 , ki leti s parametrom trka ρ skozi Coulombsko polje z nepremičnim središčem (torej skozi potencial $\phi = e_2/r$).

Rešitev: Med letom skozi polje, se relativistični delec le malo ukloni *. Zato lahko hitrost $\mathbf{v}$ v (73.7) smatramo kot konstanto, tako da je polje na mestu delca enako

$$\mathbf{E} = \frac{e_2 \mathbf{r}}{r^2} \approx \frac{e_2 \mathbf{r}}{(\rho^2 + v^2 t^2)^{3/2}},$$

kjer je $x = vt$ in $y = \rho$. Izračunamo integral po času (73.7) in dobimo

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{\pi e_1^4 e_2^2}{12 m^2 c^3 \rho^3 v} \frac{4c^2 - v^2}{c^2 - v^2}.$$



Slika 12:

NALOGA 2. V kateri smeri je jakost sevanja premikajočega se delca enaka nič?

*Za $v \sim c$ lahko do uklona za velik kot pride le za parameter trka $\rho \sim e^2/mc^2$, kar pa nas pripelje izven domene klasične elektrodinamike.

Rešitev: Iz geometrijske konstrukcije (slika 12) je razvidno, da iskana smer $\mathbf{n}$ leži v ravnini, napeti na vektorja $\mathbf{v}$ in $\mathbf{w}$, z vektorjem $\mathbf{w}$ pa tvori kot χ :

$$\sin \chi = \frac{v}{c} \sin \alpha,$$

kjer je α kot med $\mathbf{v}$ in $\mathbf{w}$.

NALOGA 3. Poišči jakost sevanja delca, ki se giblje stacionarno v polju krožno polariziranega elektromagnetnega valovanja.

Rešitev: Iz rezultatov tretje naloge v § 48 razberemo, da se delec giblje po krogu, in da je njegova hitrost ves čas vzporedna z $\mathbf{H}$ in pravokotna na $\mathbf{E}$. Njegova kinetična energija je

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = c\sqrt{p^2 - m^2c^2} = c\gamma$$

(uporabljamo enak zapis kot v omenjeni nalogi). Z uporabo enačbe (73.7) dobimo jakost sevanja

$$I = \frac{2e^4}{3m^2c^3} \frac{\mathbf{E}^2}{1 - v^2/c^2} = \frac{2e^4E_0^2}{3m^2c^3} \left[1 + \left(\frac{eE_0}{mc\omega} \right)^2 \right].$$

NALOGA 4. Kot predhodna naloga, tokrat za linearno polarizirano valovanje.

Rešitev: Iz druge naloge v § 48 izvemo, da se delec giblje v ravnini XY , v kateri leži smer širjenja valovanja (os X) in vektor $\mathbf{E}$ (os Y); polje $\mathbf{H}$ kaže v smeri osi Z (velja $H_z = E_y$). Iz (73.7) dobimo

$$I = \frac{2e^4\mathbf{E}^2}{3m^2c^3} \frac{(1 - v_x/c)^2}{1 - v^2/c^2}.$$

Izračunamo povprečje po periodi gibanja, pri čemer uporabimo parametrizacijo iz zgoraj omenjene naloge, in dobimo

$$\bar{I} = \frac{e^4E_0^2}{3m^2c^3} \left[1 - \frac{3}{8} \left(\frac{eE_0}{mc\omega} \right)^2 \right].$$

§74 Sinhrotronsko sevanje (zavorno sevanje)

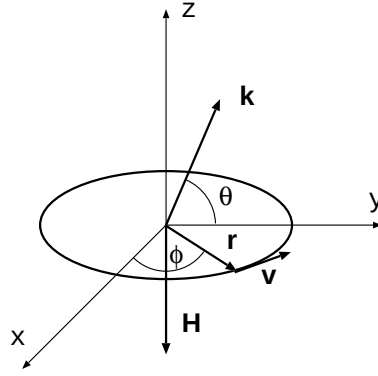
Oglejmo si sevanje nabitega delca, ki se giblje s poljubno hitrostjo po krožni tirnici v homogenem in nespremenljivem magnetnem polju; takšno sevanje se imenuje magnetno zavorno sevanje (nem. *bremsstrahlung*). Polmer orbite r in krožno frekvenco gibanja ω_H lahko izrazimo z jakostjo polja H in hitrostjo delca v z enačbama (glej § 21):

$$r = \frac{mcv}{eH\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \omega_H = \frac{v}{r} = \frac{eH}{mc}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (74.1)$$

Celotna jakost sevanja v vseh smereh je podana neposredno z (73.7), če izpustimo integracijo po času in postavimo $\mathbf{E} = 0$ in $\mathbf{H} \perp \mathbf{v}$:

$$I = \frac{2e^4H^2v^2}{3m^2c^5 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}. \quad (74.2)$$

Vidimo, da je celotna jakost sorazmerna s kvadratom gibalne količine delca.



Slika 13:

Če nas zanima kotna porazdelitev sevanja, potem moramo uporabiti enačbo (73.11). Pomembna količina je povprečna jakost po periodi gibanja. Dobimo jo tako, da integriramo (73.11) po času obhoda delca po krogu in rezultat delimo z $T = 2\pi/\omega_H$.

Naj bo ravnina kroženja ravnina XY (izhodišče postavimo v središče kroga), ravnina YZ pa naj bo izbrana tako, da smer sevanja $\mathbf{n}$ leži v njej (slika 13). Magnetno polje kaže v negativni smeri vzdolž osi Z (smer gibanja delca na sliki 13 ustreza pozitivno nabitemu delcu z nabojem e). Naj bo θ kot med smerjo $\mathbf{k}$ sevanja in osjo Y , kot $\phi = \omega_H t$ pa smer med krajevnim vektorjem delca in osjo X . Kosinus kota med $\mathbf{k}$ in hitrostjo $\mathbf{v}$ je tedaj $\cos \theta \cos \phi$ (vektor $\mathbf{v}$ leži v ravnini XY , in je ves čas pravokoten na krajevni vektor delca). Pospešek delca $\mathbf{w}$ zapišemo s poljem $\mathbf{H}$ in hitrostjo $\mathbf{v}$ z uporabo gibalne enačbe [glej (21.1)]:

$$\mathbf{w} = \frac{e}{mc} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \mathbf{v} \times \mathbf{H}.$$

Po preprostem izračunu dobimo

$$\overline{dI} = d\phi \frac{e^4 H^2 v^2}{8\pi^2 m^2 c^5} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \int_0^{2\pi} \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \sin^2 \theta + \left(\frac{v}{c} - \cos \theta \cos \phi\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \cos \phi\right)^5} d\phi \quad (74.3)$$

(integracijo po času smo spremenili v integracijo po kotu $\phi = \omega_H t$). Integracija je sicer elementarna, vendar dolgotrajna. Kot rezultat dobimo

$$dI = d\phi \frac{e^4 H^2 v^2}{8\pi m^2 c^5} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left[\frac{2 + \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta\right)^{5/2}} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(4 + \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta\right) \cos^2 \theta}{4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta\right)^{7/2}} \right]. \quad (74.4)$$

Razmerje med jakostjo sevanja pod kotom $\theta = \pi/2$ (pravokotno na tirnico delca) in jakostjo pod kotom $\theta = 0$ (v ravnini tirnice) je

$$\frac{\left(\frac{dI}{d\phi}\right)_0}{\left(\frac{dI}{d\phi}\right)_{\pi/2}} = \frac{4 + 3\frac{v^2}{c^2}}{8 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{5/2}}. \quad (74.5)$$

Ko gre $v \rightarrow 0$, postane to razmerje enako $1/2$, pri hitrostih blizu svetlobne pa je zelo veliko.

Določimo sedaj še spektralni razcep sevanja. Ker je gibanje naboja periodično, imamo opravka z razvojem v Fourierovo vrsto. Pri računu si pomagamo z vektorskim potencialom. Fourierove komponente vektorskega potenciala dobimo z integralom [glej (66.12)]:

$$\mathbf{A}_n = e \frac{e^{ikR_0}}{cR_0T} \oint e^{i(\omega_H n t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d\mathbf{r},$$

pri katerem moramo integrirati vzdolž trajektorije delca (po krogu). Koordinati delca sta $x = r \cos \omega_H t$ in $y = r \sin \omega_H t$. Kot integracijsko spremenljivko si izberemo kot $\phi = \omega_H t$. Upoštevamo, da je

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr \cos \theta \sin \phi = (nv/c) \cos \theta \sin \phi$$

($k = n\omega_H/c = nv/cr$), in za Fourierove komponente vektorskega potenciala v smeri osi X dobimo

$$A_{xn} = -\frac{ev}{2\pi cR_0} e^{ikR_0} \int_0^{2\pi} e^{in(\phi - \frac{v}{c} \cos \theta \sin \phi)} \sin \phi d\phi.$$

S takšnim integralom smo že računali v § 70. Izrazimo ga lahko z odvodom Besselove funkcije:

$$A_{xn} = -\frac{iev}{cR_0} e^{ikR_0} J'_n \left(\frac{nv}{c} \cos \theta \right). \quad (74.6)$$

Podobno izračunamo tudi A_{yn} :

$$A_{yn} = \frac{e}{R_0 \cos \theta} e^{ikR_0} J_n \left(\frac{nv}{c} \cos \theta \right). \quad (74.7)$$

Komponenta v smeri osi Z je seveda enaka nič.

Z uporabo enačb iz § 66 dobimo jakost sevanja s frekvenco $\omega = n\omega_H$ v diferencialni prostorski kot do:

$$dI_n = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{H}_n|^2 R_0^2 d\Omega = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{k} \times \mathbf{A}_n|^2 R_0^2 d\Omega.$$

Upoštevamo, da je

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{k}|^2 = A_x^2 k^2 + A_y^2 k^2 \sin^2 \theta,$$

in v izraz vstavimo (74.6) in (74.7), pa dobimo jakost sevanja (G. A. Schott, 1912):

$$dI_n = \frac{n^2 e^4 H^2}{2\pi c^3 m^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left[\tan^2 \theta J_n^2 \left(\frac{nv}{c} \cos \theta \right) + \frac{v^2}{c^2} J_n'^2 \left(\frac{nv}{c} \cos \theta \right) \right] d\Omega. \quad (74.8)$$

Celotno jakost sevanja v vse smeri prostora pri frekvenci $\omega = n\omega_H$ dobimo tako, da zgornji izraz integriramo po vseh kotih. Ta integral žal ni izračunljiv v zaključeni obliki. Z nekaj transformacijami in z uporabo zvez iz teorije Besselovih funkcij lahko integral zapišemo v obliki

$$I_n = \frac{2e^4 H^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}{m^2 c^2 v} \left[\frac{nv^2}{c^2} J_{2n}'^2 \left(\frac{2nv}{c} \right) - n^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \int_0^{v/c} J_{2n}(2n\xi) d\xi \right]. \quad (74.9)$$

Bolj podrobno si bomo ogledali ultrarelativistični primer, ko je hitrost delca blizu svetlobne hitrosti.

Če postavimo $v = c$ v števec enačbe (74.2), ugotovimo, da je v ultrarelativističnem primeru celotna jakost sinhrotronskega sevanja sorazmerna s kvadratom energije delca $\mathcal{E}$:

$$I = \frac{2e^4 H^2}{3m^2 c^3} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^2. \quad (74.10)$$

Kotna porazdelitev sevanja je močno anizotropna. Delec seva predvsem v ravnini kroženja. Širino $\Delta\theta$ območja kotov, v katere je izsevana večina sevanja, določimo iz pogoja $1 - (v^2/c^2) \cos^2 \theta \sim 1 - (v^2/c^2)$, če zapišemo $\theta = \pi/2 \pm \Delta\theta$, $\sin \theta \approx 1 - (\Delta\theta)^2/2$. Očitno velja *

$$\Delta\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\mathcal{E}}. \quad (74.11)$$

V nadaljevanju bomo pokazali, da je v ultrarelativističnem primeru najbolj izdatno sevanje s frekvencami z visokimi indeksi n (Arzimovič in Pomerančuk, 1945). Zato lahko uporabimo asimptotično enačbo (70.9), po kateri velja

$$J_{2n}(2n\xi) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi} n^{1/3}} \Phi[n^{2/3}(1 - \xi^2)]. \quad (74.12)$$

To vstavimo v enačbo (74.9) in dobimo naslednjo enačbo za spektralno porazdelitev sevanja za velike vrednosti n :[†]

$$I_n = -\frac{2e^4 H^2 \frac{mc^2}{\mathcal{E}} u^{1/2}}{\sqrt{\pi} m^2 c^3} \left\{ \Phi'(u) + \frac{u}{2} \int_u^\infty \Phi(u) du \right\}, \quad (74.13)$$

$$u = n^{2/3} \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2.$$

Ko gre $u \rightarrow 0$, gre funkcija med zavitima oklepajema proti konstantni limiti $\Phi'(0) = -0,4587\dots$ ^{‡ §} Zato za $u \ll 1$ velja

$$I_n = 0.52 \frac{e^4 H^2}{m^2 c^3} \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 n^{1/3}, \quad 1 \ll n \ll \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^3. \quad (74.14)$$

Za $u \gg 1$ lahko uporabimo asimptotični izraz za Airyjevo funkcijo (glej opombo na strani 152). Dobimo

$$I_n = \frac{e^4 H^2 \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^{5/2} n^{1/2}}{2\sqrt{\pi} m^2 c^3} \exp \left\{ -\frac{2}{3} n \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^3 \right\}, \quad n \gg \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^3, \quad (74.15)$$

*Ta rezultat je seveda v skladu s kotno porazdelitvijo jakosti, ki smo jo določili v predhodnem razdelku [glej enačbo (73.12)]; vseeno pa naj bralca opozorimo, da kot θ v tem razdelku ni enak kotu θ med vektorjema $\mathbf{n}$ in $\mathbf{v}$ v § 73.

[†]Pri tem smo limito integrala $n^{2/3}$ poslali proti neskončnosti, saj s tem ne izgubimo na natančnosti; poleg tega smo postavili $v = c$, kjer smo mogli. Čeprav so v integralu (74.9) pomembne vrednosti ξ okoli 1, je uporaba enačbe (74.12) vseeno dopustna, saj integral hitro integrira na spodnji meji.

[‡]Iz definicije Airyjeve funkcije sledi

$$\Phi'(0) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \xi \sin \frac{\xi^3}{3} d\xi = -\frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot 3^{1/3}} \int_0^\infty x^{-1/3} \sin x dx = -\frac{3^{1/6} \Gamma(\frac{2}{3})}{2\sqrt{\pi}}.$$

[§]Velja

$$\int_0^\infty x^{-1/n} \sin x dx = \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

op. prev.

kar pomeni, da jakost pada eksponentno za velike vrednosti n .

Spekter ima torej vrh v okolici

$$n \sim \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^3,$$

največji delež sevanja pa je zgoščen na območju frekvenc

$$\omega \sim \omega_H \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^3 = \frac{eH}{mc} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^2. \quad (74.16)$$

Te vrednosti ω so zelo visoke v primerjavi z razliko dveh sosednjih frekvenc, ω_H . Rečemo lahko, da je spekter “kvazizvezen”, saj je sestavljen iz velikega števila bližnjih spektralnih črt.

Namesto porazdelitvene funkcije I_n lahko zato vpeljemo porazdelitev po zvezni frekvenci $\omega = n\omega_H$, če zapišemo

$$dI = I_n dn = I_n \frac{d\omega}{\omega_H}.$$

Pri numeričnih izračunih je priročno izraziti to porazdelitev z MacDonaldovo funkcijo K_ν .

* S preprostim preoblikovanjem enačbe (74.13) dobimo

$$dI = d\omega \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^3 H}{mc^2} F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right), \quad F(\xi) = \xi \int_\xi^\infty K_{5/3}(\xi) d\xi, \quad (74.17)$$

kjer smo vpeljali

$$\omega_c = \frac{3eH}{2mc} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^2. \quad (74.18)$$

Na sliki 14 je graf funkcije $F(\xi)$.

Končno opišimo še primer, ko se delec ne giblje po orbiti v ravnini, temveč po vijačnici, torej primer, ko ima delec od nič različno komponento hitrosti v longitudinalni smeri (vzdolž polja) $v_{\parallel} = v \cos \chi$ (kjer je χ kot med $\mathbf{H}$ in $\mathbf{v}$). Frekvenca krožnega gibanja je še vedno podana z (74.1), vektor $\mathbf{v}$ pa se sedaj ne giblje po krožnici, temveč na površini stožca z osjo v smeri vzdolž polja $\mathbf{H}$ in s kotom stožca 2χ . Celotno jakost sevanja (definirano kot celotno energijo, ki jo delec izgubi na enoto časa) dobimo iz enačbe (74.2), če H nadomestimo z $H_{\perp} = H \sin \chi$.

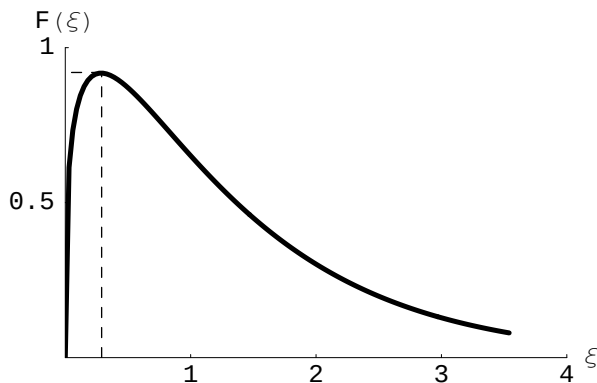
V ultrarelativističnem primeru je sevanje zgoščeno v smereh v bližini tvorilk “stožca hitrosti”. Spektralno porazdelitev in celotno jakost (definirano tako kot zgoraj) dobimo iz enačb (74.17) in (74.10), če H nadomestimo z $H_{\perp}$. Če nas zanima jakost sevanja v teh smereh, kot jo izmeri mirujoči opazovalec, moramo vpeljati dodatni faktor, ki opiše učinek približevanja in oddaljevanja od sevajočega delca. Ta faktor je podan z razmerjem dt/dt_{obs} ,

* Povezava med Airyjevo funkcijo in funkcijo $K_{1/3}$ je podana z enačbo (4) v opombi na strani 152. Uporabiti moramo še naslednji rekurzivni relaciji:

$$K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) = -\frac{2\nu}{x} K_{\nu}(x), \quad 2K'_{\nu}(x) = -K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x).$$

Velja še $K_{-\nu}(x) = K_{\nu}(x)$. Brez težav lahko na primer dokažemo, da velja

$$\Phi'(t) = -\frac{t}{\sqrt{3}\pi} K_{2/3} \left(\frac{2}{3} t^{3/2} \right).$$



Slika 14:

kjer je dt_{obs} časovni interval med zaporednimi trenutki, ko do opazovalca pridejo signali, ki jih izvor odda vsakih dt sekund. Očitno je

$$dt_{\text{obs}} = dt \left(1 - \frac{1}{c} v_{\parallel} \cos \theta \right),$$

kjer je θ kot med smerema $\mathbf{k}$ in $\mathbf{H}$ (predpostavili smo, da je vzdolžna komponenta hitrosti $v_{\parallel}$ v pozitivni smeri vektorja $\mathbf{H}$). V ultrarelativističnem primeru, ko je smer $\mathbf{k}$ blizu smeri $\mathbf{v}$, velja $\theta \approx \chi$, tako da je

$$\frac{dt}{dt_{\text{obs}}} = \left(1 - \frac{v_{\parallel}}{c} \cos \chi \right)^{-1} \approx \frac{1}{\sin^2 \chi}. \quad (74.19)$$

NALOGE

NALOGA 1. Kako se s časom spreminja energija delca, ki se giblje po krožnem tiru v nespremenljivem homogenem magnetnem polju in izgublja energijo s sevanjem.

Rešitev: Z uporabo enačbe (74.2) izračunamo, koliko energije se izgubi na enoto časa:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2e^4 H^2}{3m^4 c^7} (\mathcal{E}^2 - m^2 c^4),$$

(pri čemer je $\mathcal{E}$ energija delca). Od tod sledi

$$\frac{\mathcal{E}}{mc^2} = \coth \left(\frac{2e^4 H^2}{3m^3 c^5} t - \text{konst} \right).$$

Ko t narašča, energija monotono upada in se asimptotično približuje vrednosti $\mathcal{E} = mc^2$ (kar ustreza delcu, ki se je povsem ustavil).

NALOGA 2. Izračunaj asimptotični izraz za spektralno porazdelitev sevanja pri visokih vrednostih n za delce, ki se giblje po krogu s hitrostjo, ki ni blizu svetlobne.

Rešitev: Uporabimo dobro poznano asimptotično formulo iz teorije Besselovih funkcij:

$$J_n(n\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n(1-\epsilon^2)^{1/4}}} \left[\frac{\epsilon}{1+\sqrt{1-\epsilon^2}} e^{\sqrt{1-\epsilon^2}} \right]^n,$$

ki velja za $n(1 - \epsilon^2)^{3/2} \gg 1$. Z uporabo te formule dobimo iz (74.9):

$$I_n = \frac{e^4 H^2 n^{1/2}}{2\sqrt{\pi} m^2 c^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{5/4} \left[\frac{\frac{v}{c}}{1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} e^{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]^{2n}.$$

Ta enačba velja pod pogojem, da je $n[1 - (v^2/c^2)]^{3/2} \gg 1$; če je poleg tega $1 - (v^2/c^2)$ majhna količina, se ta izraz poenostavi v (74.15).

NALOGA 3. Kako je polarizirano sinhrotronsko sevanje?

Rešitev: Električno polje $\mathbf{E}_n$ izračunamo iz vektorskega potenciala $\mathbf{A}_n$ (74.6)-(74.7) s pomočjo enačbe

$$\mathbf{E}_n = \frac{i}{k}(\mathbf{k} \times \mathbf{A}_n) \times \mathbf{k} = -\frac{i}{k}\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_n) + ik\mathbf{A}_n.$$

Naj bosta $\mathbf{e}_1$ in $\mathbf{e}_2$ enotska vektorja v ravnini, pravokotni na $\mathbf{k}$, tako da je $\mathbf{e}_1$ vzporeden z osjo x , $\mathbf{e}_2$ pa leži v ravnini YZ [njune komponente so $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, \sin \theta, -\cos \theta)$]; vektorji $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ in $\mathbf{k}$ tvorijo desnoročni sistem. Električno polje je

$$\mathbf{E}_n = ikA_{xn}\mathbf{e}_1 + ik \sin \theta A_{yn}\mathbf{e}_2,$$

če pa izpustimo nepomembne skupne faktorje, pa lahko pišemo

$$\mathbf{E}_n \sim \frac{v}{c} J'_n \left(\frac{nv}{c} \cos \theta \right) \mathbf{e}_1 + \tan \theta J_n \left(\frac{nv}{c} \cos \theta \right) i\mathbf{e}_2.$$

Valovanje je eliptično polarizirano (glej § 48).

V ultrarelativističnem primeru lahko za velike n in majhne kote θ funkciji J_n in J'_n zapišemo s funkcijama $K_{1/3}$ in $K_{2/3}$, pri čemer kot argument funkcij uporabimo približek

$$1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta \approx 1 - \frac{v^2}{c^2} + \theta^2 = \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 + \theta^2.$$

Tako dobimo

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{e}_1 \psi K_{2/3} \left(\frac{n}{3} \psi^3 \right) + i\mathbf{e}_2 \theta K_{1/3} \left(\frac{n}{3} \psi \right), \quad \psi = \sqrt{\left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 + \theta^2}.$$

Pri $\theta = 0$ eliptična polarizacija degenerira v linearno polarizacijo vzdolž $\mathbf{e}_1$. Za velike θ ($|\theta| \gg mc^2/\mathcal{E}$, $n\theta^3 \gg 1$) velja $K_{1/3}(x) \approx K_{2/3}(x) \approx \sqrt{\pi/2x}e^{-x}$, in polarizacija postaja krožna: $\mathbf{E}_n \sim \mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2$; vendar pa hkrati postaja jakost sevanja eksponentno majhna. Na vmesnem kotnem območju je krajša os elipse usmerjena vzdolž osi $\mathbf{e}_2$, daljša pa vzdolž $\mathbf{e}_1$. Smer sukanja je odvisna od predznaka kota θ ($\theta > 0$, če smeri $\mathbf{H}$ in $\mathbf{k}$ kažeta v nasprotni smeri ravnine tira, kot je prikazano na sliki 13).

§75 Sevalno dušenje

V § 65 smo pokazali, da razvoj potencialov polja sistema nabojev v vrsto po potencah v/c vodi v drugem približku k Lagrangevi funkciji, s katero lahko gibanje delcev v celoti opišemo (seveda v okviru tega približka). Sedaj bomo nadaljevali razvoj do členov višjega reda in opisali pojave, ki jih ti členi prinesejo.

V razvoju skalarne potenciala

$$\phi = \int \frac{1}{R} \rho_{t-\frac{R}{c}} dV,$$

se člen tretjega reda glasi

$$\phi^{(3)} = -\frac{1}{6c^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int R^2 \rho dV. \quad (75.1)$$

Iz istega razloga kot v izpeljavi, ki je sledila enačbi (65.3), zadostuje, če v razvoju vektorskega potenciala vzamemo člen drugega reda po $1/c$, ki je

$$\mathbf{A}^{(2)} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{j} dV. \quad (75.2)$$

Sedaj bomo potenciala pretvorili s transformacijo

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f,$$

pri čemer si bomo funkcijo f izbrali tako, da bo skalarni potencial $\phi'^{(3)}$ postal enak nič:

$$f = -\frac{1}{6c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R^2 \rho dV.$$

Novi vektorski potencial je enak

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'^{(2)} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{j} dV - \frac{1}{6c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \int R^2 \rho dV \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{j} dV - \frac{1}{3c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \mathbf{R} \rho dV. \end{aligned}$$

Od integralskega zapisa se preselimo k vsoti po posameznih nabojih. Prvi člen na desni zapišemo kot

$$-\frac{1}{c^2} \sum e \dot{\mathbf{v}}.$$

V drugem členu zapišemo $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$, kjer imata $\mathbf{R}$ in $\mathbf{r}$ njun običajni pomen (glej § 66): tedaj je $\dot{\mathbf{R}} = -\dot{\mathbf{r}} = -\dot{\mathbf{v}}$, drugi člen pa postane

$$\frac{1}{3c^2} \sum e \dot{\mathbf{v}}.$$

Zato je

$$\mathbf{A}'^{(2)} = -\frac{2}{3c^2} \sum e \dot{\mathbf{v}}. \quad (75.3)$$

Magnetno polje, ki ustreza tem potencialu, je enako nič ($\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}'^{(2)} = 0$), ker $\mathbf{A}'^{(2)}$ ne vsebuje koordinat eksplisitno. Električno polje $\mathbf{E} = -(1/c) \dot{\mathbf{A}}'^{(2)}$ pa je enako

$$\mathbf{E} = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}, \quad (75.4)$$

kjer je $\mathbf{d}$ dipolni moment sistema.

Členi tretjega reda v razvoju polja vodijo torej k dodatnim silam, ki delujejo na naboje, ki niso vsebovane v Lagrangevi funkciji (65.7); te sile so odvisne od časovnega odvoda pospeška nabojev.

Oglejmo si sistem nabojev, ki se gibljejo stacionarno *. Izračunali bomo povprečno delo, ki ga polje (75.4) opravi na enoto časa. Sila, ki deluje na vsak naboj e , je enaka $\mathbf{f} = e\mathbf{E}$, torej

$$\mathbf{f} = \frac{2e}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}. \quad (75.5)$$

Delo, ki jo ta sila opravi na enoto časa, je $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$, zato je celotno delo, ki je opravljeno na vseh delcih, enako vsoti tega izraza po vseh nabojih:

$$\sum \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}} \cdot \sum e\mathbf{v} = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}} \cdot \dot{\mathbf{d}} = \frac{2}{3c^3} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{d}} \cdot \dot{\mathbf{d}}) - \frac{2}{3c^3} (\ddot{\mathbf{d}})^2.$$

Ob računanju povprečja po času prvi člen odpade, tako da je povprečno delo enako

$$\overline{\sum \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}} = -\frac{2}{3c^3} \overline{\ddot{\mathbf{d}}^2}. \quad (75.6)$$

Izraz na desni je (če odmislimo obratni predznak) kar enak povprečni energiji, ki jo sistem izseva na enoto časa [glej (67.8)]. Zato sile (75.5), ki se pojavijo v tretjem redu približka, opisujejo silo reakcije zaradi sevanja nabojev. Te sile se imenujejo *sevalno dušenje* ali *sile Lorentzevega trenja*.

Skupaj z energijo sistem sevajočih nabojev izgublja tudi vrtilno količino. Upadanje vrtilne količine, $d\mathbf{M}/dt$, izračunamo s pomočjo izraza za sile sevalnega dušenja. Časovni odvod vrtilne količine $\mathbf{M} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ je enak $\dot{\mathbf{M}} = \sum \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}$, ker je $\sum \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} = \sum m(\mathbf{v} \times \mathbf{v}) \equiv 0$. Časovni odvod gibalne količine delca nadomestimo z silo sevalnega dušenja (75.5), ki deluje na delec, in dobimo

$$\dot{\mathbf{M}} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \frac{2}{3c^3} \sum e\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{d}} = \frac{2}{3c^3} \mathbf{d} \times \ddot{\mathbf{d}}.$$

Zanima nas časovno povprečje upadanja vrtilne količine pri stacionarnem gibanju, podobno kot smo prej obravnavali časovno povprečje izgubljanja energije. Zapišemo

$$\mathbf{d} \times \ddot{\mathbf{d}} = \frac{d}{dt} (\mathbf{d} \times \dot{\mathbf{d}}) - \dot{\mathbf{d}} \times \dot{\mathbf{d}}.$$

Časovni odvod (prvi člen) ob računanju povprečja odpade. Tako končno dobimo naslednji izraz za povprečno upadanje vrtilne količine sistema, ki seva: †

$$\frac{d\overline{\mathbf{M}}}{dt} = -\frac{2}{3c^3} \overline{\mathbf{d} \times \ddot{\mathbf{d}}}. \quad (75.7)$$

Do sevalnega dušenja pride tudi, če se en sam delec giblje v zunanjem polju. Sila dušenja je enaka

$$\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}. \quad (75.8)$$

Kadar imamo en sam naboj, si lahko vedno izberemo takšen opazovalni sistem, da v njem naboj ob izbranem trenutku miruje. Če bi v takšnem opazovalnem sistemu izračunali višje člene v razvoju polja, ki ga ustvarja naboj, bi ugotovili, da ima polje naslednjo lastnost. Ko

*Če smo bolj natančni, gre tu za gibanje, ki bi bilo stacionarno, če ne bi bilo sevanja. Zaradi sevanja pa se gibanje počasi upočasnjuje.

†Rezultat je skladen z rezultatom (3) v drugi nalogi v § 72.

gre oddaljenost R od naboja do izbrane točke v polju proti nič, gredo vsi višji členi proti nič. To pomeni, da je v primeru enega naboja enačba (75.8) točen izraz za povratni učinek (reakcijo) sevanja v opazovalnem sistemu, v katerem naboj miruje.

Vseeno pa ne smemo pozabiti, da je opis delovanja naboja “samega nase” preko sile sevalnega dušenja v splošnem neustrezen in vsebuje protislovja. Gibalna enačba naboja (v odsotnosti zunanje polja), na katerega deluje le sila (75.8), je

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}.$$

Ta enačba ima poleg trivialne rešitve $\mathbf{v} = \text{konst}$ tudi rešitev, pri kateri je pospešek $\dot{\mathbf{v}}$ sorazmeren z $\exp(3mc^3t/2e^2)$, kar pomeni, da s časom narašča preko vseh mej. To na primer pomeni, da bi bil naboj, ki bi preletel poljubno polje, neskončno “samo-pospešen”. Nesmiselnost takšnega rezultata je dokaz, da je veljavnost enačbe (75.8) omejena.

Zastavlja se vprašanje, kako teorija elektrodinamike, v kateri je zakon o ohranitvi energije vedno izpolnjen, vodi k nesmiselnemu rezultatu, da lahko energija prostega naboja narašča proti neskončnosti. Izvor te težave je razviden že v prejšnjih opazkah (§ 37) o neskončni elektromagnetni “lastni masi” osnovnih delcev. Ko v gibalni enačbi delcu dodelimo končno maso, smo s tem pravzaprav delcu formalno pripisali neskončno negativno “lastno maso”, ki nima elektromagnetnega izvora, ki nam skupaj z elektromagnetno maso da končno maso delca. Ker pa odštevanje ene neskončne količine od druge neskončne količine ni povsem pravilen matematični postopek, to vodi še k številnim dodatnim težavam, med katerimi je tudi ta, ki smo jo opisali zgoraj.

V koordinatnem sistemu, v katerem je hitrost delca majhna, lahko gibalno enačbo s členom, ki opisuje sevalno dušenje, zapišemo kot

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H} + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\mathbf{v}}. \quad (75.9)$$

Iz predhodne razprave je razvidno, da ta enačba velja le tedaj, ko je sila dušenja majhna v primerjavi s silo, s katero na naboj deluje zunanje polje.

Razjasnimo sedaj fizikalni pomen tega pogoja. V opazovalnem sistemu, v katerem naboj ob izbranem trenutku miruje, je drugi odvod hitrosti enak (če zanemarimo silo dušenja)

$$\ddot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\dot{\mathbf{E}} + \frac{e}{mc}\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{H}.$$

V drugem členu na desni nadomestimo $\dot{\mathbf{v}}$ z $(e/m)\mathbf{E}$ (kar je približek istega reda), in dobimo

$$\ddot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\dot{\mathbf{E}} + \frac{e^2}{m^2c}\mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

Od tod sledi, da je sila sevalnega dušenja sestavljena iz dveh prispevkov:

$$\mathbf{f} = \frac{2e^3}{3mc^3}\dot{\mathbf{E}} + \frac{2e^4}{3m^2c^4}\mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (75.10)$$

Če je ω frekvenca gibanja, je $\dot{\mathbf{E}}$ sorazmeren z $\omega\mathbf{E}$, zato je prvi člen reda $(e^3\omega/mc^3)E$; drugi člen je reda $(e^4/m^2c^4)EH$. Zato lahko pogoj, da je sila dušenja majhna v primerjavi s silo polja eE , s katero zunanje polje deluje na naboj, zapišemo najprej s prvo neenačbo

$$\frac{e^2}{mc^3}\omega \ll 1,$$

kar lahko, če vpeljemo valovno dolžino $\lambda \sim c/\omega$, pretvorimo v

$$\lambda \gg \frac{e^2}{mc^2}. \quad (75.11)$$

Enačba (75.8) za sevalno dušenje velja le, če je valovna dolžina sevanja, ki vpada na delec, velika v primerjavi s “polmerom” naboja e^2/mc^2 . Ponovno ugotovimo, da je razdalja velikostnega reda e^2/mc^2 meja, pod katero elektrodinamika vodi k notranjim protislovjem (glej § 37).

Če primerjamo drugi prispevek k sili dušenja s silo eE , dobimo drugi pogoj

$$H \ll \frac{m^2 c^4}{e^3}. \quad (75.12)$$

Potrební pogoj je torej tudi ta, da polje ni premočno. Tudi polje velikostnega reda $m^2 c^4/e^3$ je meja, nad katero vodi klasična elektrodinamika k protislovjem. Zavedati pa se moramo, da je v resnici meja, nad katero elektrodinamika ne velja več, še veliko nižja zaradi kvantnih učinkov. *

Da bi se izognili nesporazumom, naj bralca opomnimo, da se valovna dolžina (75.11) in jakost polja v (75.12) nanašata na opazovalni sistem, v katerem delec miruje ob izbranem trenutku.

NALOGA

NALOGA Izračunaj, v kolikšnem času “padeta eden proti drugemu” dva naboja, ki se privlačita in se gibljeta po eliptičnemu tiru (s hitrostjo, ki je majhna v primerjavi s svetlobno), ter izgubljata energijo s sevanjem.

Rešitev: Če predpostavimo, da je relativna izguba energije v času enega obhoda majhna, lahko časovni odvod energije energije izenačimo s povprečno jakostjo sevanja (ki smo jo izračunali v prvi nalogi v § 70):

$$\frac{d|\mathcal{E}|}{dt} = \frac{(2|\mathcal{E}|)^{3/2} \mu^{5/2} \alpha^3}{3c^3 M^5} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \left(3 - \frac{2|\mathcal{E}|M^2}{\mu\alpha^2} \right), \quad (1)$$

kjer je $\alpha = |e_1 e_2|$. Poleg energije delca izgubljata tudi vrtilno količino. Količina vrtilne količine, ki se izgubi na enoto časa, je podana z (75.7); vanjo vstavimo $\mathbf{d}$ iz izraza (70.1), upoštevamo, da je $\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\alpha \mathbf{r}/r^3$ in $\mathbf{M} = \mu \mathbf{r} \times \mathbf{v}$, in dobimo

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\frac{2\alpha}{3c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{\mathbf{M}}{r^3}.$$

Izračunamo povprečje tega izraza po periodi gibanja. Ker se $\mathbf{M}$ spreminja počasi, zadostuje, da na desni strani enačbe izračunamo povprečno vrednost od r^{-3} ; izračunamo jo na povsem enak način, kot smo računali povprečje r^{-4} v prvi nalogi v § 70. Kot rezultat dobimo naslednji izraz za povprečno spremembo vrtilne količine na enoto časa:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{2\alpha(2\mu|\mathcal{E}|)^{3/2}}{3c^3 M^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \quad (2)$$

*Mejna vrednost jakosti polja je $m^2 c^3/\hbar e$, ko velja $\hbar\omega_H \sim mc^2$. Ta limita je $\hbar c/e^2 = 137$ krat manjša od mejne vrednosti iz pogoja (75.12). Razmerje med temi razdaljami in R_0 je reda $\hbar c/e^2 \sim 137$.

[podobno kot v enačbi (1) tudi tu opuščamo pisanje znaka za povprečno vrednost]. Enačbo (1) delimo z (2) in dobimo diferencialno enačbo

$$\frac{d|\mathcal{E}|}{dM} = -\frac{\mu\alpha^2}{2M^3} \left(3 - 2\frac{|\mathcal{E}|M^2}{\mu\alpha^2} \right),$$

od koder po integraciji dobimo

$$|\mathcal{E}| = \frac{mu\alpha^2}{2M^2} \left(1 - \frac{M^3}{M_0^3} \right) + \frac{|\mathcal{E}_0|}{M_0} M. \quad (3)$$

Integracijska konstanta je izbrana tako, da za $M = M_0$ velja $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$, kjer sta M_0 in $\mathcal{E}_0$ začetna vrtilna količina in začetna energija.

“Padanje” enega delca proti drugemu ustreza limiti $M \rightarrow 0$. Iz (3) razberemo, da gre pri tem $\mathcal{E} \rightarrow -\infty$.

Opazimo lahko, da gre zmnožek $|\mathcal{E}|M^2$ proti $\mu\alpha^2/2$, iz enačbe (70.3) pa je razvidno, da gre ekscentričnost ϵ proti nič. To pomeni, da ko se delca približujeta eden proti drugemu, tiru postaja vedno bolj podoben krožnici. Izraz (3) vstavimo v (2) in izračunamo odvod dt/dM , izražen z M , od tod pa z integracijo po M od M_0 do 0 dobimo čas padanja:

$$t_{\text{padec}} = \frac{c^3 M_0^5}{\alpha \sqrt{2|\mathcal{E}_0|} \mu^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^{-2} (\sqrt{\mu\alpha^2} + \sqrt{2M_0^2 |\mathcal{E}_0|})^{-2}.$$

§76 Sevalno dušenje v relativističnem primeru

Izpeljali bomo relativistični izraz za sevalno dušenje (za en sam naboj), ki bo veljal tudi pri hitrostih, ki so primerljive s svetlobno. Ta sila bo sedaj vektor četverec g^i , ki ga moramo prišteti k gibalni enačbi za naboj. Ta se v štiridimenzionalnem zapisu sedaj glasi

$$mc \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k + g^i. \quad (76.1)$$

Ko je $v \ll c$, morajo prostorske komponente biti enake komponentam vektorja $\mathbf{f}/c$ (75.8). Hitro se lahko prepričamo, da ima vektor $(2e^2/3c)(d^2u/ds^2)$ to lastnosti. Ni pa izpolnjen pogoj $g^i u_i = 0$, ki mora veljati za vsak četverec sile. Da bo ta pogoj izpolnjen, moramo k izrazu prišteti pomožni četverec, sestavljen iz četverca hitrosti u^i in njegovih odvodov. Prostorske komponente pomožnega četverca morajo biti enake nič v limiti $\mathbf{v} = 0$, tako da se ne bodo spremenile pravilne vrednosti vektorja $\mathbf{f}$, ki so že podane z $(2e^2/3c)(d^2u/ds^2)$. Četverec u^i ta pogoj izpolnjuje, zato mora biti dodatni člen oblike αu^i . Skalar α si moramo izbrati tako, da bi izpolnjen pogoj $g^i u_i = 0$. Tako dobimo

$$g^i = \frac{2e^2}{3c} \left(\frac{d^2 u^i}{ds^2} - u^i u^k \frac{d^2 u_k}{ds^2} \right). \quad (76.2)$$

S pomočjo gibalne enačbe lahko ta izraz zapišemo v drugačni obliki, če odvod $d^2 u^i/ds^2$ zapišemo neposredno s tenzorjem zunanega polja, ki deluje na delec:

$$\begin{aligned} \frac{du^i}{ds} &= \frac{e}{mc^2} F^{ik} u_k, \\ \frac{d^2 u^i}{ds^2} &= \frac{e}{mc^2} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l} u_k u^l + \frac{e^2}{m^2 c^4} F^{ik} F_{kl} u^l. \end{aligned}$$

Ko to vstavljamo v izraz za g^i , moramo upoštevati, da je zmnožek tenzorja $\partial F^{ik}/\partial x^l$, ki je antisimetričen v indeksih i in k , s simetričnim tenzorjem $u_i u_k$, identično enak nič. Dobimo torej

$$g^i = \frac{2e^3}{3mc^3} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l} u_k u^l - \frac{2e^4}{3m^2 c^5} F^{il} F_{kl} u^k + \frac{2e^4}{3m^2 c^5} (F_{kl} u^l) (F^{km} u_m) u^i. \quad (76.3)$$

Integral četverca sile g^i po svetovnici delca, ki potuje v danem polju, mora biti enak (do predznaka natančno) četvercu celotne energije in gibalne količine ΔP^i , ki ju je izseval delec [tako kot je povprečna vrednost sile $\mathbf{f}$ v nerelativističnem primeru enaka jakosti dipolnega sevanja; glej (75.6)]. Hitro se lahko prepričamo, da je to res. Prvi člen v (76.1) ob integraciji odpade, ker v neskončnosti delec ni pospešen, torej $(du^i/ds) = 0$. Drugi člen integriramo po delih

$$- \int g^i ds = \frac{2e^2}{3c} \int u^k u^i \frac{d^2 u_k}{ds^2} ds = - \frac{2e^2}{3c} \int \frac{du_k}{ds} \frac{du^k}{ds} dx^i,$$

kar je povsem enako izrazu (73.4).

Ko je hitrost delca blizu svetlobne hitrosti, so največje tiste prostorske komponente četverca (76.2), v katerih se pojavljajo produkti treh komponent četverca hitrosti. Zato ohranimo le te člene iz (76.2) in uporabimo povezavo (9.18) med prostorskimi komponentami četverca g^i in tridimenzionalnim vektorjem sile $\mathbf{f}$. Za vektor slike tako dobimo naslednji izraz:

$$\mathbf{f} = \frac{2e^4}{3m^2 c^5} (F_{kl} u^l) (F^{km} u_m) \mathbf{n},$$

kjer je $\mathbf{n}$ enotski vektor v smeri hitrosti $\mathbf{v}$. To pomeni, da v tem primeru sila $\mathbf{f}$ kaže v nasprotni smeri od hitrosti delca; če delec potuje v smeri osi X , potem lahko zgornjo enačbo razpišemo in dobimo izraz

$$f_x = - \frac{2e^4}{3m^2 c^4} \frac{(E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (76.4)$$

(v izrazu smo postavili $v = c$ povsod, razen v imenovalcu).

Vidimo, da je sevalno dušenje ultrarelativističnega delca sorazmerno s kvadratom njegove energije.

Opišimo še naslednji zanimiv pojav. Predhodno smo pokazali, da je izraz za sevalno dušenje veljaven le za polja, ki so (v opazovalnem sistemu K_0 , v katerem delec miruje) majhna v primerjavi z $m^2 c^4 / e^3$. Naj bo F velikostni red zunanega polja v opazovalnem sistemu K , v katerem se delec giblje s hitrostjo v . V opazovalnem sistemu K_0 je velikostni red polja $F / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ (v skladu z enačbami za pretvorbo iz § 24). Zato mora F zadovoljiti pogoj

$$\frac{e^3 F}{m^2 c^4 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \ll 1. \quad (76.5)$$

Razmerje med silo dušenja (76.3) in zunanjo silo ($\sim eF$) je velikostnega reda

$$\frac{e^3 F}{m^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)},$$

kar pomeni, da je lahko navkljub izpolnjenemu pogoju (76.5) pri zadosti visoki energiji delca sila dušenja velika v primerjavi z običajno Lorentzevo silo, ki deluje na delec v elektromag-

netnem polju. * Zato je lahko pri ultrarelativističnem delcu sevalno dušenje največja sila, ki na delec deluje.

V tem primeru je izgubljanje (kinetične) energije delca na enoto dolžine njegove poti kar enako sili dušenja f_x ; ker je ta sorazmerna s kvadratom energije delca, lahko zapišemo

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{kin}}}{dx} = -k(x)\mathcal{E}_{\text{kin}}^2,$$

kjer z $k(x)$ označimo od koordinate x odvisni koeficient, ki ga lahko zapišemo s prečnimi komponentami polja kot v enačbi (76.3). Integral te enačbe je

$$\frac{1}{\mathcal{E}_{\text{kin}}} = \frac{1}{\mathcal{E}_0} + \int_{-\infty}^x k(x) dx,$$

kjer je $\mathcal{E}_0$ začetna energija delca (torej njegova energija za $x \rightarrow -\infty$). Končna energija delca $\mathcal{E}_1$ po njegovem prehodu skozi polje, je podana z

$$\frac{1}{\mathcal{E}_1} = \frac{1}{\mathcal{E}_0} + \int_{-\infty}^{+\infty} k(x) dx.$$

Vidimo, da gre v limiti $\mathcal{E}_0 \rightarrow \infty$ končna energija $\mathcal{E}_1$ proti konstantni limiti, ki ni odvisna od $\mathcal{E}_0$ (I. Pomerančuk, 1939). Z drugimi besedami, po preletu polja energija delca ne mora biti večja od energije $\mathcal{E}_{\text{crit}}$, definirane z enačbo

$$\frac{1}{\mathcal{E}_{\text{crit}}} = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x) dx.$$

Če vstavimo izraz za $k(x)$, lahko to zapišemo kot

$$\mathcal{E}_{\text{crit}}^{-1} = \frac{2}{3m^2c^4} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} [(E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2] dx. \quad (76.6)$$

NALOGE

NALOGA 1. Izračunaj največjo energijo, ki jo lahko ima delec, ko prepotuje polje magnetnega dipola $\mathbf{m}$; vektor $\mathbf{m}$ in smer gibanja naj ležita v isti ravnini.

Rešitev: Ravnino, v kateri leži vektor $\mathbf{m}$ in smer gibanja, si izberimo za ravnino XZ tako, da se delec giblje vzporedno z osjo X in da je od osi oddaljen za ρ . Prečni komponenti polja magnetnega dipola sta [glej (44.3)]:

$$H_y = 0, \\ H_z = \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})_z - m_z r^2}{r^2} = \frac{m}{(\rho^2 + x^2)^{5/2}} (3(\rho \cos \phi + x \sin \phi)\rho - (\rho^2 + x^2) \cos \phi)$$

*Poudariti moramo, da ta rezultat ni v navzkrižju z našo izpeljavo relativističnega izraza za četverec sile g^i , v kateri smo privzeli, da je sila dušenja "majhna" v primerjavi s četvercem sile $(e/c)F^{ik}u_k$. Zadostuje namreč, da so komponente prvega četverca majhne v primerjavi s komponentami drugega v enem opazovalnem sistemu; zaradi relativistične invariantnosti so štiridimenzionalne enačbe, dobljene ob tej predpostavki, veljavne tudi v vseh drugih opazovalnih sistemih.

(ϕ je kot med $\mathbf{m}$ in osjo Z). To vstavimo v (76.6) in izračunamo integral. Dobimo

$$\frac{1}{\mathcal{E}_{\text{crit}}} = \frac{\mathbf{m}^2 \pi}{64 m^2 c^4 \rho^5} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (15 + 25 \cos^2 \phi).$$

NALOGA 2. Zapiši tridimenzionalni izraz za silo upora v relativističnem primeru.

Rešitev: Če izračunamo prostorske komponente četverca (76.2), dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = & \frac{2e^3}{3mc^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{H} \right] + \\ & + \frac{2e^4}{3m^2 c^4} \left[\mathbf{E} \times \mathbf{H} + \frac{1}{c} \mathbf{H} \times (\mathbf{H} \times \mathbf{v}) + \frac{1}{c} \mathbf{E} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \right] - \\ & - \frac{2e^4}{3m^2 c^5 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} \mathbf{v} \left[\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right)^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})^2 \right]. \end{aligned}$$

§77 Spektralni razcep sevanja v ultrarelativističnem primeru

V § 73 smo pokazali, da ultrarelativistični delec seva predvsem naprej, v smeri svoje hitrosti: večino sevanja dobimo v notranjosti ozkega pasu kotov

$$\Delta\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

okoli smeri vektorja $\mathbf{v}$.

Pri obravnavi spektralnega razcepa sevanja je ključnega pomena povezava med velikostjo pasu kotov $\Delta\theta$ in kotom odklona delca α ob njegovem letu skozi elektromagnetno polje.

Kot α lahko določimo po naslednji poti. Sprememba prečne (glede na smer gibanja) gibalne količine delca je velikostnega reda zmnožka prečne sile eF * in trajanja preleta skozi polje, $t \sim a/v \approx a/c$, kjer je a velikost območja, na katerem je polje občutno večje od 0). Razmerje med to količino in gibalno količino

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx \frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

določa velikostni red majhnega kota α :

$$\alpha \sim \frac{eFa}{mc^2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

To delimo z $\Delta\theta$, pa dobimo

$$\frac{\alpha}{\Delta\theta} \sim \frac{eFa}{mc^2}. \quad (77.1)$$

*Če si izberemo os X v smeri gibanja delca, tedaj je $(eF)^2$ vsota kvadratov komponent Y in Z Lorentzeve sile $e\mathbf{E} + e\mathbf{v}/c \times \mathbf{H}$, v kateri lahko postavimo $v \approx c$:

$$F^2 = (E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2.$$

Poudarimo naj, da to razmerje ni odvisno od hitrosti delca, in da je povsem določeno z lastnostmi zunanjega polja samega.

Najprej predpostavimo, da velja

$$eFa \ll mc^2, \quad (77.2)$$

kar pomeni, da je odklon delca veliko večji od $\Delta\theta$. V tem primeru lahko rečemo, da dobimo sevanje v neki smeri le iz tistega dela trajektorije, kjer je hitrost delca skoraj vzporedna s to smerjo (pod kotom največ $\Delta\theta$). Dolžina tega dela je kratka v primerjavi z a . Polje F lahko na tem odseku smatramo kot konstantno in ker lahko kratek odsek poljubne krivulje vedno smatramo kot kratek krožni lok, veljajo rezultati za sevanje med enakomernim gibanjem po krogu iz § 74, če H nadomestimo z F . Trdimo lahko na primer, da je glavnina sevanja zbrana na frekvenčnem območju blizu

$$\omega \sim \frac{eF}{mc \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \quad (77.3)$$

[glej (74.16)].

V nasprotnem primeru, ko velja

$$eFa \ll mc^2, \quad (77.4)$$

je kot odklona delca iz prvotne smeri majhen v primerjavi z $\Delta\theta$. V tem primeru delec seva predvsem v ozko kotno območje $\Delta\theta$ okoli smeri gibanja, v izbrano točko pa pride valovanje, ki je bilo izsevano vzdolž celotne poti.

Spektralno porazdelitev jakosti izračunamo s pomočjo Lienard-Wiechertovih izrazov (73.8) za polje v valovnem območju. Določimo Fourierovo komponento

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E} e^{i\omega t} dt.$$

Izraz na desni strani enačbe (73.8) je odvisen od zakasnjene časa t' , ki je določen s pogojem $t' = t - R(t')/c$. Pri veliki oddaljenosti od delca, ki potuje s skoraj konstantno hitrostjo $\mathbf{v}$, dobimo

$$t' \approx t - \frac{R_0}{c} + \frac{1}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t') \approx t - \frac{R_0}{c} + \frac{1}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} t'$$

($\mathbf{r} = \mathbf{r}(t')$ $\approx \mathbf{v} t'$ je krajevni vektor delca), oziroma

$$t = t' \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}\right) + \frac{R_0}{c}.$$

Integracijo po t nadomestimo z integracijo po t' , pri čemer uporabimo

$$dt = dt' \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}\right).$$

Tako dobimo

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{e}{c^2} \frac{e^{ikR_0}}{R_0 \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{n} \times \left\{ \left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \mathbf{w}(t') \right\} e^{i\omega t' \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)} dt'. \quad (77.5)$$

Hitrost $\mathbf{v}$ smatramo za konstantno; le pospešek $\mathbf{w}(t')$ se spreminja s časom. Vpeljemo zapis

$$\omega' = \omega \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c}\right), \quad (77.6)$$

ustrezno frekvenčno komponento pospeška pa označimo z $\mathbf{w}_{\omega'}$. Tako lahko $\mathbf{E}_{\omega}$ zapišemo kot

$$\mathbf{E}_{\omega} = \frac{e}{c^2} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \left(\frac{\omega}{\omega'} \right)^2 \mathbf{n} \times \left\{ \left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \mathbf{w}_{\omega'} \right\}.$$

Z uporabo enačbe (66.9) končno dobimo energijo na frekvenčnem intervalu $d\omega$, izsevano v prostorski kot $d\Omega$:

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{e^2}{2\pi c^3} \left(\frac{\omega}{\omega'} \right)^4 \left| \mathbf{n} \times \left\{ \left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \mathbf{w}_{\omega'} \right\} \right|^2 d\Omega \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (77.7)$$

Velikostni red frekvenc, pri katerih je sevanje najbolj izdatno, lahko v primeru (77.4) najlažje ocenimo, če upoštevamo, da se Fourierova komponenta $\mathbf{w}_{\omega'}$ od nič občutno razlikuje, če je čas $1/\omega'$ oziroma

$$\frac{1}{\omega \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}$$

istega velikostnega reda kot čas $a/v \sim a/c$, v katerem se pospešek delca močno spremeni. Tako dobimo

$$\omega \sim \frac{c}{a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}. \quad (77.8)$$

Energijska odvisnost frekvence je enaka kot v (77.3), le da je koeficient drugačen.

Pri obravnavi obeh primerov (77.2) in (77.4) smo predpostavili, da je energija, ki jo delec izgubi med potovanjem skozi polje, razmeroma majhna. Sedaj bomo pokazali, da prvi primer pokriva tudi sevanje ultrarelativističnega delca, ki izgubi izdaten del svoje začetne energije.

Energijo, ki jo delec izgubi v polju lahko ocenimo iz dela Lorentzeve sile trenja. Sila (76.3) na poti $\sim a$ opravi delo, ki je velikostnega reda

$$af \sim \frac{e^4 F^2 a}{m^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}.$$

To je primerljivo s celotno energijo delca,

$$mc^2 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

če se polje razteza na razdalji

$$a \sim \frac{m^3 c^6}{e^4 F^2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (77.9)$$

Pogoj (77.2) je tedaj samodejno zadoščen:

$$aeF \sim \frac{m^3 c^6}{e^3 F} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \gg mc^2,$$

ker mora polje F nujno zadostiti pogoju (76.5)

$$\frac{F}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \ll \frac{m^2 c^4}{e^3},$$

sicer običajne elektrodinamike sploh ne bi mogli uporabiti.

NALOGE

NALOGA 1. Določi spektralno porazdelitev celotne (po vseh smereh) jakosti svetlobe, če velja pogoj (77.2).

Rešitev: Na vsakem diferencialno kratkem odseku tira je sevanje določeno z (74.13), pri čemer moramo H nadomestiti s prečno silo F v izbrani točki, poleg tega pa se moramo še preseliti iz diskretne v zvezni frekvenčni spekter. To pretvorbo opravimo tako, da formalno pomnožimo z dn in uporabimo zamenjavo

$$I_n dn = I_n \frac{dn}{d\omega} d\omega = I_n \frac{d\omega}{\omega_0}.$$

Nato integriramo po času in dobimo spektralno porazdelitev celotnega sevanja v naslednji obliki:

$$d\mathcal{E}_\omega = -d\omega \frac{2e^2\omega}{\sqrt{\pi}c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{u} \Phi'(u) + \frac{1}{2} \int_u^\infty \Phi(u) du \right] dt,$$

kjer je $\Phi(u)$ Airyjeva funkcija z argumentov

$$u = \left[\frac{mc\omega}{eF} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \right]^{2/3}.$$

Integrand je implicitno odvisen od integracijske spremenljivke t preko količine u (F , skupaj z njim pa u , se spreminja vzdolž poti delca; pri danem gibanju lahko to spreminjanje smatramo kot časovno odvisnost).

NALOGA 2. Določi spektralno porazdelitev celotne (po vseh smereh) jakosti svetlobe, če velja pogoj (77.4).

Rešitev: Upoštevamo, da ima v tem primeru glavno vlogo sevanje pri majhnih kotih glede na smer gibanja, in zapišemo

$$\omega' = \omega \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right) \approx \omega \left(1 - \frac{v}{c} + \frac{\theta^2}{2}\right) \approx \frac{\omega}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \theta^2\right).$$

Integracijo po kotih $d\omega = \sin \theta d\theta d\phi \approx \theta d\theta d\phi$ v (77.7) nadomestimo z integracijo po $d\phi d\omega'/\omega$. Ko razpisujemo kvadrat mešanega produkta v (77.7), moramo upoštevati, da je v ultrarelativističnem primeru vzdolžna komponenta pospeška majhna v primerjavi s prečno komponento [z razmerjem $1 - (v^2/c^2)$], in da lahko tudi z visoko natančnostjo smatramo $\mathbf{w}$ in $\mathbf{v}$ kot medsebojno pravokotna. Tako dobimo za spektralno porazdelitev celotnega sevanja naslednji izraz:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{e^2\omega d\omega}{2\pi c^3} \int_{\frac{\pi}{2}(1-\frac{v^2}{c^2})}^\infty \frac{|\mathbf{w}_{\omega'}|^2}{\omega'^2} \left[1 - \frac{\omega}{\omega'} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{\omega^2}{2\omega'^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2 \right] d\omega'.$$

§78 Sipanje na prostih nabojih

Če na sistem nabojev pada elektromagnetno valovanje, bo polje povzročilo gibanje nabojev. To gibanje nato povzroči sevanje v vseh smereh; rečemo, da se začetno valovanje *sipa* na nabojih.

Sipanje najlažje opišemo z razmerjem med količino energije, ki jo odda sipalni sistem v izbrano smer v prostoru na enoto časa, in gostoto energijskega pretoka vpadnega valovanja. To razmerje ima očitno dimenzije ploščine, zato ga imenujemo *efektivni sipalni presek* (angl. *effective scattering cross-section*) ali kar *presek*.

Naj bo dI energija, ki jo sistem izseva v prostorski kot do na enoto časa, in naj ima vpadno valovanje Poyntingov vektor $\mathbf{S}$. Tedaj lahko efektivni presek za sipanje (v prostorski kot do) zapišemo z

$$d\sigma = \frac{\overline{dI}}{\overline{S}} \quad (78.1)$$

(črti nad simboloma označujeta časovno povprečje). Integral σ količine $d\sigma$ po vseh smereh se imenuje *skupni* sipalni presek.

Oglejmo si sipanje, ki ga povzroča mirujoči prosti naboj. Na naboj naj vpada ravno monokromatsko linearno polarizirano valovanje. Njegovo električno polje lahko zapišemo kot

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha).$$

Predpostavili bomo, da je hitrost, ki jo dobi delec zaradi vpliva vpadnega valovanja, majhna v primerjavi s svetlobno hitrostjo (to velja v večini primerov). Tedaj je sila, ki deluje na naboj, enaka $e\mathbf{E}$, silo $(e/c)\mathbf{v} \times \mathbf{H}$ zaradi magnetnega polja pa lahko zanemarimo. V tem primeru lahko zanemarimo tudi učinek odmika delca, ko ta niha v polju. Če naboj niha okoli izhodišča koordinatnega sistema, lahko v tem primeru predpostavimo, da je polje, ki deluje na delec, ves čas enako polju v izhodišču, torej

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \alpha). \quad (78.2)$$

Ker je gibalna enačba naboja enaka

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E},$$

njegov dipolni moment pa $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$, velja

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{e^2}{m}\mathbf{E}. \quad (78.3)$$

Sipano sevanje bomo izračunali z enačbo za dipolno sevanje (67.7) (uporaba te enačbe je utemeljena, saj smo predpostavili, da je hitrost delca majhna). Opozorimo naj, da je frekvenca izsevanega (sipanega) valovanja enaka frekvenci vpadnega valovanja.

Izraz (78.3) vstavimo v (67.7) in dobimo

$$dI = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3} (\mathbf{E} \times \mathbf{n}')^2 do,$$

kjer je $\mathbf{n}'$ enotski vektor v smeri sipanja. Poyntingov vektor vpadnega valovanja pa je

$$S = \frac{c}{4\pi} E^2. \quad (78.4)$$

Od tod dobimo sipalni presek za sipanje v prostorski kot do :

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta do, \quad (78.5)$$

kjer je θ kot med smerjo sipanja (vektorjem $\mathbf{n}'$) in smerjo električnega polja $\mathbf{E}$ vpadnega valovanja. Vidimo, da efektivni sipalni presek prostega naboja ni odvisen od frekvence.

Določimo še skupni sipalni presek σ . Polarno os si izberemo v smeri vektorja $\mathbf{E}$. Tedaj je $d\sigma = \sin\theta d\theta d\phi$; to vstavimo v izraz za $d\sigma$ in integriramo po θ od 0 do π in po ϕ od 0 do 2π . Dobimo *Thomsonovo formulo*

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2. \quad (78.6)$$

Končno izračunajmo diferencialni sipalni presek $d\sigma$ v primeru, ko vpadno valovanje ni polarizirano (navadna svetloba). Izračunati moramo povprečje enačbe (78.5) po vseh smereh vektorja $\mathbf{E}$ v ravnini, pravokotni na smer širjenja vpadnega valovanja (smer valovnega vektorja $\mathbf{k}$). Z $\mathbf{e}$ označimo enotski vektor, ki kaže v smeri vektorja $\mathbf{E}$. Zapišemo lahko

$$\overline{\sin^2\theta} = 1 - \overline{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e})^2} = 1 - n_\alpha n_\beta \overline{e_\alpha e_\beta}.$$

Pri računanju povprečja si pomagamo z enačbo *

$$\overline{e_\alpha e_\beta} = \frac{1}{2} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right), \quad (78.7)$$

in dobimo

$$\overline{\sin^2\theta} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})^2}{k^2} \right) = \frac{1}{2} (1 + \cos^2\Theta),$$

kjer je Θ kot med smerjo vpadnega in sipanega valovanja (sipalni kot). Efektivni sipalni presek za sipanje nepolariziranega valovanja na prostem naboju je

$$d\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2\Theta) d\Omega. \quad (78.8)$$

Zaradi sipanja deluje na delec neka sila. V to se lahko prepričamo z naslednjim premislekom. Valovanje, ki pada na delec, izgubi povprečno $c\overline{W}\sigma$ energije na enoto časa, kjer je $\overline{W}$ povprečna gostota energije, σ pa skupni sipalni presek. Ker je gibalna količina polja enaka energiji polja, deljeni s svetlobno hitrostjo, vpadno valovanje na enoto časa izgubi $\overline{W}\sigma$ gibalne količine. Po drugi strani je v opazovalnem sistemu, v katerem naboj niha pod vplivom sile $e\mathbf{E}$, in v katerem je hitrost naboja v majhna, skupni pretok gibalne količine sipanega valovanja enak nič do členov višjega reda po v/c natančno (v § 73 smo videli, da v opazovalnem sistemu, v katerem je $v = 0$, delec ne seva gibalne količine). To pomeni, da naboj “absorbira” vso gibalno količino, ki jo izgubi vpadno valovanje. Povprečna sila $\overline{\mathbf{f}}$, ki deluje na delec, je enaka povprečju gibalne količine, ki se absorbira na enoto časa, torej

$$\overline{\mathbf{f}} = \sigma \overline{W} \mathbf{n}_0 \quad (78.9)$$

($\mathbf{n}_0$ je enotski vektor v smeri vpadnega valovanja). Poudarimo naj, da je ta povprečna sila količina drugega reda po jakosti polja vpadnega valovanja, medtem ko je “trenutna” sila (katere glavni del je $e\mathbf{E}$) količina prvega reda.

Enačbo (78.9) lahko dobimo tudi tako, da izračunamo povprečno silo dušenja (75.10). Prvi člen, ki je sorazmeren z $\mathbf{E}$, ob računanju povprečja odpade, tako kot povprečje glavnega dela sila, $e\mathbf{E}$. Drugi člen nam da

$$\overline{\mathbf{f}} = \frac{2e^4}{3m^2c^4} \overline{E^2} \mathbf{n}_0 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\overline{E^2}}{4\pi} \mathbf{n}_0,$$

*Tensor $e_\alpha e_\beta$ je simetričen in ima sled 1. Če ga pomnožimo z k_α , dobimo nič, ker sta $\mathbf{e}$ in $\mathbf{k}$ med seboj pravokotna. Zapisani izraz to lastnost ima.

kar je, če upoštevamo enačbo (78.6), enako izrazu (78.9).

NALOGE

NALOGA 1. Izračunaj efektivni sipalni presek za sipanje eliptično polarizirane svetlobe na prostem naboju.

Rešitev: Polje valovanja lahko zapišemo kot $\mathbf{E} = \mathbf{A} \cos(\omega t + \alpha) + \mathbf{B} \sin(\omega t + \alpha)$, kjer sta $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$ med seboj pravokotna vektorja (glej § 48). Podobno kot prej izpeljemo naslednji izraz za presek:

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{(\mathbf{A} \times \mathbf{n})^2 + (\mathbf{B} \times \mathbf{n})^2}{A^2 + B^2} d\Omega.$$

NALOGA 2. Izračunaj efektivni sipalni presek za sipanje linearno polariziranega valovanja na naboju, na katerega deluje elastična sila in ki lahko niha z majhno amplitudo (torej sipanje na nihalu).

Rešitev: Gibalna enačba naboja v vpadnem polju $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t + \alpha)$ je

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 \cos(\omega t + \alpha),$$

ker je ω_0 frekvenca prostega nihanja. Rešitev za vsiljeno nihanje je

$$\mathbf{r} = \frac{e \mathbf{E}_0 \cos(\omega t + \alpha)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Od tod izračunamo $\mathbf{d}$ in končno dobimo

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \sin^2 \theta d\Omega$$

(θ je kot med $\mathbf{E}$ in $\mathbf{n}'$).

NALOGA 3. Izračunaj skupni efektivni presek za sipanje svetlobe na električnem dipolu, ki se mehansko obnaša kot rotator. Frekvenca valovanja naj bo veliko večja od frekvence Ω_0 prostega vrtenja rotatorja.

Rešitev: Zaradi pogoja $\omega \gg \Omega_0$ smemo zanemariti prosto vrtenje rotatorja. Zadostuje, da obravnavamo vsiljeno sukanje pod vplivom navora $\mathbf{d} \times \mathbf{E}$, s katerim na dipol deluje valovanje. Gibalna enačba se glasi $J\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{d} \times \mathbf{E}$, kjer je J vztrajnostni moment rotatorja, $\boldsymbol{\Omega}$ pa kotna hitrost vrtenja. Spreminjanje dipolnega momenta vektorja, ko se ta vrti, ne da bi se mu ob tem spreminjala absolutna vrednost, je podano z enačbo $\dot{\mathbf{d}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{d}$. Iz teh dveh enačb dobimo (če izpustimo člen, ki je kvadraten po majhni količini $\boldsymbol{\Omega}$)

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{1}{J} (\mathbf{d} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{d} = \frac{1}{J} [\mathbf{E} d^2 - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{d}].$$

Če predpostavimo, da so vse smeri dipola v prostoru enako verjetne, in če izračunamo povprečje po teh smereh, dobimo naslednji izraz za skupni efektivni presek:

$$\sigma = \frac{16\pi d^4}{9c^4 J^2}.$$

NALOGA 4. Določi stopnjo depolarizacije pri sipanju navadne svetlobe na prostem naboju.

Rešitev: Iz razmisleka o simetrijah je razvidno, da bosta obe nekoherentni polarizirani komponenti sipane svetlobe (glej § 50) linearno polarizirani: ena v ravnini sipanja (to je ravnina, v kateri ležita valovna vektorja vpadnega in sipanega valovanja), druga pa pravokotno nanjo. Jakosti komponent

določimo iz komponente polja sipanega valovanja v ravnini sipanja ($\mathbf{E}_{\parallel}$) in v pravokotni ravnini ($\mathbf{E}_{\perp}$). Po (78.5) sta ti sorazmerni z

$$(\mathbf{E}_{\parallel} \times \mathbf{n})^2 = E_{\parallel}^2 \cos^2 \Theta, \quad \text{in} \quad (\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{n})^2 = E_{\perp}^2$$

(kjer je Θ sipalni kot). Za navadno svetlobo velja $\overline{E_{\parallel}^2} = \overline{E_{\perp}^2}$. Stopnja depolarizacije [glej definicijo v (50.9)] je torej

$$\rho = \cos^2 \Theta.$$

NALOGA 5. Določi frekvenco ω' svetlobe, ki se je sipala na premikajočem se delcu.

Rešitev: V koordinatnem sistemu, v katerem delec miruje, se frekvenca svetlobe ob sipanju ne spremeni ($\omega = \omega'$). To lahko zapišemo v invariantni obliki kot

$$k'_i u'^i = k_i u^i,$$

kjer je u^i četverec hitrosti naboja. Od tod brez težave dobimo

$$\omega' \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta'\right) = \omega \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right),$$

kjer sta θ in θ' kota vpadnega oziroma sipanega valovanja glede na smer gibanja delca (v je hitrost naboja).

NALOGA 6. Določi kotno porazdelitev sipanja linearно polariziranega valovanja na naboj, ki se s hitrostjo v giblje v smeri širjenja valovanja.

Rešitev: Hitrost delca je pravokotna na polju $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ vpadnega valovanja, torej je pravokotna tudi na pospešek delca $\mathbf{w}$. Jakost sipane svetlobe je podana z (73.14), kjer moramo pospešek delca $\mathbf{w}$ izraziti s poljema $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ vpadnega valovanja z uporabo enačb, ki smo jih izpeljali v nalogi v § 17. Če delimo jakost dI z velikostjo Poyntingovega vektorja vpadnega valovanja, dobimo naslednji izraz za sipalni presek:

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{c} \sin \theta \cos \phi\right)^6} \left[\left(1 - \frac{v}{c} \sin \theta \cos \phi\right)^2 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cos^2 \theta \right] d\Omega,$$

kjer sta θ in ϕ polarni kot in azimut smeri $\mathbf{n}'$ v koordinatnem sistemu, v katerem kaže os Z v smeri polja $\mathbf{E}$ in os X v smeri $\mathbf{v}$ [velja $\cos(\mathbf{n}', \mathbf{E}) = \cos \theta$; $\cos(\mathbf{n}', \mathbf{v}) = \sin \theta \cos \phi$].

NALOGA 7. Kako se giblje naboj pod vplivom povprečne sile, s katero nanju deluje valovanje, ki se na naboju sipa?

Rešitev: Sila (78.9), in zato tudi hitrost omenjenega gibanja, kaže v smeri gibanja vpadnega valovanja (naj bo to os X). V pomožnem opazovalnem sistemu K_0 , v katerem delec miruje (spomnimo naj, da imamo opravka z gibanjem, ki je povprečeno po periodi majhnih nihanj), je sila na delec enaka σW_0 , pospešek delca zaradi te sile pa je

$$w_0 = \frac{\sigma}{m} \overline{W}_0$$

(indeks 0 se nanaša na opazovalni sistem K_0). V začetni opazovalni sistem K (v katerem se naboj giblje s hitrostjo v) se vrnemo z uporabo enačb, ki smo jih izpeljali v nalogi 7 iz z enačbo (47.7). Tako dobimo

$$\frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{dv}{dt} = \frac{\overline{W} \sigma}{m} \frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}.$$

Ta izraz integriramo in dobimo

$$\frac{\overline{W} \sigma}{mc} t = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \cdot \frac{2 - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} - \frac{2}{3}.$$

Ta izraz določa hitrost $v = dx/dt$ kot implicitno funkcijo časa. Integracijsko konstanto smo izbrali tako, da je $v = 0$ ob času $t = 0$.

NALOGA 8. Izračunaj efektivni sipalni presek za sipanje linearno polariziranega valovanja na nihalu, pri čemer je upoštevan učinek sevalnega dušenja.

Rešitev: Gibalno enačbo naboja v vpadnem polju zapišemo kot

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \frac{2e^2}{3mc^3} \ddot{\mathbf{r}}.$$

V členu za silo dušenja uporabimo približek $\ddot{\mathbf{r}} = -\omega_0^2 \mathbf{r}$. Dobimo

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma \dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t},$$

kjer je $\gamma = (2e^2/3mc^3)\omega_0^2$. Od tod dobimo

$$\mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}.$$

Efektivni sipalni presek je enak

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}.$$

§79 Sipanje nizkofrekvenčnega valovanja

Sipanje valovanja na sistemu nabojev je drugačno kot sipanje na enem samem (mirujočem) naboju, saj je zaradi notranjega gibanja sistema nabojev frekvenca sipanega sevanja lahko drugačna kot frekvenca vpadnega. V spektru sipanega valovanja imamo namreč lahko poleg frekvence ω vpadnega valovanja tudi frekvence ω' , ki se od ω razlikujejo za eno izmed notranjih frekvenc gibanja sipalnega sistema. Sipanje s spremenjeno frekvenco imenujemo *nekoherentno* (ali *kombinatorično*), za razliko od *koherentnega* sipanja brez spremembe frekvence.

Če predpostavimo, da je polje vpadnega valovanja šibko, lahko gostoto toka zapišemo kot $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}'$, kjer je $\mathbf{j}_0$ gostota toka v odsotnosti zunanega polja, $\mathbf{j}'$ pa sprememba gostote zaradi delovanja vpadnega valovanja. Tudi vektorski potencial $\mathbf{A}$ polja sistema je oblike $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}'$, kjer sta potenciala $\mathbf{A}_0$ in $\mathbf{A}'$ določena z gostotama $\mathbf{j}_0$ in $\mathbf{j}'$. Očitno $\mathbf{A}'$ opisuje valovanje, ki ga sistem sipa.

Oglejmo si sipanje valovanja s frekvenco ω , ki je manjša od vseh notranjih frekvenc sistema. Sipanje bo tako nekoherentno kot koherentno, vendar nas bo tu zanimal le koherentni del.

Pri računanju polja sipanega valovanja lahko pri zadosti nizkih frekvencah ω uporabimo razvoj zakasnjene potenciala, opisan v razdelkih § 67 in § 71, tudi če hitrosti delcev v sistemu niso majhne v primerjavi s svetlobno hitrostjo. Razvoj integrala

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}'_{t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{c}} dV$$

je namreč veljaven, če je čas $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}' \sim a/c$ majhen v primerjavi s časom $1/\omega$; pri zadosti nizkih frekvencah ($\omega \ll c/a$) je ta pogoj samodejno izpolnjen, ne glede na to, kakšne so hitrosti delcev v sistemu.

Prvi členi v razvoju nam dajo

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{c^2 R_0} \left\{ \ddot{\mathbf{d}}' + (\ddot{\mathbf{m}}' \times \mathbf{n}') \times \mathbf{n}' \right\},$$

kjer sta $\ddot{\mathbf{d}}'$ in $\ddot{\mathbf{m}}'$ tista prispevka k dipolnemu in magnetnemu momentu sistema, ki ju povzroči sevanje, ki vpada na sistem. Naslednji členi vsebujejo višje časovne odvode od drugega, zato jih zanemarimo.

Komponenta $\mathbf{H}'_\omega$ v spektralnem razcepu polja sipanega valovanja, ki ima enako frekvenco kot vpadno valovanje, je podana z isto enačbo, v katero moramo nadomestiti vse količine z njihovimi Fourierevimi komponentami: $\ddot{\mathbf{d}}' = -\omega^2 \mathbf{d}'_\omega$, $\ddot{\mathbf{m}}' = -\omega^2 \mathbf{m}'_\omega$. Tako dobimo

$$\mathbf{H}'_\omega = \frac{\omega^2}{c^2 R_0} \left\{ \mathbf{n}' \times \mathbf{d}'_\omega + \mathbf{n}' \times (\mathbf{m}'_\omega \times \mathbf{n}') \right\}. \quad (79.1)$$

Nadaljnji členi v razvoju polja bi dali količine, sorazmerne z višjimi potencami majhne frekvence. Če so hitrosti vseh delcev majhne ($v \ll c$), potem lahko v (79.1) zanemarimo drugi člen v primerjavi s prvim, saj magnetni moment vsebuje razmerje v/c . Tedaj je

$$\mathbf{H}'_\omega = \frac{1}{c^2 R_0} \omega^2 \mathbf{n}' \times \mathbf{d}'_\omega. \quad (79.2)$$

Če je skupni naboj sistema enak nič, potem gresta z $\omega \rightarrow 0$ količini $\mathbf{d}'_\omega$ in $\mathbf{m}'_\omega$ proti konstantni limiti (če bi bila vsota nabojev različna od nič, potem bi se pri $\omega = 0$, torej v konstantnem polju, sistem začel gibati kot celota). Zato lahko pri nizkih frekvencah ($\omega \ll v/a$) $\mathbf{d}'_\omega$ in $\mathbf{m}'_\omega$ smatramo kot frekvenčno neodvisni količini, zato je polje sipanega valovanja sorazmerno s kvadratom frekvence. Njegova jakost je tedaj sorazmerna z ω^4 . Zato je pri sipanju nizkofrekvenčnega valovanja efektivni sipalni presek za koherentno sipanje sorazmeren s četrto potenco vpadnega valovanja. *

§80 Sipanje visokofrekvenčnega valovanja

Oglejmo si sipanje valovanja na sistemu nabojev v nasprotni limiti, ko je frekvenca valovanja ω visoka v primerjavi z osnovnimi notranjimi frekvencami sistema. Te so velikostnega reda $\omega_0 \sim v/a$, zato mora ω zadostiti pogoju

$$\omega \gg \omega_0 \sim \frac{v}{a}. \quad (80.1)$$

Poleg tega bomo predpostavili še, da so hitrosti nabojev v sistemu majhne ($v \ll c$).

Zaradi pogoja (80.1) so periode gibanja nabojev v sistemu dolge v primerjavi s periodo valovanja. Zato smemo za čas velikostnega reda periode valovanja gibanje nabojev v sistemu smatrati kot enakomerno. To pomeni, da pri obravnavi sipanja kratkih valov ne rabimo upoštevati medsebojnih interakcij nabojev v sistemu, temveč smemo naboje smatrati kot proste delce.

Zato lahko pri računanju hitrosti $\mathbf{v}'$, ki jo naboj pridobi v polju vpadnega valovanja, vsak naboj obravnavamo neodvisno od ostalih in zanj zapišemo gibalno enačbo

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = e\mathbf{E} = e\mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})},$$

*To velja tudi za sipanje svetlobe na ionih ter na nevtralnih atomih. Zaradi velike mase jedra lahko sipanje zaradi gibanja iona kot celote zanemarimo.

kjer je $\mathbf{k} = (\omega/c)\mathbf{n}$ valovni vektor vpadnega valovanja. Krajevni vektor naboja je seveda časovno odvisna količina. V eksponentu na desni strani te enačbe je hitrost spreminjanja prvega člena veliko večja od drugega (prava hitrost je ω , druga pa je reda $kv \sim v(\omega/c) \ll \omega$). Zato smemo pri integraciji gibalne enačbe vektor $\mathbf{r}$ na desni strani smatrati kot konstanto. Tako dobimo

$$\mathbf{v}' = -\frac{e}{i\omega m}\mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (80.2)$$

Vektorski potencial sipanega valovanja (pri veliki oddaljenosti od sistema) je (79.1):

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{cR_0} \sum (e\mathbf{v}')_{t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}'}{c}},$$

kjer seštevamo po vseh nabojih v sistemu. V enačbo vstavimo (80.2), pa dobimo

$$\mathbf{A}' = -\frac{1}{icR_0\omega} e^{-i\omega\left(t - \frac{R_0}{c}\right)} \mathbf{E}_0 \sum \frac{e^2}{m} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}, \quad (80.3)$$

kjer je $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ razlika med valovnim vektorjem $\mathbf{k} = (\omega/c)\mathbf{n}$ vpadnega valovanja in valovnim vektorjem $\mathbf{k}' = (\omega'/c)\mathbf{n}'$ sipanega valovanja. * Vrednost vsote v (80.3) moramo izračunati ob času $t' = t - (R_0/c)$ (zaradi krajšega pisanja smo kot običajno izpustili indeks t' pri količini $\mathbf{r}$); spremembo vektorja $\mathbf{r}$ v času $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}'/c$ smemo zanemariti zaradi predpostavke, da so hitrosti nabojev majhne. Absolutna vrednost vektorja $\mathbf{q}$ je

$$q = 2\frac{\omega}{c} \sin \frac{\Theta}{2}, \quad (80.4)$$

kjer je Θ sipalni kot.

Pri sipanju na atomu (ali molekuli) smemo zanemariti člene v vsoti (80.3), ki jih prispeva jedro, saj so mase jeder velike v primerjavi z maso elektrona. Če upoštevamo le elektrone, lahko faktor e^2/m izpostavimo pred znak za seštevanje; e in m sta tu seveda naboj in masa elektrona.

Polje sipanega valovanja $\mathbf{H}'$ dobimo z uporabo enačbe (66.3):

$$\mathbf{H}' = \frac{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{n}'}{c^2 R_0} e^{-i\omega\left(t - \frac{R_0}{c}\right)} \frac{e^2}{m} \sum e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}. \quad (80.5)$$

Pretok energije skozi diferencialni prostorski kot v smeri $\mathbf{n}'$ je

$$\frac{c|\mathbf{H}'|^2}{8\pi} R_0^2 d\Omega = \frac{e^4}{8\pi c^3 m^2} (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}_0)^2 \left| \sum e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \right|^2 d\Omega.$$

To delimo s pretokom energije vpadnega valovanja, $c|\mathbf{E}_0|^2/8\pi$, in vpeljemo kot θ med smerjo polja vpadnega valovanja $\mathbf{E}$ in smerjo sipanja. Končno dobimo naslednji izraz za efektivni sipalni presek:

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \overline{\left| \sum e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \right|^2} \sin^2 \theta d\Omega. \quad (80.6)$$

Vodoravna črta označuje časovno povprečje, torej povprečje po trajektorijah delcev v sistemu; povprečje dobimo, ker sipanje opazujemo dolgo v primerjavi s periodami gibanja nabojev v sistemu.

*Strogo vzeto je valovni vektor $\mathbf{k}' = \omega'\mathbf{n}'/c$, ker se lahko frekvenca ω' sipanega valovanja razlikuje od ω . Ker pa imamo opravka z visokimi frekvencami, smemo tu razliko $\omega' - \omega \sim \omega_0$ zanemariti.

Iz pogoja (80.1) sledi neenačba $\lambda \ll ac/v$ za valovno dolžino vpadnega valovanja. Kar se tiče vrednosti λ in a samih, sta možna oba mejna primera: $\lambda \ll a$ in $\lambda \gg a$. V obeh primerih se splošna enačba (80.6) močno poenostavi.

Če je $\lambda \gg a$, v izrazu (80.6) velja $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} \ll 1$, ker je $q \sim 1/\lambda$ in $r \sim a$. Če torej $e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}$ nadomestimo z ena, dobimo

$$d\sigma = \left(\frac{Ze^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta \, d\Omega, \quad (80.7)$$

kar pomeni, da je sipanje sorazmerno s kvadratom atomskega števila Z .

Oglejmo si še primer, ko je $\lambda \ll a$. V kvadratu vsote v (80.6) nastopajo poleg kvadrata modula vsakega člena tudi križni členi oblike $e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}$.

Ko računamo povprečje po trajektorijah delcev, torej s tem tudi po medsebojnih razdaljah delcev, zavzamejo razlike $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ vrednosti na intervalu velikostnega reda a . Ker je $q \sim 1/\lambda$ in $\lambda \ll a$, je $e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}$ hitro nihajoča funkcija, zato je njeno povprečje enako nič. Zato je pri $\lambda \ll a$ efektivni sipalni presek enak

$$d\sigma = Z \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta \, d\Omega, \quad (80.8)$$

kar pomeni, da je sipanje sorazmerno s prvo potenco atomskega števila. Opozorimo naj, da ta enačba ne velja za majhne sipalne kote ($\Theta \sim \lambda/a$), saj je v tem primeru $\mathbf{q} \sim \Theta/\lambda \sim 1/a$, tako da eksponent $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}$ ni velik v primerjavi z ena.

Efektivni koherentni sipalni presek določimo tako, da poiščemo tisti prispevek k sipanemu valovanju, ki ima frekvenco ω . V izrazu (80.5) je časovno odvisen faktor $e^{-i\omega t}$, čas pa nastopa tudi v vsoti $\sum e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}$. Zaradi slednje časovne odvisnosti so v polju sipanega valovanja poleg frekvence ω vsebovane tudi drugi frekvence (ki pa so v bližini ω). Prispevek k polju s frekvenco ω (torej tisti, ki je časovno odvisen le preko faktorja $e^{-i\omega t}$) dobimo tako, da izračunamo povprečje po času vsote $\sum e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}$. Zaradi tega se izraz za efektivni koherentni sipalni presek $d\sigma_{\text{coh}}$ od skupnega sipalnega preseka $d\sigma$ razlikuje v tem, da namesto povprečne vrednosti kvadrata modula vsote vsebuje kvadrat modula povprečne vrednosti vsote,

$$d\sigma_{\text{coh}} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left| \sum e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \right|^2 \sin^2 \theta \, d\Omega. \quad (80.9)$$

Omenimo naj, da je ta povprečna vrednost vsote kar enaka (če odmislimo konstantni predfaktor) prostorski Fourierovi komponenti povprečne porazdelitve električnega naboja atoma $\rho(\mathbf{r})$:

$$e \sum e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} = \sum \rho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} dV = \rho_{\mathbf{q}}. \quad (80.10)$$

Če je $\lambda \gg a$, lahko ponovno $e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}$ nadomestimo z ena in dobimo

$$d\sigma_{\text{coh}} = \left(Z \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta \, d\Omega. \quad (80.11)$$

Ko to primerjamo s skupnim efektivnim sipalnim presekom (80.7), ugotovimo, da je $d\sigma = d\sigma_{\text{coh}}$, torej da se vso valovanje sipa koherentno.

Če je $\lambda \ll a$, potem pri računanju povprečja v (80.9) vsi členi vsote odpadejo, ker so hitro nihajoče funkcije časa, in velja $d\sigma_{\text{coh}} = 0$. V tem primeru je torej sipanje povsem nekoherentno.

Poglavje 10

Delec v gravitacijskem polju

§81 Gravitacijska polja v nerelativistični mehaniki

Gravitacijska polja imajo osnovno lastnost, da se v njih vsa telesa gibljejo enako, neodvisno od mase, če so le začetni pogoji vedno enaki.

Na primer, zakon prostega pada v gravitacijskemu polju Zemlje je enak za vsa telesa; ne glede na njihovo maso vsa telesa padajo z enakim pospeškom.

Ta lastnost gravitacijskih polj omogoča uporabo analogije med gibanjem telesa v gravitacijskem polju in prostim gibanjem telesa, ki ga opazujemo iz neinercialnega opazovalnega sistema. V inercialnem opazovalnem sistemu je namreč prosto gibanje teles premočrtno in enakomerno. Če so na primer v danem trenutku hitrosti teles enake, bodo ostale enake za vedno. Očitno je, da bomo iz nekega neinercialnega opazovalnega to gibanje videli tako, da se bodo vsa telesa gibala enako glede na nas.

Zato so lastnosti gibanja v neinercialnem sistemu enake lastnostim gibanja v inercialnem sistemu v prisotnosti gravitacijskega polja. Z drugimi besedami, neinercialen opazovalni sistem je ekvivalenten določenemu gravitacijskemu polju. To je *načelo ekvivalence*.

Oglejmo si na primer gibanje v enakomerno pospešenem opazovalnem sistemu. Telo s poljubno maso, ki se prosto giba v takšnem sistemu, ima glede na ta sistem konstanten pospešek, ki je po velikost enak pospešku opazovalnega sistema, kaže pa v nasprotno smer. Isto velja za gibanje v konstantnem in homogenem gravitacijskem polju, na primer v gravitacijskem polju Zemlje (če opazujemo manjše področje, kjer je polje približno homogeno). Enakomerno pospešen opazovalni sistem je ekvivalenten konstantnemu in homogenemu zunanemu polju. Podobno je neenakomerno pospešeno linearno gibanje opazovalnega sistema ekvivalentno homogenemu nekonstantnemu gravitacijskemu polju.

Toda polja, katerim ustrezajo neinercialni opazovalni sistemi, niso povsem enaka “pravim” gravitacijskim poljem, ki jih imamo tudi v inercialnih opazovalnih sistemih. Močno se namreč razlikujejo v neskončnosti. Neskončno daleč od teles, ki polje povzročajo, “prava” gravitacijska polja vedno padajo proti nič. V nasprotju s tem pa polja, ki ustrezajo neinercialnim opazovalnim sistemom, naraščajo preko vseh meja v neskončnosti, ali pa ostanejo končna, vendar različna od nič. Na primer, centrifugalna sila, ki se pojavi v rotirajočem opazovalnem sistemu, narašča preko vseh meja, ko se oddaljujemo od osi vrtenja; polje, ki je ekvivalentno opazovalnemu sistemu, ki se giblje pospešeno premočrtno, je enako v vsem prostoru, tudi v neskončnosti.

Polja, ki so ekvivalentna neinercialnim sistemom, izginejo, ko se preselimo v inercialni

sistem. Nasprotno pa “pravih” gravitacijskih polj (ki obstajajo tudi v inercialnem opazovalnem sistemu) ne moremo izničiti z nobeno izbiro opazovalnega sistema. To je razvidno že iz zgornje razprave o različnem obnašanju v neskončnosti med “pravim” gravitacijskim poljem in poljem, katerim so ekvivalentni neinercialni sistemi; ker zadnja ne težijo proti nič v neskončnosti, je očitno nemogoče, da bi z izbiro opazovalnega sistema izničili “pravo” polje, ker to v neskončnosti teži proti nič.

Z izbiro primerne opazovalnega sistema lahko izničimo gravitacijsko polje le v določenem območju prostora, ki je dovolj majhno, da lahko polje tam smatramo kot homogeno. V tem primeru moramo izbrati pospešen opazovalni sistem, katerega pospešek je enak pospešku, ki bi ga imel delec na območju polja, ki ga obravnavamo.

Gibanje delca v gravitacijskem polju je v nerelativistični mehaniki določeno z Lagrangeovo funkcijo, ki ima v inercialnem opazovalnem sistemu obliko

$$L = \frac{mv^2}{2} - m\phi, \quad (81.1)$$

kjer je ϕ funkcija koordinat in časa, ki opisuje polje, in se imenuje *gravitacijski potencial*. * Ustrezna enačba gibanja je

$$\dot{\mathbf{v}} = -\nabla\phi. \quad (81.2)$$

Masa ali kakšna druga konstanta, ki določa lastnosti delca, se v enačbi ne pojavlja; na ta način se osnovna lastnost gravitacijskih polj izraža v matematičnem jeziku.

§82 Gravitacijsko polje v relativistični mehaniki

Osnovna lastnost gravitacijskih polj, da se v njih vsa telesa gibljejo na enak način, velja tudi v relativistični mehaniki. Zato preživi tudi analogija med gravitacijskimi polji in neinercialnimi opazovalnimi sistemi. Zato iz te analogije izhaja tudi obravnava gravitacijski polj v relativistični mehaniki.

V inercialnem opazovalnem sistemu s kartezičnimi koordinatami se interval ds zapiše:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Kot dobro vemo ostane po Lorentzevi transformaciji v katerikoli drug inercialni sistem ta integral enak. Če pa se preselimo v neinercialni opazovalni sistem, ds^2 ne bo več vsota kvadratov diferencialov štirih koordinat.

Če se na primer preselimo v enakomerno vrteči se koordinatni sistem

$$x = x' \cos \Omega t - y' \sin \Omega t, \quad y = x' \sin \Omega t + y' \cos \Omega t, \quad z = z'$$

(Ω je kotna hitrost vrtenja okoli osi Z), postane interval

$$ds^2 = [c^2 - \Omega^2(x'^2 + y'^2)] dt^2 - dx'^2 - dy'^2 + 2\Omega y' dx' dt - 2\Omega x' dy' dt.$$

Ne glede na to, kako bi poskušali transformirati časovno koordinato, zgornjega izraza ne moremo zapisati kot vsoto kvadratov diferencialov koordinat.

*V nadaljevanju ne bomo pogosto potrebovali elektromagnetnega potenciala ϕ , zato označevanje gravitacijskega potenciala z enakim simbolom ne bo vodilo k nejasnostim.

Zato je v neinercialnem opazovalnem sistemu kvadrat intervala splošna kvadratna forma diferencialov koordinat in se zapiše

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \quad (82.1)$$

kjer so g_{ik} funkcije prostorskih koordinat x^1, x^2, x^3 in časovne koordinate x^0 . V neinercialnem opazovalnem sistemu je četverni koordinatni sistem x^0, x^1, x^2, x^3 krivočrten. Količine g_{ik} , ki določajo vse geometrijske lastnosti krivočrtnega koordinatnega sistema, predstavljajo *metriko prostora in časa*.

Vedno lahko privzamemo, da so količine g_{ik} simetrične v indeksih i in k ($g_{ki} = g_{ik}$), ker so določene s simetrično formo (82.1), kjer g_{ik} in g_{ki} nastopata kot faktorja enega samega produkta $dx^i dx^k$. V splošnem imamo deset neodvisnih količin g_{ik} – štiri z enakima indeksoma in $4 \cdot 3/2 = 6$ z različnima indeksoma. V inercialnem opazovalnem sistemu, ko uporabljamo kartezične prostorske koordinate $x^{1,2,3} = x, y, z$ in velja za čas $x^0 = ct$, so količine g_{ik} enake

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{ik} = 0 \text{ za } i \neq k. \quad (82.2)$$

Četverni koordinatni sistemi s takšnimi vrednostmi g_{ik} se imenuje *Galilejev* koordinatni sistem.

V prejšnjem razdelku smo pokazali, da je neinercialni koordinatni sistem ekvivalenten nekemu polju. Kot lahko sedaj vidimo, so v relativistični mehaniki ta polja določena s količinami g_{ik} .

To velja tudi za “prava” gravitacijska polja. Gravitacijsko polje je sprememba metrike prostora-časa, ki jo določajo količine g_{ik} . To pomembno dejstvo pomeni, da so geometrijske lastnosti prostora-časa (metrika) določene s fizikalnimi pojavi, in niso fiksne, v naprej določene lastnosti prostora in časa.

Teorija gravitacijskih polj, zgrajena na temeljih teorije relativnosti, se imenuje *splošna teorija relativnosti*. Osnovel, in leta 1915 dokončno formuliral, jo je Einstein. To je verjetno ena najlepših obstoječih fizikalnih teorij. Einstein jo je – presenetljivo – razvil na povsem deduktiven način, eksperimentalne dokaze so prinesla šele poznejša astronomska opazovanja.

Kot v nerelativistični mehaniki obstaja bistvena razlika med “pravimi” gravitacijskimi polji in polji, katerim so ekvivalentni neinercialni opazovalni sistem. Ko se preselimo iz inercialnega v neinercialni opazovalni sistem, dobimo iz Galilejevih g_{ik} (82.2) nove količine g_{ik} v kvadratni formi (82.1) s preprosto koordinatno transformacijo. Z inverzno transformacijo jih lahko ponovno privedemo na Galilejeve vrednosti v vsem prostoru. Količine g_{ik} so v vseh takšnih primerih prav posebne: to je razvidno že iz dejstva, da samo s koordinatno transformacijo ne moremo vrednostim g_{ik} dati poljubnih vrednosti.

“Pravega” gravitacijskega polja pa ne moremo izničiti z nobeno koordinatno transformacijo. Z drugimi besedami, v prisotnosti gravitacije je prostor-čas takšen, da količin g_{ik} , ki določajo njegovo metriko, ne moremo privedi na Galilejeve g_{ik} v vsem prostoru z nobeno koordinatno transformacijo. Takšen prostor-čas je *ukrivljen*, za razliko od *ravnega*, kjer je opisana redukcija vedno mogoča.

S primerno izbiro koordinat pa lahko količine g_{ik} privedemo na Galilejevo obliko v poljubni točki negalilejevega prostora-časa: to ustreza diagonalizaciji kvadratne forme s konstantnimi koeficienti (koeficienti so ravno vrednosti g_{ik} v izbrani točki). Takšen koordinatni sistem imenujemo *Galilejev v izbrani točki*. *

*Da ne bo nesporazuma, moramo takoj povedati, da izbor takšnega koordinatnega sistema ne pomeni, da smo odpravili gravitacijsko polje v ustreznem infinitezimalnem delu četvernega prostora. Gravitacijsko polje lahko tako vedno odpravimo z uporabo načela ekvivalence: to ima tudi globlji pomen (glej § 87).

Po diagonalizaciji v izbrani točki ima matrika količin g_{ik} eno pozitivno in tri negativne lastne vrednosti. * Iz tega je razvidno, da je determinanta g matrike g_{ik} vedno negativna v pravem prostoru-času:

$$g < 0. \quad (82.3)$$

Kadar se spremeni metrika prostora-časa, se sočasno spremeni tudi čisto prostorska metrika. Galilejevi metriki g_{ik} v ravnem prostoru-času ustreza evklidska geometrija prostora. V gravitacijskem polju postane geometrija prostora neevklidska. To velja tako za "prava" gravitacijska polja, v katerih je prostor-čas ukrivljen, kot za polja, ki so ekvivalentna neinercialnim opazovalnim sistemom, v katerih je prostor-čas še vedno raven.

Problem geometrije prostora v gravitacijskem polju si bomo bolj podrobno ogledali v 84. Koristno je, da že sedaj na preprost način ilustriramo, kako postane prostor neevklidski, ko se preselimo iz inercialnega v neinercialni opazovalni sistem. Imejmo dva opazovalna sistema, inercialnega (K) in takšnega, ki se enakomerno vrti glede na K okoli skupne osi z (K'). Krog s središčem v izhodišču, ki leži v ravnini x, y sistema K , je krog tudi v ravnini x', y' sistema K' . Če izmerimo obseg in premer kroga z merilno palico v sistemu K , dobimo vrednosti, katerih razmerje je π , v skladu z evklidsko geometrijo v inercialnem opazovalnem sistemu. Sedaj pa opravimo podobno meritev z merilno palico, ki miruje v sistemu K' . Če opazujemo meritev iz sistema K , bo palica, ki leži tangentno na krog, doživela Lorentzevo skrčenje dolžin, palica, ki leži radialno, pa ne. Jasno je, da bo razmerje med obsegom in premerom pri takšni meritvi večje od π .

V splošnem primeru poljubnega, spreminjajočega se gravitacijskega polja, bo metrika prostora ne le ne-evklidska, temveč se bo tudi spreminjala s časom. To pomeni, da se razmerja med različnimi geometrijskimi razdaljami spreminjajo s časom. Zato medsebojne lege "testnih teles" v polju ne morejo biti stalne v nobenem koordinatnem sistemu. † Postavimo na primer telesa po obsegu in po premeru kroga. Ker bo razmerje med obsegom in premerom različno od π in se bo spreminjalo s časom, se bodo razdalje med telesi po obsegu spreminjale, če bodo razdalje med telesi po premeru kroga ostale enake, in obratno. V splošni teoriji relativnosti je nemogoče imeti sistem teles, ki mirujejo eno glede na drugo.

To bistveno spremeni sam koncept opazovalnega sistema v splošni teoriji relativnosti v primerjavi s pomenom opazovalnih sistemov v posebni teoriji. V posebni teoriji relativnosti smo si pod pojmom opazovalnega sistema predstavljali množico mirujočih teles, katerih medsebojne lege se ne spreminjajo. V prisotnosti spremenljivega gravitacijskega polja takšnih sistemov teles ne more biti. Da bi določili položaj telesa v prostoru, si moramo strogo vzeto predstavljati neskončno število teles, ki prostor zapolnjujejo kot neke vrste "medij". Takšna množica teles z urami, ki tečejo poljubno, tvori opazovalni sistem v splošni teoriji relativnosti.

Zaradi proste izbire opazovalnega sistema, morajo zakoni narave biti v splošni teoriji relativnosti zapisani v obliki, ki je primerna za poljuben štiridimenzionalen koordinatni sistem. Tej obliki pravimo "*kovariantna*" oblika. To seveda ne pomeni, da so vsi opazovalni sistemi ekvivalentni (kot so fizikalno ekvivalentni vsi inercialni opazovalni sistemi v posebni teoriji). Prav nasprotno, tako lastnosti gibanja teles kot ostali fizikalni pojavi so videti različno v vsakem izmed možnih opazovalnih sistemov.

*Ta nabor znakov se imenuje *signatura* matrike.

†Bolj natančno: število delcev mora biti večje od štiri. Ker lahko konstruiramo tetraeder iz poljubnih štirih daljic, je vedno mogoče s primerno definicijo opazovalnega sistema doseči, da štirje delci tvorijo invariantni tetraeder. Zato lahko seveda dosežemo tudi to, da imajo delci stalne medsebojne lege tudi v sistemu dveh ali treh delcev.

§83 Krivočrtne koordinate

Pri obravnavi gravitacijskih polj moramo pojave opisati v poljubnem opazovalnem sistemu, zato moramo nekaj več povedati o štiridimenzionalni geometriji poljubnih krivočrtnih koordinatnih sistemov. Temu bodo posvečeni razdelki 83, 85 in 86.

Oglejmo si transformacijo iz enega koordinatnega sistema x^0, x^1, x^2, x^3 v drugega x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 :

$$x^i = f^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3),$$

kjer so f^i neke funkcije. Transformaciji koordinat ustreza transformacija diferencialov po enačbi

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k. \quad (83.1)$$

Vsaka četverica količin A^i ($i = 0, 1, 2, 3$), ki se ob transformaciji koordinat transformira kot diferenciali koordinat, se imenuje *kontravariantni* četverec:

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k. \quad (83.2)$$

Naj bo ϕ neki skalar. Ob transformaciji koordinat, se količine $\partial\phi/\partial x^i$ transformirajo po enačbi

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^i} = \frac{\partial\phi}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}, \quad (83.3)$$

kar je drugačen predpis kot enačba (83.2). Vsaka četverica količin A_i , ki se ob transformaciji koordinat transformira kot odvodi skalarja, se imenuje *kovariantni* četverec:

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k. \quad (83.4)$$

Ker v krivočrtnih koordinatah obstajata dve vrsti vektorjev, bodo tenzorji drugega ranga treh vrst. *Kontravariantni tenzor* drugega ranga, A^{ik} , je skupina šestnajstih količin, ki se transformirajo kot produkti komponent dveh kontravariantnih vektorjev, in sicer po pravilu

$$A^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} A'^{lm}. \quad (83.5)$$

Kovariantni tenzor drugega ranga se transformira po pravilu

$$A_{ik} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A'_{lm}, \quad (83.6)$$

mešani tenzor pa po pravilu

$$A^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A'^l_m. \quad (83.7)$$

S tem smo posplošili definicije vektorjev četvercev in tenzorjev četvercev v Galilejevih koordinatah (6), v skladu s katerimi diferenciali dx^i tvorijo kontravarianten četverec, odvodi $\partial\phi/\partial x^i$ pa kovarianten četverec. *

Pravila za sestavljanje tenzorjev četvercev z množenjem ali krčenjem produktov drugih tenzorjev četvercev veljajo nespremenjena tudi v krivočrtnih koordinatah. S pomočjo pravil

* Čeprav v galilejskemu sistemu koordinate x^i same (in ne le njihovi diferenciali) tvorijo vektor četverec, to seveda ne velja več v krivočrtnih koordinatah.

(83.2) in (83.4) se lahko hitro prepričamo, da je skalarni produkt dveh vektorjev četvercev $A^i B_i$ invarianten:

$$A^i B_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} A'^l B'_m = \frac{\partial x'^m}{\partial x'^l} A'^l B'_m = A'^l B'_l.$$

Enotski tenzor četverec δ_k^i je definiran enako kot prej: njegove komponente so še vedno $\delta_k^i = 0$ za $i \neq k$, in 1 za $i = k$. Če je A^k vektor četverec, potem pri množenju z δ_k^i dobimo

$$A^k \delta_k^i = A^i,$$

torej drug vektor četverec. S tem smo dokazali, da je δ_k^i tenzor.

Kvadrat diferencialne ločne dolžine je kvadratna forma diferencialov dx^i :

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \quad (83.8)$$

kjer so g_{ik} funkcije koordinat; količine g_{ik} so simetrične v indeksih i in k :

$$g_{ik} = g_{ki}. \quad (83.9)$$

Ker je (skrčen) produkt količin g_{ik} in kontravariantnega tenzorja $dx^i dx^k$ skalar, količine g_{ik} tvorijo kovarianten tenzor; imenujemo ga *metrični tenzor*.

Tenzorja A_{ik} in B^{ik} sta *recipročna*, če velja

$$A_{ik} B^{kl} = \delta_i^l.$$

Kontravariantni metrični tenzor je tenzor g^{ik} , ki je recipročen tenzorju g_{ik} , torej

$$g_{ik} g^{kl} = \delta_i^l. \quad (83.10)$$

Isto fizikalno količino lahko zapišemo s kontravariantnimi ali kovariantnimi komponentami. Očitno je, da so edine količine, ki lahko določajo povezavo med obema oblikama, komponente metričnega tenzorja. Povezavo lahko zapišemo z enačbama:

$$A^i = g^{ik} A_k, \quad A_i = g_{ik} A^k. \quad (83.11)$$

V Galilejevem koordinatnem sistemu ima metrični tenzor komponente

$$g_{ik}^{(0)} = g^{ik(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (83.12)$$

Tedaj enačba (83.11) podaja znane relacije $A^0 = A_0$, $A^{1,2,3} = -A_{1,2,3}$, ipd. *

Podobno pravilo velja tudi za tenzorje. Izbran fizikalni tenzor spremenimo iz ene v drugo obliko s pomočjo metričnega tenzorja po enačbah:

$$A_k^i = g^{il} A_{lk}, \quad A^{ik} = g^{il} g^{km} A_{lm},$$

*Ko pri opisovanju analogij uporabljamo Galilejev koordinatni sistem, se moramo zavedati, da lahko takšen sistem izberemo le v ravnem prostoru. V primeru ukrivljenega četvernega prostora smemo govoriti le o koordinatnem sistemu, ki je Galilejev v izbranem infinitezimalno majhnem delu prostora-časa (takšen sistem lahko vedno najdemo). Ta razlika ne vpliva na nobeno izmed izpeljav.

ipd.

V 6 smo definirali popolnoma antisimetrični enotski psevdotenzor e^{iklm} v Galilejevih koordinatah. Transformirajmo ga v poljubni koordinatni sistem in ga sedaj označujmo z E^{iklm} . Oznako e^{iklm} bomo obdržali za količine, definirane kot poprej ($e^{0123} = 1$ ali $e_{0123} = -1$).

Naj bo x'^i Galilejev, x^i pa poljuben krivočrtni koordinatni sistem. V skladu s splošnimi pravili za transformiranje tenzorjev imamo

$$E^{iklm} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^p} \frac{\partial x^k}{\partial x'^r} \frac{\partial x^l}{\partial x'^s} \frac{\partial x^m}{\partial x'^t} e^{prst},$$

ali

$$E^{iklm} = J e^{iklm},$$

kjer je J determinanta, ki jo tvorijo odvodi $\partial x^i / \partial x'^p$, to pa je ravno Jacobijeva determinanta za transformacijo iz Galilejevega v krivočrtni koordinatni sistem:

$$J = \frac{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}.$$

To Jacobijevo determinanto lahko izrazimo z determinanto metričnega tenzorja g_{ik} (v sistemu x^i). V ta namen najprej zapišimo enačbo za transformacijo metričnega tenzorja:

$$g^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} g^{lm(0)},$$

in izenačimo determinanti obeh strani enačbe. Determinanta recipročnega tenzorja je $|g^{ik}| = 1/g$. Druga determinanta je $|g^{lm(0)}| = -1$. Sledi $1/g = -J^2$, torej $J = 1/\sqrt{-g}$.

Zato moramo v krivočrtnem koordinatnem sistemu antisimetrični enotski tenzor definirati z

$$E^{iklm} = \frac{1}{\sqrt{-g}} e^{iklm}. \quad (83.13)$$

Indekse tega tenzorja spustimo s pomočjo enačbe

$$e^{prst} g_{ip} g_{kr} g_{ls} g_{mt} = -g e_{iklm}, \quad (83.14)$$

tako da so kovariantne komponente enake

$$E_{iklm} = \sqrt{-g} e_{iklm}. \quad (83.15)$$

V Galilejevemu koordinatnemu sistemu x'^i je integral skalarja po $d\Omega' = dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3$ tudi skalar, kar pomeni, da se pri integriranju diferencial $d\Omega'$ obnaša kot skalar (§6). Pri transformaciji v krivočrtni koordinatni sistem x^i se diferencial $d\Omega'$ pretvori v

$$d\Omega' \rightarrow \frac{1}{J} d\Omega = \sqrt{-g} d\Omega. \quad (83.16)$$

Zato je v krivočrtnih koordinatnih sistemih pri integriranju po četverni prostornini (angl. *four volume*) invariantna količina $\sqrt{-g} d\Omega$. *

* Če je ϕ skalar, se $\sqrt{-g}\phi$, ki po integraciji po $d\Omega$ da invariantno količino, imenuje *skalarna gostota*. Podobno lahko govorimo o *vektorski* in *tenzorski gostoti* $\sqrt{-g}A^i$ in $\sqrt{-g}A^{ik}$, ipd. Te količine nam dajo vektor oziroma tenzor, če jih pomnožimo z $d\Omega$ (integral $\int A^i \sqrt{-g} d\Omega$ po končnem območju strogo vzeto ne more biti vektor, saj so pravila za pretvorbo vektorja A^i v vsaki točki drugačna).

Vse opombe na koncu §6 o diferencialih pri integriranju po hiperploškah, ploškah in krivuljah veljajo nespremenjene v krivočrtnih koordinatnih sistemih, spremeni se le definicija dualnih tenzorjev. Diferencial “ploščine” na hiperploskvi, ki ga napenjajo trije infinitezimalni premiki, je kontravarianten antisimetrični tenzor dS^{ikl} ; dualni tenzor dobimo z množenjem s tenzorjem $\sqrt{-g}e_{iklm}$ in je enak

$$\sqrt{-g}dS_i = -\frac{1}{6}e_{iklm}dS^{klm}\sqrt{-g}. \quad (83.17)$$

Podobno velja za df^{ik} , diferencial (dvodimenzionalne) ploščine, ki ga razpenjata dva infinitezimalna premika. Tu je dualni tenzor definiran z *

$$\sqrt{-g}df_{ik}^* = \frac{1}{2}\sqrt{-g}e_{iklm}df^{lm}. \quad (83.18)$$

Oznaki dS_i in df_{ik}^* kot poprej ohranimo za količini $\frac{1}{6}e_{iklm}dS^{klm}$ in $\frac{1}{2}e_{iklm}df^{lm}$ (in ne za produkta teh količin z $\sqrt{-g}$); pravila (6.14-19) o transformiranju med različnimi vrstami integralov ostanejo enaka, saj so bila izpeljana formalno, brez sklicevanja na tenzorske lastnosti različnih količin. Najpomembnejše je pravilo o transformiranju integrala po hiperploskvi v integral po četverni prostornini (Gaussov izrek), kar dosežemo z substitucijo

$$dS_i \rightarrow d\Omega \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (83.19)$$

§84 Razdalje in časovni intervali

V splošni teoriji relativnosti izbira koordinatnega sistema ni na noben način omejena; trojica prostorskih koordinat x^1, x^2, x^3 so lahko poljubne količine, ki določajo položaj telesa v prostoru, časovna koordinata x^0 pa je določena z uro, ki teče na poljuben način. Zanima nas, kako lahko iz vrednosti količin x^1, x^2, x^3, x^0 določimo dejanske razdalje in časovne intervale.

Najprej poiščimo povezavo med lastnim časom, ki ga bomo v nadaljevanju označevali s τ , in koordinato x^0 . V ta namen si oglejmo dva infinitezimalno zakasnjena dogodka, ki se dogodita v isti prostorski točki. Tedaj je interval ds med dogodkoma, kot že vemo, kar $c d\tau$, kjer $d\tau$ (lastni) časovni interval med dogodkoma. V splošni izraz $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$ postavimo $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ in dobimo

$$ds^2 = c^2 \tau^2 = g_{00} (dx^0)^2,$$

od koder sledi

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0, \quad (84.1)$$

čas med poljubnima dogodkoma, ki se dogodita v isti točki, pa je

$$\tau = \frac{1}{c} \int \sqrt{g_{00}} dx^0. \quad (84.2)$$

Vedeti moramo, da sta dS^{klm} in df^{ik} sestavljena iz infinitezimalnih premikov dx^i , dx'^i in dx''^i na enak način kot v § 6 ne glede na geometrijski pomen koordinat x^i . Formalni pomen diferencialov dS_i in df_{ik}^ je torej enak kot prej. Kot prej je $dS_0 = dx_1 dx_2 dx_3 \equiv dV$. Ohranili smo torej prejšnjo definicijo diferenciala dV kot zmnožka diferencialov treh prostorskih koordinat; zavedati pa se moramo, da diferencial geometrijske prostorske prostornine v krivočrtnih koordinatah ni podan z dV , temveč z $\sqrt{\gamma} dV$, kjer je γ determinanta prostorskega metričnega tenzorja (ki ga bomo vpeljali v naslednjem razdelku).

Ta enačba določa, koliko časa je v točki dejansko minilo (od tod ime *lastni čas* za dano točko v prostoru) ob spremembi koordinate x^0 . Mimogrede naj še omenimo, da je količina g_{00} pozitivna, kot je razvidno iz predhodnih enačb:

$$g_{00} > 0. \quad (84.3)$$

Poudariti moramo pomensko razliko med enačbo (84.3) in signaturo [to so predznaki treh glavnih vrednosti tenzorja g_{ik} (§82)]. Tenzor g_{ik} , ki ne zadosti drugemu pogoju, ne more ustrezati pravemu gravitacijskemu polju in ne more biti metrika prostora-časa. Če pa ne zadostimo prvemu pogoju, (84.3), to pomeni le, da ustreznega opazovalnega sistema ne moremo dobiti s pravimi telesi; če je izpolnjen pogoj o lastnih vrednostih, potem lahko z ustrezno transformacijo koordinat dosežemo, da je g_{00} pozitiven (takšen primer je vrteči se koordinatni sistem, glej 89).

Poiščimo diferencial *prostorske dolžine*, dl . V posebni teoriji relativnosti lahko dl definiramo kot interval med dvema infinitezimalno bližnjima dogodkoma, ki se pripetita ob istem času. V splošni teoriji relativnosti je to običajno nemogoče; nemogoče je določiti dl z enostavno zahtevo $dx^0 = 0$ v enačbi za ds . To je povezano s tem, da je v gravitacijskem polju lastni čas v različnih točkah odvisen od koordinate dx^0 na različne načine.

Diferencial dl bomo poiskali drugače.

Predstavljajmo si, da iz prostorske točke B (s koordinatami $x^\alpha + dx^\alpha$) pošljemo svetlobni signal v infinitezimalno bližnjo točko A (s koordinatami x^α), nato pa ga po isti poti pošljemo še nazaj. Očitno je čas (opazovan iz točke B) za to pot, pomnožen z c , enak dvakratni razdalji med točkama.

Zapišimo diferencial ds , pri čemer ločimo prostorske in časovne koordinate:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + 2g_{0\alpha} dx^0 dx^\alpha + g_{00} (dx^0)^2, \quad (84.4)$$

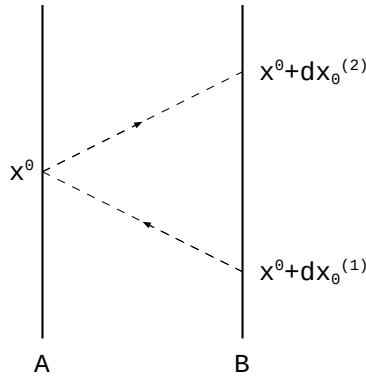
kjer implicitno seštevamo po ponovljenih grških indeksih, ki tečejo od 1 do 3. Interval med dogodkoma, ki ustrezata odhodu in prihodu signala iz ene točke v drugo, je enak nič. Iz enačbe $ds^2 = 0$ izrazimo dx^0 . Obstajata dve rešitvi

$$\begin{aligned} dx^{0(1)} &= \frac{1}{g_{00}} \{-g_{0\alpha} dx^\alpha - \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00}) dx^\alpha dx^\beta}\}, \\ dx^{0(2)} &= \frac{1}{g_{00}} \{-g_{0\alpha} dx^\alpha + \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00}) dx^\alpha dx^\beta}\}, \end{aligned} \quad (84.5)$$

ki ustrezata potovanju signala v dveh smereh med A in B . Če je x^0 trenutek prihoda signala v točko A , sta trenutka, ko je signal zapustil B in se vrnil v B enaka $x^0 + dx_0^{(1)}$ oziroma $x^0 + dx_0^{(2)}$. Na skici 15 sta polni črti svetovnici, ki ustrezata koordinatam x^α in $x^\alpha + dx^\alpha$, črtkane črte pa so svetovnice signalov. * Jasno je, da je celotni "časovni" interval med odhodom signala in povratkom v začetno točko enak

$$dx^{0(2)} - dx^{0(1)} = \frac{2}{g_{00}} \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00}) dx^\alpha dx^\beta}.$$

*Na sliki 15 je predpostavljeno, da je $dx_0^{(2)} > 0$ in $dx_0^{(1)} < 0$, vendar to ni potrebno: $dx^{0(1)}$ in $dx^{0(2)}$ lahko imata isti predznak. Dejstvo, da je lahko v tem primeru vrednost $x^0(A)$ v trenutku prihoda signala v A manjša od vrednosti $x^0(B)$ v trenutku, ko signal odpotuje iz B , ne vodi v kontradikcijo, saj nismo nikjer predpostavili, da so hitrosti ur v različnih točkah prostora na kakršenkoli način sinhronizirane.



Slika 15:

Ustrezni interval lastnega časa dobimo, če upoštevamo enačbo (84.1), z množenjem z $\sqrt{g_{00}}/c$, razdaljo med točkama dl pa z dodatnim množenjem z $c/2$. Dobimo

$$dl^2 = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} \right) dx^\alpha dx^\beta.$$

To je iskani izraz, ki določa razdalje v odvisnosti od diferencialov prostorskih koordinat. Zapišemo ga v obliki

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (84.6)$$

kjer je

$$\gamma_{\alpha\beta} = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} \right) \quad (84.7)$$

tridimenzionalni metrični tenzor, ki določa metriko, torej geometrijske lastnosti prostora. Enačba (84.7) izraža povezavo med metriko prostora in metriko štiridimenzionalnega prostora-časa. *

Ves čas moramo imeti v mislih, da je g_{ik} v splošnem odvisen od x^0 tako, da se prostorska metrika (84.6) s časom spreminja. Zato je nesmiselno integrirati dl ; takšen integral bi bil odvisen od izbire svetovnice, ki povezuje točki v prostoru. Zato v splošni teoriji relativnosti pojem določene razdalje med telesi v splošnem izgubi pomen in je smiselno le za infinitezimalne razdalje. Le tedaj, ko g_{ik} ni odvisen od časa, lahko govorimo o končni razdalji in integral $\int dl$ ima določen pomen.

*Kvadratna forma (84.6) mora očitno biti pozitivno definitna. Da bo to res, mora biti zadoščeno naslednjim pogojem, ki jih poznamo iz teorije form:

$$\gamma_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{vmatrix} > 0.$$

Če izrazimo γ_{ik} z g_{ik} , lahko hitro pokažemo, da lahko zgornje pogoje zapišemo tudi kot

$$\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad g < 0.$$

Tem pogojem skupaj z zahtevo (84.3) morajo zadoščati komponente metričnega tenzorja v vsakem opazovalnem sistemu, ki ga lahko ustvarimo z realnimi telesi.

Vredno je poudariti, da je tenzor $-\gamma_{\alpha\beta}$ recipročen kontravariantnemu tridimenzionalnemu tenzorju $g^{\alpha\beta}$. Iz $g^{ik}g_{kl} = \delta_l^i$ sledi namreč

$$g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} + g^{\alpha 0}g_{0\gamma} = \delta_\gamma^\alpha, \quad g^{\alpha\beta}g_{\beta 0} + g^{\alpha 0}g_{00} = 0, \quad g^{0\beta}g_{\beta 0} + g^{00}g_{00} = 1. \quad (84.8)$$

Iz druge enačbe izrazimo $g^{\alpha 0}$ in vstavimo v prvo. Tako dobimo

$$-g^{\alpha\beta}\gamma_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha. \quad (84.9)$$

Rezultat lahko formuliramo tudi drugače, in sicer s trditvijo, da so količine $-g^{\alpha\beta}$ komponente kontravariantnega tridimenzionalnega metričnega tenzorja, ki ustreza metriki (84.6):

$$\gamma^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta}. \quad (84.10)$$

Povezava med determinantama g in γ , ki jo dobimo iz tenzorjev g_{ik} in $\gamma_{\alpha\beta}$, je

$$-g = g_{00}\gamma. \quad (84.11)$$

V nadaljevanju bomo uporabili tridimenzionalni vektor $\mathbf{g}$, katerega kovariantne komponente so definirane z

$$g_\alpha = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}. \quad (84.12)$$

Ker $\mathbf{g}$ smatramo kot vektor v prostoru z metriko (84.6), moramo kontravariantne komponente definirati z $g^\alpha = \gamma^{\alpha\beta}g_\beta$. Uporabimo (84.10) in drugo izmed enačb (84.8), in dobimo

$$g^\alpha = \gamma^{\alpha\beta}g_\beta = -g^{0\alpha}. \quad (84.13)$$

Uporabna je tudi enačba

$$g^{00} = \frac{1}{g_{00}} - g_\alpha g^\alpha, \quad (84.14)$$

ki sledi iz tretje izmed enačb (84.8).

Oglejmo si sedaj koncept sočasnosti v splošni teoriji relativnosti. Zanima nas, če je možno umeriti (sinhronizirati) ure v različnih točkah prostora tako, da bi obstajala povezava med vrednostmi, odčitanimi z ur.

Takšno sinhronizacijo moramo doseči z izmenjavo svetlobnega signala med točkama. Ponovno si oglejmo širjenje signala med dvema infinitezimalno oddaljenima točkama A in B , kot je prikazano na sliki 15. S trenutkom x^0 v točki A sočasn timer v točki B smatramo čas, prikazan na uri v točki B , ki je na polovici med trenutkom odhoda in trenutkom povratka signala v točko B , torej čas

$$x^0 + \Delta x^0 = x^0 + \frac{1}{2}(\mathrm{d}x^{0(2)} + \mathrm{d}x^{0(1)}).$$

Vstavimo (84.5) in dobimo, da je razlika vrednosti "časa" x^0 med dvema sočasnima dogodkoma, do katerih pride v dveh infinitezimalno bližnjih točkah enaka

$$\Delta x^0 = -\frac{g_{0\alpha} \mathrm{d}x^\alpha}{g_{00}} \equiv g_\alpha \mathrm{d}x^\alpha. \quad (84.15)$$

S pomočjo te enačbe lahko sinhroniziramo ure v poljubnem infinitezimalnem območju prostora. Če s takšno sinhronizacijo nadaljujemo na enak način iz točke A , je možno sinhronizirati ure: definiramo lahko sočasnost dogodkov na poljubni odprti krivulji. *

Izkaže pa se, da je sinhronizacija ur po sklenjeni konturi v splošnem nemogoča. Če začnemo s sinhronizacijo po konturi in se vrnemo v začetno točko, bi dobili Δx^0 različen od nič. Zato je *a fortiori* nemogoče sinhronizirati ure po vsem prostoru. Poseben primer so le tisti opazovalni sistemi, v kateri so vse komponente $g_{0\alpha}$ enake nič. †

Poudariti moramo, da je nezmožnost sinhronizacije vseh ur lastnost poljubnega opazovalnega sistema, in ne lastnost prostora-časa samega. V vsakem gravitacijskem polju lahko vedno (na neskončno veliko različnih načinov) izberemo takšen opazovalni sistem, v katerem so vse količine $g_{0\alpha}$ identično enake nič, kar omogoča popolno sinhronizacijo ur (glej §97).

Že v posebni teoriji relativnosti lastni čas poteka različno za ure, ki so v relativnem gibanju. V splošni teoriji relativnosti pa lastni čas poteka različno celo v različnih točkah prostora v istem opazovalnem sistemu. To pomeni, da je v splošnem interval lastnega časa različen za dva zaporedna dogodka v neki točki v prostoru in za dva dogodka v drugi točki v prostoru, ki pa sta sočasna s prvima.

§85 Kovariantni odvod

V Galilejevih koordinatah ‡ diferenciali dA_i vektorja A_i tvorijo vektor, odvodi komponent vektorja po koordinatah $\partial A_i / \partial x^k$ pa tvorijo tenzor. V krivočrtnih koordinatah to ne velja; dA_i ni vektor, $\partial A_i / \partial x_k$ pa ni tenzor. To je posledica tega, da je dA_i razlika vektorjev v različnih (infinitezimalno ločenih) točkah prostora; v različnih točkah se vektorji transformirajo različno, ker so koeficienti transformacijskih pravil (83.2) in (83.4) odvisni od koordinat.

Zgornje trditve lahko neposredno preverimo. V ta namen bomo poiskali pravila za transformiranje diferencialov dA_i v krivočrtnih koordinatah. Kovariantni vektor se transformira po enačbi

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k;$$

zato je

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k d\frac{\partial x'^k}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} dx^l.$$

Vidimo, da se dA_i transformira drugače kot vektor (isto velja seveda tudi za diferencial kontravariantnega vektorja). Le kadar so drugi odvodi $\partial^2 x'^k / \partial x^i \partial x^l = 0$, torej kadar so x'^k linearne funkcije x^k , imajo transformacijska pravila obliko

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k,$$

in se dA_i transformira kot vektor.

*Če (84.15) pomnožimo z g_{00} in oba člena prenesemo na levo stran, lahko pogoj za sinhronizacijo zapišemo v obliki $dx_0 = g_{0i} dx^i = 0$: o pomeni, da mora biti "kovariantni diferencial" dx_0 med dvema neskončno bližnjima sočasnim dogodkoma enak nič.

†V to skupino posebnih primerov prištevamo tudi tiste, kjer lahko $g_{0\alpha}$ postavimo na nič s preprosto transformacijo časovne koordinate, ki ni odvisna od izbire sistema predmetov, s katerimi definiramo prostorske koordinate.

‡V splošnem v koordinatah s konstantnimi g_{ik} .

Sedaj bomo poiskali definicijo tenzorja, ki v krivočrtnih koordinatah igra isto vlogo kot $\partial A_i / \partial x^k$ v Galilejevih. Z drugimi besedami, odvod $\partial A_i / \partial x^k$ bi radi transformirali iz Galilejevih v krivočrtno koordinate.

Če bi radi v krivočrtnih koordinatah poiskali diferencial vektorja, ki se obnaša kot vektor, moramo izračunati razliko dveh vektorjev v isti točki. Drugače povedano, nekako moramo "premkniti" enega izmed vektorjev (ki je v infinitezimalni bližini drugega) v točko drugega vektorja in šele nato izračunati razliko vektorjev, ki se sedaj nahajata v isti točki. Premik mora biti vpeljan tako, da bo v Galilejevih koordinatah razlika vektorjev enaka običajnemu diferencialu dA_i . Ker je dA_i kar razlika komponent dveh infinitezimalno oddaljenih vektorjev, to pomeni, da operator premika ne sme spremeniti komponent vektorja v Galilejevih koordinatah. Takšen premik pa je ravno vzporedni premik. Pri vzporednem premiku vektorja njegove komponente v Galilejevih koordinatah ostanejo enake, v krivočrtnih koordinatah pa se bodo v splošnem spremenile. Zato bo v krivočrtnih koordinatah razlika komponent vektorjev po premiku enega izmed njih v točko drugega različna od razlike komponent pred premikom, torej od dA_i .

Ko primerjamo dva infinitezimalno oddaljena vektorja moramo torej enega od njiju vzporedno premkniti v točko, kjer se nahaja drugi. Oglejmo si poljubni kontravariantni vektor; če je njegova vrednost v točki x^i enaka A^i , potem je vrednost v točki $x^i + dx^i$ enaka $A^i + dA^i$. Vektor A^i vzporedno premaknemo za infinitezimalno razdaljo v točko $x^i + dx^i$; pri tem se vektor spremeni za δA^i . Razlika vektorjev, ki se sedaj nahajata v isti točki, DA^i je

$$DA^i = dA^i - \delta A^i. \quad (85.1)$$

Sprememba komponent vektorja pri infinitezimalnem vzporednem premiku δA^i je odvisna od vrednosti komponent samih, odvisnost pa mora jasno biti linearna. To sledi iz dejstva, da se mora vsota dveh vektorjev transformirati po enakem zakonu kot vsak vektor posamezno. Zato ima δA^i obliko

$$\delta A^i = -\Gamma_{kl}^i A^k dx^l, \quad (85.2)$$

kjer so Γ_{kl}^i neke funkcije koordinat. Njihova oblika je seveda odvisna od koordinatnega sistema; v Galilejevem koordinatnem sistemu je $\Gamma_{kl}^i = 0$.

Iz tega je že razvidno, da količine Γ_{kl}^i ne tvorijo tenzorja, saj je tenzor, ki je enak nič v enem izmed koordinatnih sistemov, enak nič tudi v vseh ostalih. V ukrivljenem prostoru pa je seveda nemogoče imeti Γ_{kl}^i , ki bi bili enaki nič v vsem prostoru. Pozneje, v §87, bomo videli, da igrajo Γ_{kl}^i vlogo jakosti polj. *

Količine Γ_{kl}^i se imenujejo "koeficienti povezave" ali "Christoffelovi simboli".

Poleg količin Γ_{kl}^i bomo v nadaljevanju uporabljali tudi količine $\Gamma_{i,kl}^\dagger$, ki so definirane z

$$\Gamma_{i,kl} = g_{im} \Gamma_{kl}^m. \quad (85.3)$$

Obratno velja

$$\Gamma_{kl}^i = g^{im} \Gamma_{m,kl}. \quad (85.4)$$

Hitro lahko ugotovimo tudi, kako se s pomočjo Christoffelovih simbolov zapišejo spremembe komponent kovariantnega vektorja ob vzporednem premiku. Pri tem upoštevamo,

*To je natanko tisti koordinatni sistem, ki ga imamo v mislih, ko zaradi krajšega pisanja govorimo o Galilejevem sistemu; vseeno pa vsi dokazi veljajo ne le za raven, temveč tudi za ukrivljen prostor-čas.

†Namesto Γ_{kl}^i in $\Gamma_{i,kl}$ včasih pišemo tudi $\left\{ \begin{smallmatrix} kl \\ i \end{smallmatrix} \right\}$ in $\left[\begin{smallmatrix} kl \\ i \end{smallmatrix} \right]$.

da se ob vzporednem premiku ohranjajo skalarne količine, na primer skalarni produkt dveh vektorjev.

Naj bo A_i poljuben kovarianten in B^i poljuben kontravarianten vektor. Iz $\delta(A_i B^i) = 0$, sledi

$$B^i \delta A_i = -A_i \delta B^i = \Gamma_{kl}^i B^k A_i dx^l$$

ali, po zamenjavi indeksov,

$$B^i \delta A_i = \Gamma_{il}^k A_k B^i dx^l.$$

Ker je B^i poljuben, od tod sledi

$$\delta A_i = \Gamma_{il}^k A_k dx^l, \quad (85.5)$$

kar je iskana sprememba kovariantnega vektorja ob vzporednem premiku.

Vstavimo (85.2) in $dA^i = (\partial A^i / \partial x^l) dx^l$ v (85.1). Dobimo

$$DA^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma_{kl}^i A^k \right) dx^l. \quad (85.6)$$

Podobno dobimo kovariantni vektor:

$$DA_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^k A_k \right) dx^l. \quad (85.7)$$

Izraza med oklepaji v (85.6) in (85.7) sta tenzorja, saj nam pomnožena z vektorjem dx^l dasta vektor. Očitno sta to iskana tenzorja, ki sta posplošitev koncepta odvoda v krivočrtnih koordinatah. Ta tenzorja se imenujeta *kovariantna odvoda* vektorja A^i oziroma A_i . Označujemo ju z $A_{i;k}^i$ oziroma $A_{i;k}$. Zato je

$$DA^i = A_{i;l}^i dx^l; \quad DA_i = A_{i;l} dx^l, \quad (85.8)$$

kovariantna odvoda pa sta

$$A_{i;l}^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma_{kl}^i A^k, \quad (85.9)$$

$$A_{i;l} = \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^k A_k. \quad (85.10)$$

V Galilejevih koordinatah je $\Gamma_{kl}^i = 0$ in kovariantni odvod se poenostavi v običajni odvod.

Enostavno lahko izračunamo tudi kovariantni odvod tenzorja. V ta namen moramo poiskati spremembo tenzorja ob infinitezimalnem vzporednem premiku. Oglejmo si poljuben kontravariantni tenzor, ki ga lahko zapišemo kot produkt dveh kontravariantnih vektorjev, $A^i B^k$. Ob vzporednem premiku je

$$\delta(A^i B^k) = A^i \delta B^k + B^k \delta A^i = -A^i \Gamma_{lm}^k B^l dx^m - B^k \Gamma_{lm}^i A^l dx^m.$$

Zaradi linearnosti transformacije mora tudi za poljubni tenzor A^{ik} veljati

$$\delta A^{ik} = -(A^{im} \Gamma_{ml}^k + A^{mk} \Gamma_{ml}^i) dx^l. \quad (85.11)$$

To vstavimo v

$$DA^{ik} = dA^{ik} - \delta A^{ik} \equiv A_{i;l}^{ik} dx^l.$$

in dobimo kovariantni odvod tenzorja A^{ik} :

$$A^{ik}_{;l} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml} A^{mk} + \Gamma^k_{ml} A^{im}. \quad (85.12)$$

Na povsem enak način izpeljemo tudi kovariantna odvoda mešanega tenzorja A^i_k in kovariantnega tenzorja A_{ik} :

$$A^i_{k;l} = \frac{\partial A^i_k}{\partial x^l} - \Gamma^m_{kl} A^i_m + \Gamma^i_{ml} A^m_k, \quad (85.13)$$

$$A_{ik;l} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^m_{il} A_{mk} - \Gamma^m_{kl} A_{im}. \quad (85.14)$$

Podobno lahko določimo kovariantni odvod tenzorja poljubnega reda. Uporabimo lahko naslednje pravilo. Pri kovariantnem odvajanju tenzorja $A^{...}$ glede na x^l moramo navadnemu odvodu $\partial A^{...}/\partial x^l$ dodati člen $-\Gamma^k_{il} A^{...}_k$ za vsak kovariantni indeks i ($A^{...}_i$) in člen $+\Gamma^i_{kl} A^{...}$ za vsak kontravariantni indeks i ($A^{...i}$).

Hitro se lahko prepričamo, da kovariantni odvod produkta dobimo po enakem pravilu kot pri običajnem odvajanju. Pri tem obravnavamo kovariantni odvod skalarja ϕ kot običajni odvod, torej kot kovariantni vektor $\phi_k = \partial\phi/\partial x^k$. To je v skladu z dejstvom, da je za skalar $\delta\phi = 0$, in zato $D\phi = d\phi$. Kovariantni odvod produkta $A_i B_k$ je na primer

$$(A_i B_k)_{;l} = A_{i;l} B_k + A_i B_{k;l}.$$

Če pri kovariantnem odvodu dvignemo indeks, ki ustreza odvajanju, dobimo *kontravariantni odvod*. Tako je

$$A^{;k}_i = g^{kl} A_{i;l}, \quad A^{i;k} = g^{kl} A^i_{;l}.$$

Sedaj pa izpeljimo pravilo za transformacijo Christoffelovih simbolov iz enega koordinatnega sistema v drugega.

Pravilo dobimo s primerjavo dveh enačb za kovariantne odvode in zahtevo, da sta enaki po obliki. Preprost račun nam da

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma^{im}_{np} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} \frac{\partial x'^p}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m}. \quad (85.15)$$

Iz enačbe je razvidno, da se Γ^i_{kl} transformira kot tenzor samo pri linearnih transformacijah koordinat (tedaj odpade drugi člen v (85.15)).

Opazimo pa, da je drugi člen simetričen v indeksih k in l , tako da odpade pri transformaciji količin $S^i_{kl} = \Gamma^i_{kl} - \Gamma^i_{lk}$, ki se torej transformirajo kot tenzor:

$$S^i_{kl} = S^{im}_{np} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} \frac{\partial x'^p}{\partial x^l}.$$

Količine S^i_{kl} tvorijo "krivinski tenzor" (angl. *curvature tensor*) prostora.

Sedaj bomo pokazali, da je v splošni teoriji relativnosti, ki temelji na načelu ekvivalence, krivinski tenzor enak nič. Kot smo že omenili, zaradi načela ekvivalence vedno obstaja "Galilejev" opazovalni sistem, kjer so v neki točki količine Γ^i_{kl} in zato tudi S^i_{kl} enake nič. Ker je S^i_{kl} tenzor, so količine S^i_{kl} , ki so enake nič v enem opazovalnem sistemu, enake nič tudi v vseh ostalih opazovalnih sistemih. To pomeni, da so Christoffelovi simboli simetrični v spodnjih indeksih:

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}. \quad (85.16)$$

Seveda velja tudi

$$\Gamma_{i,kl} = \Gamma_{i,lk}. \quad (85.17)$$

V splošnem obstaja štirideset različnih količin Γ_{kl}^i ; za vsako izmed štirih vrednosti indeksa i obstaja deset različnih parov indeksov k in l (pri tem obravnavamo pare, ki jih dobimo z zamenjavo indeksov k in l , kot iste).

Enačba (85.15) omogoča enostaven dokaz zgornje trditve, da lahko ob pogoju (85.16) vedno najdemo koordinatni sistem, v katerem so vse količine Γ_{kl}^i enake nič v vnaprej izbrani točki (takšen sistem imenujemo *lokalno inercialen* ali *lokalno geodetski* (glej 87)). *

Postavimo izbrano točko v izhodišče koordinatnega sistema in naj bodo vrednosti Γ_{kl}^i (v koordinatah x^i) enake $(\Gamma_{kl}^i)_0$. V okolici točke naredimo transformacijo

$$x'^l = x^l + \frac{1}{2}(\Gamma_{kl}^i)_0 x^k x^l. \quad (85.18)$$

Potem je

$$\left(\frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \right)_0 = (\Gamma_{kl}^i)_0 \quad (85.19)$$

in iz enačbe (85.15) sledi, da so vsi Γ_{np}^m enaki nič.

Poudariti moramo, da je pogoj (85.16) ključnega pomena: izraz na levi strani enačbe (85.19) je simetričen v indeksih k in l , zato to velja tudi za desno stran enačbe.

Opazimo lahko, da pri transformaciji (85.18) velja

$$\left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \right)_0 = \delta_k^i,$$

tako da se ne spremeni vrednost nobenega tenzorja (niti g_{ik}) v izbrani točki tako, da lahko izničimo Christoffelove simbole istočasno z redukcijo g_{ik} v Galilejevo obliko.

§86 Povezava med Christoffelovimi simboli in metričnim tenzorjem

Pokažimo, da je kovariantni odvod metričnega tenzorja g_{ik} enak nič. Upoštevajmo, da relacija

$$DA_i = g_{ik} DA^k$$

velja za vektor DA_i ravno tako kot za ostale vektorje. Po drugi strani imamo $A_i = g_{ik} A^k$, od koder sledi

$$DA_i = D(g_{ik} A^k) = g_{ik} DA^k + A^k Dg_{ik}.$$

Primerjamo z $DA_i = g_{ik} DA^k$ in upoštevamo, da je A^k poljuben. Od tod sledi

$$Dg_{ik} = 0.$$

Zato je kovariantni odvod enak nič:

$$g_{ik;l} = 0. \quad (86.1)$$

* Dokazati se da, da lahko s primerno izbiro koordinatnega sistema dosežemo ne le, da je $\Gamma_{kl}^i = 0$ v neki točki, temveč vzdolž cele izbrane svetovnice. (Dokaz te trditve najdemo v P. K. Rashevskii, *Riemannian Geometry and Tensor Analysis*, Nauka, 1964, § 91.)

Pri kovariantnem odvajanju lahko g_{ik} smatramo kot konstanto.

S pomočjo enačbe $g_{ik;l} = 0$ lahko izrazimo Christoffelove simbole Γ_{kl}^i z metričnem tenzorjem g_{ik} . V skladu z definicijo (85.14) je

$$g_{ik;l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{mk}\Gamma_{il}^m - g_{im}\Gamma_{kl}^m = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{k,il} - \Gamma_{i,kl} = 0.$$

Tako smo odvode tenzorja g_{ik} izrazili s Christoffelovimi simboli. * Zapišimo vrednosti odvodov tenzorja g_{ik} in zamenjajmo indekse i, k, l :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} &= \Gamma_{k,il} + \Gamma_{i,kl}, \\ \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} &= \Gamma_{i,kl} + \Gamma_{l,ik}, \\ -\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} &= -\Gamma_{l,ki} - \Gamma_{k,li}.\end{aligned}$$

Enačbe seštejemo in delimo z dva. Upoštevamo, da je $\Gamma_{i,kl} = \Gamma_{i,lk}$, pa dobimo

$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right). \quad (86.2)$$

Za simbole $\Gamma_{kl}^i = g^{im}\Gamma_{m,kl}$ po dobimo

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right). \quad (86.3)$$

Zapisani enačbi podajata Christoffelove simbole, izražene z metričnim tenzorjem.

Izračunajmo sedaj izraz za skrčen Christoffelov simbol Γ_{ki}^i , ki ga bomo potrebovali v nadaljevanju. V ta namen izračunajmo diferencial dg determinante g tenzorja g_{ik} ; dg dobimo tako, da odvajamo vsako komponento tenzorja g_{ik} in dobljeno vrednost pomnožimo s koeficientom komponente v determinanti, torej z njeno poddeterminanto. Komponente recipročnega tenzorja g^{ik} so enake poddeterminantom determinante g_{ik} , deljenim z determinanto. Zato so poddeterminante determinante g enake gg^{ik} . Dobimo torej

$$dg = gg^{ik} dg_{ik} = -gg_{ik} dg^{ik} \quad (86.4)$$

(ker iz $g_{ik}g^{ik} = \delta_i^i = 4$ sledi $g^{ik} dg_{ik} = -g_{ik} dg^{ik}$).

Iz enačbe (86.3) sledi

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^m} \right).$$

V prvem in tretjem členu med oklepaji zamenjamo indeksa i in m in ugotovimo, da se člena okrajšata. Velja torej

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k},$$

ali, če upoštevamo še (86.4),

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k}. \quad (86.5)$$

*Izbor lokalno geodetskega koordinatnega sistema torej pomeni, da so v izbrani točki vsi prvi odvodi komponent metričnega tenzorja enaki nič.

Dobro je poznati tudi izraz za količino $g^{kl}\Gamma_{kl}^i$; velja

$$g^{kl}\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2}g^{kl}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right) = g^{kl}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right),$$

kar lahko s pomočjo (86.4) pretvorimo v

$$g^{kl}\Gamma_{kl}^i = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}g^{ik})}{\partial x^k}. \quad (86.6)$$

Pri računanju nam bo pomagalo, če si zapomnimo naslednjo povezavo med odvodi kontravariantnega tenzorja g^{ik} in odvodi količin g_{ik} :

$$g_{il}\frac{\partial g^{lk}}{\partial x^m} = -g^{lk}\frac{\partial g_{il}}{\partial x^m} \quad (86.7)$$

(kar dobimo, če odvajamo enačbo $g_{il}g^{lk} = \delta_i^k$). Na koncu naj še omenimo, da lahko odvode tenzorja g^{ik} vedno zapišemo s količinami Γ_{kl}^i . Iz identitete $g_{;l}^{ik} = 0$ neposredno sledi

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = -\Gamma_{ml}^i g^{mk} - \Gamma_{ml}^k g^{im}. \quad (86.8)$$

S pomočjo izpeljanih formul lahko izraz za $A_{;i}^i$, posplošeno divergenco četverca v krivočrtnih koordinatah, zapišemo na primeren način. Z uporabo (86.5) dobimo

$$A_{;i}^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma_{li}^i A^l = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^l \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^l},$$

kar je isto kot

$$A_{;i}^i = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}A^i)}{\partial x^i}. \quad (86.9)$$

Izpeljemo lahko tudi podoben izraz za divergenco antisimetričnega tenzorja A^{ik} . Iz (85.12) sledi

$$A_{;k}^{ik} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} + \Gamma_{mk}^i A^{mk} + \Gamma_{mk}^k A^{im}.$$

Ker je $A^{mk} = -A^{km}$, velja

$$\Gamma_{mk}^i A^{mk} = -\Gamma_{km}^i A^{km} = 0.$$

Uporabimo izraz (86.5) za Γ_{mk}^k in dobimo

$$A_{;k}^{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}A^{ik})}{\partial x^k}. \quad (86.10)$$

Sedaj predpostavimo, da je A_{ik} simetrični tenzor; izračunajmo izraz $A_{;k}^k$ za mešane komponente. Velja

$$A_{;k}^k = \frac{\partial A_i^k}{\partial x^k} + \Gamma_{lk}^k A_i^l - \Gamma_{ik}^l A_l^k = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(A_i^k \sqrt{-g})}{\partial x^k} - \Gamma_{ki}^l A_l^k.$$

Zadnji člen je enak

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right)A^{kl}.$$

Ker je tenzor A^{kl} simetričen, se dva člena med oklepajema okrajšata in dobimo

$$A_{i;k}^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}A_l^k)}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} A^{kl}. \quad (86.11)$$

V kartezičnih koordinatah je $\partial A_i/\partial x^k - \partial A_k/\partial x^i$ antisimetrični tenzor. V krivočrtnih koordinatah ta tenzor zapišemo $A_{i;k} - A_{k;i}$. Izkáže pa se (s pomočjo izraza za $A_{i;k}$ in upoštevajoč $\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{lk}^i$), da je

$$A_{i;k} - A_{k;i} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}. \quad (86.12)$$

Razdelek bomo zaključili s transformacijo vsote drugih odvodov $\partial^2 \phi / \partial x_i \partial x^i$ v krivočrtno koordinato. Očitno je ustrezna posplošitev izraz $\phi_{;i}^i$. Toda $\phi_{;i} = \partial \phi / \partial x^i$, ker je kovariantni odvod skalarja kar običajni odvod. Dvignemo indeks i in dobimo

$$\phi^{;i} = g^{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x^k},$$

s pomočjo (86.9) pa končno dobimo

$$\phi_{;i}^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \right). \quad (86.13)$$

Pomembno je opozoriti, da lahko Gaussov izrek za pretvorbo integrala vektorja po hiperploskvi v integral po četvernem prostoru, (83.19), s pomočjo (86.9) zapišemo v obliki

$$\oint A^i \sqrt{-g} dS_i = \int A_{;i}^i \sqrt{-g} d\Omega. \quad (86.14)$$

§87 Gibanje delca v gravitacijskem polju

Gibanje prostega delca določimo v posebni teoriji relativnosti s pomočjo načela najmanjše akcije,

$$\delta S = -mc \delta \int ds = 0, \quad (87.1)$$

po katerem se delec giblje tako, da je njegova svetovnica med izbrano dvojico točk v prostoru-času ekstrem akcije. Za prosti delec je to kar ravna črta (v običajnem tridimenzionalnem prostoru to ustreza enakomernemu premočrtnemu gibanju).

Zakon gibanja delca v gravitacijskem polju dobimo s pomočjo istega načela najmanjše akcije (87.1), ker gravitacijsko polje ni nič drugega kot sprememba metrike prostora-časa, ki določa, kako je ds izražen z dx^i . Zato se v gravitacijskem polju delec giblje tako, da je njegova svetovnica ekstremna. Takšno svetovnico imenujemo tudi *geodetka* v četvernem prostoru x^0, x^1, x^2, x^3 . Ker v prisotnosti gravitacijskega polja prostor-čas ni Galilejev, geodetka ni "ravna črta" in prostorsko gibanje delca ni ne enakomerno, niti premočrtno.

Enačbe gibanja delca v gravitacijskemu polju lahko dobimo s primerno posplošitvijo diferencialne enačbe za prosto gibanje v posebni teoriji relativnosti, torej v Galilejevem koordinatnem sistemu. Takšna izpeljava je bolj preprosta, kot če bi si za izhodišče izbrali princip najmanjše akcije (glej nalogo na koncu tega razdelka). Enačba gibanja v Galilejevem koordinatnem sistemu je $du_i/ds = 0$ ali $du_i = 0$, kjer je $u_i = dx^i/ds$ četverec hitrosti. V krivočrtnem koordinatnem sistemu se ta enačba posploši v

$$Du_i = 0. \quad (87.2)$$

Iz izraza (85.6) za kovariantni diferencial vektorja dobimo

$$du^i + \Gamma_{kl}^i u^k dx^l = 0.$$

Delimo z ds in dobimo

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0. \quad (87.3)$$

To je iskana enačba gibanja. Vidimo, da gibanje delca v gravitacijskem polju določajo količine Γ_{kl}^i . Odvod $d^2 x^i / ds^2$ je četverec pospeška delca. Zato lahko imenujemo količino $-m\Gamma_{kl}^i u^k u^l$ "četverec sile", ki deluje na delec v gravitacijskem polju. Tenzor g_{ik} zato igra vlogo "potenciala" gravitacijskega polja, njegovi odvodi pa določajo "jakost" polja Γ_{kl}^i . *

V §85 smo videli, da lahko s primerno izbiro koordinatnega sistema vedno dosežemo, da so vse količine Γ_{kl}^i enake nič v izbrani točki prostora-časa. Sedaj vidimo, da ta izbira lokalno inercialnega opazovalnega sistema pomeni, da smo izničili gravitacijsko polje v izbranem infinitezimalnem delu prostora-časa. Možnost takšne izbire je izraz načela ekvivalence v relativistični teoriji gravitacije. †

Kot prej definiramo četverec gibalne količine delca v gravitacijskem polju kot

$$p^i = mcu^i. \quad (87.4)$$

Kvadrat te količine je

$$p_i p^i = m^2 c^2. \quad (87.5)$$

Namesto p_i vstavimo $-\partial S / \partial x^i$ in dobimo Hamilton-Jacobijevo enačbo za delec v gravitacijskem polju:

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2 c^2 = 0. \quad (87.6)$$

Enačbe geodetke oblike (87.3) ne moremo uporabiti za opis širjenja svetlobnega signala, saj na svetovnici svetlobnega žarka velja, kot vemo, $ds = 0$, zato postanejo vsi členi v enačbi (87.3) neskončni. Enačbe ustrezne oblike dobimo, če upoštevamo, da je smer širjenja žarka v geometrijski optiki določena z valovnim vektorjem, ki je tangenta na žarek. Štiridimenzionalni valovni vektor zapišemo kot $k^i = dx^i / d\lambda$, kjer je λ nek parameter, s katerim parametriziramo pot žarka. V posebni teoriji relativnosti se valovni vektor ne spreminja med potovanjem žarka skozi vakuum, $dk^i = 0$ (glej §53). V gravitacijskem polju enačbo splošimo v $Dk^i = 0$ ali

$$\frac{dk^i}{d\lambda} + \Gamma_{kl}^i k^k k^l = 0 \quad (87.7)$$

(ta enačba določa tudi parameter λ). ‡

*Gibalno enačbo lahko izrazimo tudi s kovariantnimi komponentami četvernega pospeška. Iz pogoja $Du_i = 0$ sledi

$$\frac{du_i}{ds} - \Gamma_{k,il} u^k u^l = 0.$$

V enačbo vstavimo $\Gamma_{k,il}$ iz (86.2), dva izmed členov se med seboj okrajšata in dobimo

$$\frac{du_i}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} u^k u^l = 0.$$

†V opombi na strani 242 smo omenili, da si lahko izberemo takšen opazovalni sistem, ki je "inercialen vzdolž izbrane svetovnice". Če si za svetovnico izberemo časovno os (vzdolž katere velja $x^1 = x^2 = x^3 = \text{konst}$), potem lahko v izbranem majhnem delu prostora gravitacijsko polje odpravimo za vse čase.

‡Geodetke, vzdolž katerih velja $ds \equiv 0$, se imenujejo *ničelne* (angl. *null*) ali *izotropne* geodetke.

Kvadrat valovnega četverca je enak nič (glej §48):

$$k_i k^i = 0. \quad (87.8)$$

Namesto k_i vstavimo $\partial\psi/\partial x^i$, kjer je ψ eikonal, in dobimo enačbo ikonala v gravitacijskem polju

$$g^{ik} \frac{\partial\psi}{\partial x^i} \frac{\partial\psi}{\partial x^k} = 0. \quad (87.9)$$

V limiti majhnih hitrosti moramo iz relativističnih enačb gibanja delca v gravitacijskem polju dobiti ustrezne nerelativistične enačbe. Pri tem upoštevamo, da predpostavka majhnih hitrosti pomeni, da mora biti majhno tudi gravitacijsko polje. V nasprotnem primeru bi lahko delec dosegel visoke hitrosti.

Oglejmo si, kako v limiti majhnega polja metrični tenzor g^{ik} določa nerelativistični potencial gravitacijskega polja ϕ .

V nerelativistični mehaniki gibanje delca v gravitacijskem polju opišemo z Lagrangevo funkcijo (81.1). Zapišimo jo v obliki

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\phi. \quad (87.10)$$

Dodali smo konstantno $-mc^2$. * To smo storili zato, da je nerelativistična Lagrangeva funkcija v odsotnosti polja, $L = -mc^2 + mv^2/2$, enaka limiti relativistične funkcije $L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}$, ko gre $v/c \rightarrow 0$.

Nerelativistična akcija S za delec v gravitacijskem polju je torej

$$S = \int L dt = -mc \int \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c} \right) dt.$$

To primerjamo z izrazom $S = -mc \int ds$ in vidimo, da v limitnem primeru velja

$$ds = \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c} \right) dt.$$

To kvadriramo in zanemarimo člene, ki odpadejo v limiti $c \rightarrow \infty$. Dobimo

$$ds^2 = (c^2 + 2\phi) dt^2 - d\mathbf{r}^2. \quad (87.11)$$

pri čemer smo upoštevali, da je $\mathbf{v} dt = d\mathbf{r}$.

V limitnem primeru je zato komponenta g_{00} metričnega tenzorja enaka

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}. \quad (87.12)$$

Iz (87.11) sledi, da za ostale komponente velja $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, $g_{0\alpha} = 0$. V resnici so popravki k tem členom v splošnem istega velikostnega reda kot popravek k g_{00} (več podrobnosti o tem je v §106). Teh popravkov ne moremo določiti z zgornjo metodo, ker bi popravki k $g_{\alpha\beta}$ – čeprav so istega velikostnega reda kot popravki k g_{00} – v Lagrangevo funkcijo prinesli člene višjega reda. Vzrok je v tem, da komponente $g_{\alpha\beta}$ v izrazu za ds^2 niso pomnožene z c^2 , tako kot g_{00} .

*Potencial ϕ je seveda določen le do poljubne aditivne konstante natančno. Predpostavljali bomo, da smo si to konstanto izbrali tako, da je potencial enak nič daleč stran od teles, ki ustvarjajo polje.

NALOGA

NALOGA Izpeljgi gibalno enačbo (87.3) iz načela najmanjše akcije (87.1).

Rešitev: Velja

$$\delta ds^2 = 2 ds \delta s = \delta(g_{ik} dx^i dx^k) = dx^i dx^k \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \delta x^l + 2g_{ik} dx^i d\delta x^k.$$

Zato je

$$\begin{aligned} \delta S &= -mc \int \left[\frac{1}{2} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \delta x^l + g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{d\delta x^k}{ds} \right] ds \\ &= -mc \int \left[\frac{1}{2} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \delta x^l - \frac{d}{ds} \left(g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \right) \delta x^k \right] ds \end{aligned}$$

(pri integriranju per partes smo upoštevali, da je na mejah $\delta x^k = 0$). V drugem členu v integralu nadomestimo indeks k z indeksom l . Če tedaj koeficient poljubne variacije δx^l izenačimo z nič, dobimo

$$\frac{1}{2} u^i u^k \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \frac{d}{ds} (g_{il} u^i) = \frac{1}{2} u^i u^k \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{il} \frac{du^i}{ds} - u^i u^k \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} = 0.$$

Opazimo, da lahko tretji člen zapišemo kot

$$-\frac{1}{2} u^i u^k \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right),$$

vpeljemo Christoffelove simbole $\Gamma_{l,ik}$ v skladu z (86.2) in dobimo

$$g_{il} \frac{du^i}{ds} + \Gamma_{l,ik} u^i u^k = 0.$$

Od tod dobimo enačbo (87.3), če dvignemo indeks l .

§88 Nespremenljivo gravitacijsko polje

Gravitacijsko polje imenujemo *nespremenljivo* ali *konstantno*, če si lahko izberemo takšen opazovalni sistem, v katerem so vse komponente metričnega tenzorja neodvisne od časovne koordinate x^0 . Časovno koordinato v tem primeru imenujemo *svetovni čas*.

Izbira svetovnega časa ni povsem enolična. Če k x^0 dodamo poljubno funkcijo prostorskih koordinat, količine g_{ik} še vedno ne bodo odvisne od x^0 . Ta transformacija izraža poljubnost izbire izhodišča za merjenje časa v vsaki točki prostora. * Poleg tega lahko svetovni čas pomnožimo s poljubno konstanto, saj so enote v katerih merimo čas poljubne.

Strogo vzeto je gravitacijsko polje nespremenljivo le tedaj, ko ga ustvarja eno samo telo. V sistemu več teles bo medsebojna privlačnost povzročila gibanje, kar pomeni, da polje, ki ga telesa ustvarjajo, ne more biti nespremenljivo.

* Hitro se lahko prepričamo, da se ob takšni transformaciji prostorska metrika ne spremeni, kot je pričakovano. Ob spremembi

$$x^0 \rightarrow x^0 + f(x^1, x^2, x^3),$$

kjer je $f(x^1, x^2, x^3)$ poljubna funkcija, se komponente g_{ik} spremenijo v

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow g_{\alpha\beta} + g_{00} f_{,\alpha} f_{,\beta} + g_{0\alpha} f_{,\beta} + g_{0\beta} f_{,\alpha},$$

$$g_{0\alpha} \rightarrow g_{0\alpha} + g_{00} f_{,\alpha}, \quad g_{00} \rightarrow g_{00},$$

pri čemer je $f_{,\alpha} \equiv \partial f / \partial x^\alpha$. Pri tem se tenzor (84.7) očitno ne spremeni.

Če je telo, ki ustvarja polje, nepremično (v opazovalnem sistemu, kjer g_{ik} niso odvisne od x^0), potem sta obe smeri v času enakovredni. Ob primerni izbiri izhodišč za merjenje časa v vseh točkah prostora se diferencial ds ne bo spremenil, ko x^0 sprevrže predznak. Zato morajo biti vse komponente metričnega tenzorja $g_{0\alpha}$ identično enake nič. Takšna nespremenljiva gravitacijska polja imenujemo *statična* polja.

Nespremenljivo polje lahko ustvarijo tudi telesa, ki niso pri miru. Tudi polje osno simetričnega telesa, ki se enakomerno vrti okoli svoje osi, bo konstantno. Vendar v tem primeru obe smeri v času nista več enakovredni. Če zamenjamo predznak časa, so bo spremenil tudi predznak vrtilne količine. Zato so komponente metričnega tenzorja $g_{0\alpha}$ v takšnih poljih (ki jih imenujemo *stacionarna*) v splošnem različne od nič.

Fizikalni pomen svetovnega časa v nespremenljivem gravitacijskem polju je sledeč. Interval svetovnega časa med dvema dogodkoma v neki točki prostora je enak intervalu svetovnega časa med dvema dogodkoma v drugi točki prostora, če so dogodki paroma sočasni (pojem sočasnosti je razložen v §84). Toda istemu intervalu svetovnega časa x^0 ustrezajo v različnih točkah prostora različni intervali lastnega časa τ .

Povezavo med svetovnim in lastnim časom (84.1) lahko tu zapišemo v obliki

$$\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00} x^0} \quad (88.1)$$

in velja za poljuben končen časovni interval.

Če je gravitacijsko polje šibko, lahko uporabimo približen izraz (87.12) in iz (88.1) dobimo

$$\tau = \frac{x^0}{c} \left(1 + \frac{\phi}{c^2} \right). \quad (88.2)$$

Lastni čas teče tem počasneje, čim manjši je gravitacijski potencial v izbrani točki prostora, torej čim večja je absolutna vrednost potenciala (pozneje, v §96, bomo videli, da je potencial ϕ negativen). Če eno izmed dveh enakih ur postavimo za nekaj časa v gravitacijsko polje, bo ura v polju zaostajala.

Kot smo omenili, so komponente $g_{0\alpha}$ metričnega tenzorja v statičnem gravitacijskem polju enake nič. Na podlagi rezultatov iz §84 lahko ugotovimo, da lahko v takšnem polju sinhroniziramo ure po vsem prostoru. Opazimo tudi, da je diferencial prostorske ločne dolžine v statičnem polju kar

$$dl^2 = -g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (88.3)$$

V stacionarnem polju so $g_{0\alpha}$ različne od nič in sinhronizacija ur po celotnem prostoru ni mogoča. Ker g_{ik} niso odvisne od x^0 , lahko enačbo (84.15) za razliko vrednosti svetovnega časa za dva sočasna dogodka, do katerih pride v dveh različnih točkah prostora, zapišemo v obliki

$$\Delta x^0 = - \int \frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00}}. \quad (88.4)$$

Na ta način lahko sinhroniziramo ure na krivulji, ki povezuje točki. Če skušamo ure sinhronizirati po sklenjeni konturi, je razlika svetovnega časa, ki bi jo ugotovili ob vrnitvi v začetno točko, enaka integralu

$$\Delta x^0 = - \oint \frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00}}, \quad (88.5)$$

kjer integriramo po sklenjeni poti. *

Oglejmo si širjenje svetlobnega žarka v nespremenljivem gravitacijskem polju. V §53 smo videli, da je frekvenca svetlobe časovni odvod ikonala ψ (z nasprotnim predznakom). Frekvenca izražena s svetovnim časom x^0/c je torej $\omega_0 = -c(\partial\psi/\partial x^0)$. Ker enačba ikonala (87.9) v nespremenljivem polju ne vsebuje količine x^0 eksplicitno, je frekvenca ω_0 konstantna med širjenjem žarka. Frekvenca, izmerjena z lastnim časom je $\omega = -(\partial\psi/\partial\tau)$; ta frekvenca je različna v različnih točkah prostora.

Iz izraza

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x^0} \frac{\partial x^0}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x^0} \frac{c}{\sqrt{g_{00}}}$$

dobimo

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{g_{00}}}. \quad (88.6)$$

V šibkem gravitacijskem polju velja približek

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{\phi}{c^2}\right). \quad (88.7)$$

Frekvenca svetlobe se povečuje, ko se povečuje absolutna vrednost gravitacijskega potenciala, torej ko se približujemo masivnemu telesu; obratno pa frekvenca upada, ko se od telesa oddaljujemo. Če ima oddani svetlobni žarek v začetni točki, kjer je gravitacijski potencial enak ϕ_1 , frekvenco ω , potem bo imel v ciljni točki, kjer je potencial enak ϕ_2 , frekvenco (merjeno v enotah lastnega časa v tej točki)

$$\frac{\omega}{1 - \frac{\phi_1}{c^2}} \left(1 - \frac{\phi_2}{c^2}\right) = \omega \left(1 + \frac{\phi_1 - \phi_2}{c^2}\right).$$

Črtasti spekter, ki ga oddajajo atomi na površini Sonca, zglada tam enako kot spekter, ki ga isti atomi oddajajo na Zemlji in ga opazujemo tukaj. Če pa z Zemlje opazujemo spekter, ki ga oddajajo atomi na površini Sonca, potem iz predhodno povedanega sledi, da bodo črte premaknjene glede na črte istega spektra, ki ga oddajajo atomi na Zemlji. Vsaka frekvenca črte ω bo premaknjena za

$$\Delta\omega = \frac{\phi_1 - \phi_2}{c^2} \omega, \quad (88.8)$$

kjer sta ϕ_1 oziroma ϕ_2 potenciala gravitacijskega polja v točki, kjer je bila svetloba izsevana, oziroma v točki, kjer spekter opazujemo. Če na Zemlji opazujemo spekter oddan na Soncu ali na zvezdah, potem je $|\phi_1| > |\phi_2|$ in iz (88.8) sledi, da je $\Delta\omega < 0$: spekter se premakne proti nižjim frekvencam. Opisani pojav se imenuje *rdeči premik*.

Pojav lahko neposredno pojasnimo s pomočjo tega, kar vemo o svetovnem času. Ker je polje nespremenljivo, je interval svetovnega časa, med katerim se neko nihanje v sevanju širi od ene točke v prostoru do druge, neodvisen od x^0 . Zato je jasno, da je število nihlajev na enoto svetovnega časa enako v vseh točkah žarka. Toda istemu intervalu svetovnega časa ustreza vedno večji interval lastnega časa, dlje ko smo od teles, ki ustvarjajo polje. Od tod sledi, da se bo frekvenca, torej število nihlajev na enoto lastnega časa, zmanjševala, ko se svetloba oddaljuje od teh mas.

*Integral (88.5) je identično enak nič, če je vsota $g_{0\alpha} dx^\alpha / g_{00}$ točen diferencial neke funkcije prostorskih koordinat. Vendar bi ta rezultat preprosto pomenil to, da imamo v resnici opravka s statičnim poljem, zato lahko vse $g_{0\alpha}$ postavimo na nič s pretvorbo oblike $x^0 \rightarrow x^0 + f(x^\alpha)$.

Med gibanjem delca v nespremenljivem polju, se njegova energija, določena z

$$-c \frac{\partial S}{\partial x^0},$$

odvodom akcije po svetovnem času, ohranja. To sledi iz tega, da x^0 ne nastopa eksplicitno v Hamilton-Jacobijevi enačbi. Energija, ki smo jo definirali na tak način, je časovna komponenta četverca gibalne količine $p_k = m c u_k = m c g_{ki} u^i$. V statičnem polju je $ds^2 = g_{00} (dx^0)^2 - dl^2$ tako, da je energija, ki jo označimo z $\mathcal{E}_0$, enaka

$$\mathcal{E}_0 = m c^2 g_{00} \frac{dx^0}{ds} = m c^2 g_{00} \frac{dx^0}{\sqrt{g_{00} (dx^0)^2 - dl^2}}.$$

Vpeljemo hitrost delca, merjeno v enotah lastnega čas:

$$v = \frac{dl}{d\tau} = \frac{c dl}{\sqrt{g_{00}} dx^0}.$$

To je torej hitrost, ki bi jo izmeril opazovalec v točki, kjer se trenutno nahaja delec. Energijo lahko tedaj zapišemo kot

$$\mathcal{E}_0 = \frac{m c^2 \sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (88.9)$$

To je količina, ki se ohranja med gibanjem delca.

Preprosto lahko dokažemo, da velja izraz (88.9) tudi za stacionarno polje, če je hitrost v merjena v enotah lastnega časa z urami, ki so sinhronizirane po tiru delca. Če se pot delca začne v točki A ob svetovnem času x^0 in končna v infinitezimalno oddaljeni točki B ob času $x^0 + dx^0$, potem hitrosti v tem primeru ne smemo izračunati glede na časovni interval $(x^0 + dx^0) - x^0 = dx^0$, temveč glede na razliko med $x^0 + dx^0$ in trenutkom $x^0 - (g_{0\alpha}/g_{00}) dx^\alpha$, ki je v točki B sočasen s trenutkom x^0 v točki A :

$$(x^0 + dx^0) - \left(x^0 - \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha \right) = dx^0 + \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha.$$

Pomnožimo z $\sqrt{g_{00}}/c$ in dobimo ustrezen interval lastnega časa, tako da je hitrost enaka

$$v^\alpha = \frac{c dx^\alpha}{\sqrt{h} (dx^0 - g_{\alpha} dx^\alpha)}, \quad (88.10)$$

kjer smo uvedli oznake

$$h = g_{00}, \quad g_\alpha = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} \quad (88.11)$$

za tridimenzionalni vektor $\mathbf{g}$ (o katerem je že bilo govora v §84) in za tridimenzionalni skalar g_{00} . Kovariantne komponente hitrosti $\mathbf{v}$ sestavljajo tridimenzionalni vektor v prostoru z metriko $\gamma_{\alpha\beta}$, zato moramo kvadrat hitrosti izračunati z *

$$v_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} v^\beta, \quad v^2 = v_\alpha v^\alpha. \quad (88.12)$$

* V nadaljevanju bomo pogosto uporabljali poleg vektorjev in tenzorjev četvercev tudi tridimenzionalne vektorje in tenzorje, definirane v prostoru z metriko $\gamma_{\alpha\beta}$; te vrste sta na primer vektorja $\mathbf{g}$ in $\mathbf{v}$, ki smo ju že uporabljali. Podobno kot moramo v štirih dimenzijah tenzorske operacije (na primer dviganje in spuščanje indeksov) opraviti z uporabo metričnega tenzorja g_{ik} , moramo v treh dimenzijah v ta namen uporabljati tenzor $\gamma_{\alpha\beta}$. Da se bomo izognili nesporazumom, bomo tridimenzionalne količine označevali z drugimi znaki kot štiridimenzionalne količine.

S tako definirano hitrostjo lahko diferencial ds zapišemo kot

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{00} (dx^0)^2 + 2g_{0\alpha} dx^0 dx^\alpha + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= h (dx^0 - g_\alpha dx^\alpha)^2 - dl^2 \\ &= h (dx^0 - g_\alpha dx^\alpha)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right). \end{aligned} \quad (88.13)$$

Komponente četverne hitrosti

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}$$

so

$$u^\alpha = \frac{v^\alpha}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad u^0 = \frac{1}{\sqrt{h}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{g_\alpha v^\alpha}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (88.14)$$

Energija je

$$\mathcal{E}_0 = mc^2 g_{0i} u^i = mc^2 h (u^0 - g_\alpha u^\alpha),$$

in ko vstavimo (88.14), dobimo (88.9).

V limiti šibkega gravitacijskega polja in nizkih hitrosti lahko vstavimo $g_{00} = 1 + (2\phi/c^2)$ v (88.9) in dobimo približek

$$\mathcal{E}_0 = mc^2 + \frac{mv^2}{2} + m\phi, \quad (88.15)$$

kjer je $m\phi$ potencialna energija delca v gravitacijskem polju. Izraz je skladen z Lagrangevo funkcijo (87.10).

NALOGE

NALOGA 1. Določi silo, ki deluje na naboj v nespremenljivem gravitacijskem polju.

Rešitev: Potrebne komponente Γ_{kl}^i lahko zapišemo kot

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^\alpha &= \frac{1}{2} h^{;\alpha}, \\ \Gamma_{0\beta}^\alpha &= \frac{h}{2} (g_{;\beta}^\alpha - g_\beta^{;\alpha}) - \frac{1}{2} g_\beta h^{;\alpha}, \\ \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha &= \lambda_{\beta\gamma}^\alpha + \frac{h}{2} \left[g_\beta (g_\gamma^{;\alpha} - g_{;\gamma}^\alpha) + g_\gamma (g_\beta^{;\alpha} - g_{;\beta}^\alpha) \right] + \frac{1}{2} g_\beta g_\gamma h^{;\alpha}. \end{aligned} \quad (1)$$

V teh izrazih so vse tenzorske operacije (kovariantno odvajanje, dvigovanje in spuščanje indeksov) opravljene v tridimenzionalnem prostoru z metriko $\gamma_{\alpha\beta}$ z uporabo tridimenzionalnega vektorja g^α in tridimenzionalnega skalarja h (88.11); $\lambda_{\beta\gamma}^\alpha$ je tridimenzionalni Christoffelov simbol, ki ga sestavimo iz komponente tenzorja $\gamma_{\alpha\beta}$ na enak način, kot dobimo Γ_{kl}^i iz komponente g_{ik} ; v računih uporabimo (84.10)-(84.13).

V gibalno enačbo

$$\frac{du^\alpha}{ds} = -\Gamma_{00}^\alpha (u^0)^2 - 2\Gamma_{0\beta}^\alpha u^0 u^\beta - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma$$

vstavimo (1) in uporabimo izraz (88.14) za komponente četverca hitrosti. Po nekaj preprostih pretvorbah dobimo

$$\frac{d}{ds} \frac{v^\alpha}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{h^{;\alpha}}{2h \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - \frac{\sqrt{h}(g_{;\beta}^\alpha - g_\beta^{;\alpha})v^\beta}{c \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - \frac{\lambda_{\beta\gamma}^\alpha v^\beta v^\gamma}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}. \quad (2)$$

Sila $\mathbf{f}$, ki deluje na delec, je odvod gibalne količine delca $\mathbf{p}$ po (sinhroniziranem) lastnem času, ki ga vpeljemo kot tridimenzionalni kovariantni odvod:

$$f^\alpha = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{Dp^\alpha}{ds} = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{d}{ds} \frac{mv^\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \lambda_{\beta\gamma}^\alpha \frac{mv^\beta v^\gamma}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Iz (2) dobimo (zaradi prikladnosti spustimo indeks α):

$$f_\alpha = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left[-\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \ln \sqrt{h} + \sqrt{h} \left(\frac{\partial g_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial x^\beta} \right) \frac{v^\beta}{c} \right],$$

oziroma v običajnem tridimenzionalnem zapisu: *

$$\mathbf{f} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left[-\nabla \ln \sqrt{h} + \sqrt{h} \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{g}) \right]. \quad (3)$$

Opazimo, da ima sila na mirujoče telo [prvi člen v (3)] potencial. Pri majhnih hitrostih se drugi člen v (3) zapiše kot $mc\sqrt{h}\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{g})$, kar je podobno Coriolisovi sili, ki bi se pojavila (v odsotnosti polja) v koordinatnem sistemu, ki se vrti s kotno hitrostjo

$$\Omega = \frac{c}{2} \sqrt{h} \nabla \times \mathbf{g}.$$

NALOGA 2. Izpeljite Fermatovo načelo za gibanje žarka v nespremenljivem gravitacijskem polju.

Rešitev: Fermatovo načelo (§ 53) trdi

$$\delta \int k_\alpha dx^\alpha = 0,$$

* V tridimenzionalnih krivočrtnih koordinatah je enotski antisimetrični tenzor podan z

$$\eta_{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{\gamma} e_{\alpha\beta\gamma}, \quad \eta^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} e^{\alpha\beta\gamma},$$

kjer je $e_{123} = e^{123} = 1$, predznak pa se spremeni ob transpoziciji dveh indeksov [glej (83.13)-(83.14)]. Zato ima vektor $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, ki je definiran kot dualni vektor antisimetričnemu tenzorju $c_{\beta\gamma} = a_\beta b_\gamma - a_\gamma b_\beta$, naslednje komponente:

$$c_\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma} e_{\alpha\beta\gamma} c^{\beta\gamma} = \sqrt{\gamma} e_{\alpha\beta\gamma} a^\beta b^\gamma, \quad c^\alpha = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} e^{\alpha\beta\gamma} c_{\beta\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} e^{\alpha\beta\gamma} a_\beta b_\gamma.$$

Obratno velja

$$c_{\alpha\beta} = \sqrt{\gamma} e_{\alpha\beta\gamma} c^\gamma, \quad c^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} e^{\alpha\beta\gamma} c_\gamma.$$

Tudi $\nabla \times \mathbf{a}$ je vektor, ki je dualen tenzorju $a_{\beta;\alpha} - a_{\alpha;\beta} = (\partial a_\beta / \partial x^\alpha) - (\partial a_\alpha / \partial x^\beta)$, zato so njegove kontravariantne komponente

$$(\nabla \times \mathbf{a})^\alpha = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} e^{\alpha\beta\gamma} \left(\frac{\partial a_\gamma}{\partial x^\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial x^\gamma} \right).$$

Mimogrede naj spomnimo, da je tridimenzionalna divergenca vektorja definirana kot [glej (86.9)]

$$\div \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{\gamma} a^\alpha).$$

Da ne bo težav med primerjanjem z izrazi, ki jih običajno uporabljamo pri tridimenzionalnih vektorskih operacijah v pravokotnih krivočrtnih koordinatah (glej na primer *Elektrodinamika zveznega sredstva*, dodatek), naj poudarimo, da si v teh izrazih kot komponente vektorjev predstavljamo količine $\sqrt{g_{11}}A^1 (= \sqrt{A_1 A^1})$, $\sqrt{g_{22}}A^2$, $\sqrt{g_{33}}A^3$.

kjer moramo integrirati vzdolž poti žarka, integral pa moramo izraziti s frekvenco ω_0 (ki je konstantna vzdolž žarka) in diferenciali koordinat. Upoštevamo, da je $k_0 = -\partial\psi/\partial x^0 = (\omega_0/c)$, in zapišemo

$$\frac{\omega_0}{c} = k_0 = g_{0i}k^i = g_{00}k^0 + g_{0\alpha}k^\alpha = h(k^0 - g_\alpha k^\alpha).$$

To vstavimo v izraz $k_i k^i = g_{ik} k^i k^k = 0$, ki ga v ta namen zapišemo kot

$$h(k^0 - g_\alpha k^\alpha)^2 - \gamma_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = 0,$$

in dobimo

$$\frac{1}{h} \left(\frac{\omega_0}{c} \right)^2 - \gamma_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = 0.$$

Ker mora vektor k^α imeti enako smer kot vektor dx^α , dobimo

$$k^\alpha = \frac{\omega_0}{c\sqrt{h}} \frac{dx^\alpha}{dl},$$

kjer je dl (84.6) diferencial ločne dolžine vzdolž žarka. Zapišemo

$$k^\alpha = g^{\alpha i} k_i = g^{\alpha 0} k_0 + g^{\alpha\beta} k_\beta = -g^\alpha \frac{\omega_0}{c} - \gamma^{\alpha\beta} k_\beta,$$

od koder dobimo izraz za k_α :

$$k_\alpha = -\gamma_{\alpha\beta} \left(k^\beta + \frac{\omega_0}{c} g^\beta \right) = -\frac{\omega_0}{c} \left(\frac{\gamma_{\alpha\beta}}{\sqrt{h}} \frac{dx^\beta}{dl} + g_\alpha \right).$$

Končno pomnožimo z dx^α in dobimo naslednji zapis Fermatovega načela (izpustimo konstantni faktor ω_0/c):

$$\delta \int \left(\frac{dl}{\sqrt{h}} + g_\alpha dx^\alpha \right) = 0.$$

V statičnem polju velja preprosto kar

$$\delta \int \left(\frac{dl}{\sqrt{h}} \right) = 0.$$

Poudarimo naj, da se v gravitacijskem polju žarek ne giblje po najkrajši poti v prostoru, saj bi ta bila določena z enačbo $\delta \int dl = 0$.

§89 Rotacija

Kot posebni primer stacionarnega gravitacijskega polja si oglejmo enakomerno vrteči se opazovalni sistem. Diferencial ds izračunamo tako, da se preselimo iz mirujočega inercialnega sistema v enakomerno rotirajočega se. V koordinatah r', ϕ', z', t mirujočega sistema (uporabljamo cilindrične koordinate), se diferencial zapiše

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr'^2 - r'^2 d\phi'^2 - dz'^2. \quad (89.1)$$

Cilindrične koordinate v vrtečem se sistemu naj bodo r, ϕ in z . Če os vrtenja sovpada z osmi Z in Z' , potem velja $r' = r$, $z' = z$ in $\phi' = \phi + \Omega t$, kjer je Ω kotna hitrost vrtenja. To vstavimo v (89.1) in dobimo iskani izraz za ds^2 v vrtečem se koordinatnem sistemu:

$$ds^2 = (c^2 - \Omega^2 r^2) dt^2 - 2\Omega r^2 d\phi dt - dz^2 - r^2 d\phi^2 - dr^2. \quad (89.2)$$

Opozoriti moramo, da lahko uporabimo vrteči se sistem le do razdalj enakih c/Ω . Iz (89.2) je razvidno, da pri $r > c/\Omega$ postane g_{00} negativen, kar je prepovedano. Neveljavnost vrtečega

opazovalnega sistema pri velikih razdaljah je povezana s tem, da bi hitrost postala večja od svetlobne, kar pomeni, da takšnega opazovalnega sistema ne moremo doseči z realnimi telesi.

Kot v ostalih stacionarnih poljih ur na rotirajočem telesu ne moremo enolično sinhronizirati v vseh točkah. Če sinhronizacijo opravimo po sklenjeni krivulji, bomo po povratku v začetno točko izmerili čas, ki se od začetnega razlikuje za (glej (88.5))

$$\Delta t = -\frac{1}{c} \oint \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha = \frac{1}{c^2} \oint \frac{\Omega r^2 d\phi}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}, \quad (89.3)$$

ali, ob predpostavki $\Omega r/c \ll 1$ (torej da je hitrost vrtenja majhna v primerjavi s svetlobno hitrostjo),

$$\Delta t = \frac{\Omega}{c^2} \int r^2 d\phi = \pm \frac{2\Omega}{c^2} S, \quad (89.4)$$

kjer je S ploščina projekcije območja, ki ga omejuje integracijska kontura, na ravnino, pravokotno na os vrtenja. Predznak $+$ ali $-$ izberemo v skladu s tem, ali kontura poteka v smeri vrtenja ali pa v obratni smeri.

Predpostavimo, da se svetlobni žarek giblje po določeni zaključeni konturi. Izračunajmo do členov reda v/c natančno čas t , ki mine med odhodom žarka in njegovim povratkom v začetno točko. Svetlobna hitrost je po definiciji vedno enaka c , če so ure sinhronizirane po zaključeni krivulji in če v vsaki točki uporabljamo lastni čas. Ker je razlika med lastnim in svetovnim časom reda v^2/c^2 , lahko to razliko zanemarimo pri izračunu časovnega intervala t do členov reda v/c natančno. Zato je

$$t = \frac{L}{c} \pm \frac{2\Omega}{c^2} S,$$

kjer je L dolžina konture. Hitrost svetlobe, izračunana kot razmerje med L in t , je zato

$$c \pm 2\Omega \frac{S}{L}. \quad (89.5)$$

To enačbo, podobno kot prvi približek za Dopplerjev pojav, lahko izpeljemo po povsem klasični poti.

NALOGA

NALOGA Izračunaj diferencial prostorske razdalje v vrtečem se koordinatnem sistemu.

Rešitev: Z uporabo (84.6) in (84.7) dobimo

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + \frac{r^2 d\phi^2}{1 - \Omega^2 \frac{r^2}{c^2}},$$

ki določa geometrijo prostora v vrtečem se opazovalnem sistemu. Opazimo, da je razmerje med obsegom kroga v ravnini $z = \text{konst}$ (s središčem v osi vrtenja) in polmerom r enako

$$2\pi / \sqrt{1 - \Omega^2 r^2 / c^2}.$$

Razmerje je večje od 2π .

§90 Enačbe elektrodinamike v prisotnosti gravitacijskega polja

Enačbe elektromagnetnega polja v posebni teoriji relativnosti lahko preprosto posplošimo tako, da bodo veljale v poljubnem štiridimenzionalnem krivočrtnem koordinatnem sistemu, torej v prisotnosti gravitacijskega polja.

Tenzor elektromagnetnega polja v posebni teoriji relativnosti je definiran kot $F_{ik} = (\partial A_k / \partial x^i) - (\partial A_i / \partial x^k)$. Sedaj moramo definicijo posplošiti v $F_{ik} = A_{k;i} - A_{i;k}$. Zaradi (86.12) pa je

$$F_{ik} = A_{k;i} - A_{i;k} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}, \quad (90.1)$$

zato se povezava med potencialom A_i in F_{ik} ne spremeni. Po obliki ostane enak tudi prvi par Maxwellovih enačb (26.5): *

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0. \quad (90.2)$$

Na poti do drugega para Maxwellovih enačb moramo najprej poiskati četverec toka v krivočrtnih koordinatah. To storimo po postopku, analognemu tistemu iz §28. Diferencialna prostornina, sestavljena iz diferencialov prostorskih koordinat dx^1, dx^2 in dx^3 je $\sqrt{\gamma} dV$, kjer je γ determinanta tenzorja prostorske metrike (84.7) in $dV = dx^1 dx^2 dx^3$. Gostoto naboja ρ vpeljemo po definiciji $de = \rho \sqrt{\gamma} dV$, kjer je de naboj, ki se nahaja znotraj diferencialne prostornine $\sqrt{\gamma} dV$. Enačbo pomnožimo na obeh straneh z dx^i in dobimo

$$de dx^i = \rho dx^i \sqrt{\gamma} dx^1 dx^2 dx^3 = \frac{\rho}{\sqrt{g_{00}}} \sqrt{-g} d\Omega \frac{dx^i}{dx^0}$$

[kjer smo uporabili enačbo $-g = \gamma g_{00}$ (84.11)]. Zmnožek $\sqrt{-g} d\Omega$ je invariantna diferencialna prostornina četvernega prostora, zato četverec toka definiramo z enačbo

$$j^i = \frac{\rho c}{\sqrt{g_{00}}} \frac{dx^i}{dx^0} \quad (90.3)$$

(količine dx^i/dx^0 so hitrosti spreminjanja koordinat s "časom" dx^0 in ne tvorijo četverca). Komponenta j^0 četverca toka, pomnožena z $\sqrt{g_{00}}/c$ je prostorska gostota naboja.

Za točkaste naboje lahko gostoto ρ zapišemo kot vsoto funkcij δ , podobno kot v (28.1). Definicijo funkcij δ moramo posplošiti za uporabo v krivočrtnih koordinatnih sistemih. Zato naj $\delta(\mathbf{r})$ pomeni produkt $\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)$, ne glede na geometrijski pomen koordinat x^1, x^2 in x^3 : tedaj bo integral po dV (in ne po $\sqrt{\gamma} dV$) enak ena: $\int \delta(\mathbf{r}) dV = 1$. Z uporabo te definicije funkcije δ zapišemo gostoto naboja v obliki

$$\rho = \sum_a \frac{e_a}{\sqrt{\gamma}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a),$$

četverec toka pa je

$$j^i = \sum_a \frac{e_a c}{\sqrt{-g}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \frac{dx^i}{dx^0}. \quad (90.4)$$

*Hitro uvidimo, da lahko enačbo zapišemo tudi v obliki

$$F_{ik;l} + F_{li;l} + F_{kl;i} = 0,$$

od koder je njen kovariantni značaj očiten.

Ohranitev naboja zapišemo s kontinuitetno enačbo, ki se od (29.6) razlikuje samo v tem, da navadne odvode zamenjamo s kovariantnimi:

$$j^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} j^i) = 0 \quad (90.5)$$

[pri čemer smo uporabili (86.9)].

Drugi par Maxwellovih enačb (30.2) posplošimo podobno: navadne odvode nadomestimo s kovariantnimi. Dobimo

$$F^i_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} F^{ik}) = -\frac{4\pi}{c} j^i \quad (90.6)$$

[z uporabo enačbe (86.10)].

Enačbo gibanja nabitega delca v gravitacijskem in elektromagnetnem polju dobimo tako, da du^i/ds v enačbi (23.4) nadomestimo z Du_i/ds :

$$mc \frac{Du^i}{ds} = mc \left(\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kl} u^k u^l \right) = \frac{e}{c} F^{ik} u_k. \quad (90.7)$$

NALOGA

NALOGA Zapiši Maxwellove enačbe v izbranem gravitacijskem polju v tridimenzionalni obliki (v tridimenzionalnem prostoru z metriko $\gamma_{\alpha\beta}$). Tridimenzionalna vektorja $\mathbf{E}$ in $\mathbf{D}$, ter antisimetrična tridimenzionalna tenzorja $B_{\alpha\beta}$ in $H_{\alpha\beta}$ vpelji kot

$$\begin{aligned} E_\alpha &= F_{0\alpha} & B_{\alpha\beta} &= F_{\alpha\beta}, \\ D^\alpha &= -\sqrt{g_{00}} F^{0\alpha} & H^{\alpha\beta} &= \sqrt{g_{00}} F^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (90.8)$$

Rešitev: Zgoraj vpeljane količine niso med seboj neodvisne. Zapišemo enačbi

$$F_{0\alpha} = g_{0l} g_{\alpha m} F^{lm}, \quad F^{\alpha\beta} = g^{\alpha l} g^{\beta m} F_{lm},$$

in vpeljemo tridimenzionalni metrični tenzor $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + h g_\alpha g_\beta$ [z $\mathbf{g}$ in h iz (88.11)]. Uporabimo enačbi (84.10) in (84.13) in dobimo

$$D_\alpha = \frac{E_\alpha}{\sqrt{h}} + g^\beta H_{\alpha\beta}, \quad B^{\alpha\beta} = \frac{H^{\alpha\beta}}{\sqrt{h}} + g^\beta E^\alpha - g^\alpha E^\beta. \quad (1)$$

Vpeljemo še vektorja $\mathbf{B}$ in $\mathbf{H}$, ki sta dualna tenzorjema $B_{\alpha\beta}$ in $H_{\alpha\beta}$:

$$B^\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{\gamma}} e^{\alpha\beta\gamma} B_{\beta\gamma}, \quad H_\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{\gamma} e_{\alpha\beta\gamma} H^{\beta\gamma} \quad (2)$$

(glej opombo na strani 253; znak minus smo dodali zato, da sta v Galilejevem koordinatnem sistemu vektorja $\mathbf{H}$ in $\mathbf{B}$ enaka običajnim jakostim magnetnega polja). Sedaj lahko (2) zapišemo kot

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E}}{\sqrt{h}} + \mathbf{H} \times \mathbf{g}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{h}} + \mathbf{g} \times \mathbf{E}. \quad (3)$$

Definicije (1) uporabimo v enačbi (90.2) in dobimo enačbi

$$\frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial B_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial B_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial x^0} + \frac{\partial E_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial E_\beta}{\partial x^\alpha} = 0.$$

Ko uporabimo dualne količine (3), od tod sledi

$$\div \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\gamma} \mathbf{B})$$

($x^0 = ct$; definiciji operacij divergence in rotorja smo podali v opombi na strani 253). Podobno dobimo iz (90.6) enačbi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{h} D^\alpha) &= 4\pi\rho, \\ \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\sqrt{\gamma} H^{\alpha\beta}) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^0} (\sqrt{\gamma} D^\alpha) &= -4\pi\rho \frac{dx^\alpha}{dx^0}, \end{aligned}$$

ali v tridimenzionalnem zapisu

$$\div \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\gamma} \mathbf{D}) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{s}, \quad (4)$$

kjer je $\mathbf{s}$ vektor s komponentami $s^\alpha = \rho dx^\alpha / dt$.

Zapišimo še kontinuitetno enačbo (90.5) v tridimenzionalni obliki:

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\gamma} \rho) + \div \mathbf{s} = 0. \quad (5)$$

Bralec lahko opazi (povsem formalno) analogijo med enačbami (5) in (6) ter enačbami za elektromagnetno polje v snovi. Če je polje statično, odpade količina $\sqrt{\gamma}$ iz členov s časovnimi odvodi in enačba (4) se poenostavi na $\mathbf{D} = \mathbf{E}/\sqrt{h}$, $\mathbf{B} = \mathbf{H}/\sqrt{h}$. Rekli bi lahko, da kar se tiče njegovih učinkov na elektromagnetno polje, statično gravitacijsko polje igra vlogo sredstva z električno in magnetno permeabilnostjo $\epsilon = \mu = 1/\sqrt{h}$.

Poglavje 11

Enačbe gravitacijskega polja

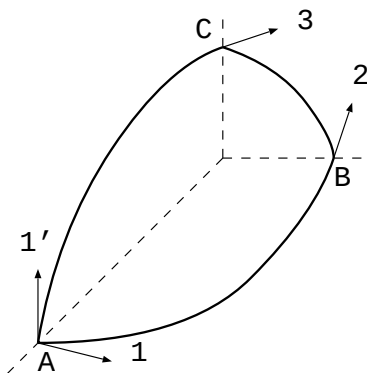
§91 Krivinski tenzor

Vrnimo se k pojmu vzporednega premika vektorja. Kot smo zapisali v §85, je v splošnem ukrivljenem četvernem prostoru infinitezimalni vzporedni premik vektorja definiran kot premik, pri katerem se komponente vektorja ne spremenijo v koordinatnem sistemu, ki je Galilejev v izbranem infinitezimalnem delu prostora.

Če je $x^i = x^i(s)$ parametrična enačba neke krivulje, pri čemer je s ločna dolžina, merjena iz poljubno izbrane točke, tedaj je vektor $u^i = dx^i/ds$ enotski tangentni vektor na krivuljo. Če je obravnavana krivulja geodetka, potem je $Du^i = 0$. To pomeni sledeče. Vektor u_i vzporedno premaknemo iz točke x^i v točko $x^i + dx^i$ na isti krivulji. Dobljeni vektor je enak vektorju $u^i + du^i$, ki je tangenta na geodetko v točki $x^i + dx^i$. Ko se tangenta na geodetko premika po krivulji, se torej premika vzporedno sama nase.

Med vzporednim premikanjem dveh vektorjev se “kot” med njima ne spreminja. To pomeni, da se med vzporednim premikanjem poljubnega vektorja po geodetki kot med tem vektorjem in tangento na geodetko ne spremeni. Z drugimi besedami, med vzporednim premikanjem vektorja se njegova komponenta v smeri geodetke ohranja.

Sedaj pridemo do zelo pomembne ugotovitve, da je pri vzporednem premiku vektorja iz ene v drugo točko v ukrivljenem prostoru dobljeni vektor odvisen od poti, po kateri smo vektor premikali. To pomeni tudi, da če vektor vzporedno premaknemo po sklenjeni konturi, po povratku v začetno točko dobljeni vektor ne bo enak začetnemu.



Slika 16:

To lahko nazorno ilustriramo na primeru ukrivljenega dvodimenzionalnega prostora, torej ukrivljene ploskve. Slika 16 prikazuje del takšne površine, omejen s tremi geodetskimi. Vektor 1 vzporedno premaknemo vzdolž konture, sestavljene iz treh geodetk. Med premikanjem po krivulji AB je vektor 1 ves čas pod istim kotom glede na krivuljo in dobimo vektor 2. Podobno dobimo po premiku po krivulji BC vektor 3. Končno dobimo, po premiku iz C v A , vektor $1'$, ki ne sovпада z vektorjem 1.

Sedaj bomo izpeljali enačbo, ki podaja spremembo vektorja med vzporednim premikom po poljubni infinitezimalni sklenjeni konturi. To spremembo ΔA_k lahko seveda zapišemo v obliki $\oint \delta A_k$, kjer integriramo po izbrani konturi. Količino δA_k nadomestimo z izrazom (85.5) in dobimo

$$\Delta A_k = \oint \Gamma_{kl}^i A_i dx^l \quad (91.1)$$

(vektor A_i pod integralom se med gibanjem po konturi spreminja).

Pri nadaljnjih pretvorbah integrala moramo upoštevati sledeče. Vrednosti vektorja A_i v točkah znotraj konture niso enolične; odvisne so od poti, po kateri do njih pridemo. Kot pa bomo razbrali iz spodnjega rezultata, je ta enoličnost povezana s členi drugega reda. Zato smemo z natančnostjo do prvega reda, ki pa zadostuje za pretvorbo integrala, smatrati, da so komponente vektorja A_i v točkah v notranjosti infinitezimalne konture enolično določene z vrednostmi na konturi po enačbi $\delta A_i = \Gamma_{il}^n A_n dx^l$, torej z odvodi

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^l} = \Gamma_{il}^n A_n. \quad (91.2)$$

Sedaj integral (91.1) pretvorimo s pomočjo Stokesovega izreka (6.19). Naj ima površina, ki jo omejuje kontura, infinitezimalno vrednost Δf^{lm} . Dobimo

$$\begin{aligned} \Delta A_k &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\Gamma_{km}^i A_i)}{\partial x^l} - \frac{\partial(\Gamma_{kl}^i A_i)}{\partial x^m} \right] \Delta f^{lm} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^l} A_i - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^m} A_i + \Gamma_{km}^i \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma_{kl}^i \frac{\partial A_i}{\partial x^m} \right] \Delta f^{lm}. \end{aligned}$$

Vstavimo vrednosti odvodov iz (91.2) in končno dobimo

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} R^i_{klm} A_i \Delta f^{lm}, \quad (91.3)$$

kjer je R^i_{klm} tenzor četrtega reda

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^m} + \Gamma_{nl}^i \Gamma_{km}^n - \Gamma_{nm}^i \Gamma_{kl}^n. \quad (91.4)$$

Da je R^i_{klm} tenzor, je razvidno iz enačbe (91.3), kjer je leva stran enačbe vektor – razlika ΔA_k vrednosti dveh vektorjev v isti točki. Tenzor R^i_{klm} se imenuje *krivinski tenzor* ali *Riemannov tenzor*.

Preprosto izpeljemo podobno enačbo za kontravariantni tenzor A^k . Upoštevamo, da se ob vzporednem premiku skalar ne spremeni, torej $\Delta(A^k B_k) = 0$, kjer je B_k poljubni kovariantni vektor. S pomočjo (91.3) dobimo

$$\Delta(A^k B_k) = A^k \Delta B_k + B_k \Delta A^k = \frac{1}{2} A^k B_i R^i_{klm} \Delta f^{lm} + B_k \Delta A^k = B_k (\Delta A^k + \frac{1}{2} A^i R^k_{ilm} \Delta f^{lm}) = 0,$$

oziroma, ker je B_k poljuben,

$$\Delta A^k = -\frac{1}{2}R^k_{ilm}A^i\Delta f^{lm}. \quad (91.5)$$

Če vektor A_i dvakrat kovariantno odvajamo, po x^k in po x^l , potem je rezultat v splošnem odvisen od vrstnega reda odvajanja, kar se razlikuje od lastnosti običajnega odvajanja. Izkaže se, da razliko $A_{i;k;l} - A_{i;l;k}$ podaja isti krivinski tenzor, ki smo ga pravkar vpeljali. Dobimo namreč enačbo

$$A_{i;k;l} - A_{i;l;k} = A_m R^m_{ikl}, \quad (91.6)$$

ker lahko preprosto preverimo z neposrednim izračunom v lokalno geodetskem koordinatnem sistemu. Podobno enačbo dobimo tudi za kontravariantni vektor: *

$$A^i_{;k;l} - A^i_{;l;k} = -A^m R^i_{mkl}. \quad (91.7)$$

Podobne enačbe veljajo tudi za druge odvode tenzorjev. Najlažje jih dobimo, če uporabimo tenzor oblike $A_i B_k$ in upoštevamo enačbi (91.6) in (91.7). Zaradi linearnosti morajo dobljeni izrazi veljati za poljuben tenzor A_{ik} . Tako dobimo

$$A_{ik;l;m} - A_{ik;m;l} = A_{in} R^n_{klm} + A_{nk} R^n_{ilm}. \quad (91.8)$$

V ravnem prostoru je krivinski tenzor enak nič, saj lahko v ravnem prostoru izberemo takšne koordinate, da so Γ^i_{kl} povsod enaki nič, od koder takoj sledi $R^i_{klm} = 0$. Ker je R^i_{klm} tenzor, je enak nič tudi v vseh drugih koordinatnih sistemih. To je povezano s tem, da je v ravnem prostoru vzporeden premik enolična operacija. Če vektor premaknemo po sklenjeni konturi, se ne bo spremenil.

Velja pa tudi obratno: če je $R^i_{klm} = 0$, potem je prostor raven. V vsakem prostoru si lahko izberemo koordinatni sistem, ki je Galilejski v infinitezimalno majhnem območju. Če je $R^i_{klm} = 0$, potem je vzporedni premik enolična operacija, in z vzporednimi premiki Galilejskega sistema iz infinitezimalnega območja v preostale točke prostora lahko sestavimo opazovalni sistem, ki je Galilejski po celotnem prostoru. Takšen prostor pa mora biti Evklidski. Konec dokaza.

To, ali je krivinski tenzor enak nič ali ne, je torej kriterij, ki določa, ali je prostor raven ali ukrivljen.

Opozoriti moramo, da si lahko v ukrivljenem prostoru izberemo opazovalni sistem, ki je lokalno geodetski v dani točki, vendar pa to še ne pomeni, da bo zato tudi krivinski tenzor enak nič v tej isti točki (količini Γ^i_{kl} so sicer enake nič, to pa ne velja za odvode).

NALOGE

NALOGA 1. Izračunaj četverec relativnega pospeška med dvema delcema, ki se gibljeta po infinitezimalno bližnjima geodetkama.

Rešitev: Oglejmo si družino geodetk, ki se med seboj ločijo po vrednosti nekega parametra v ; to pomeni, da lahko koordinate svetovnih točk zapišemo kot funkcije $x^i = x^i(s, v)$, tako da je ta funkcija enačba geodetke za vsako vrednost v (s je dolžina intervala, merjenega vzdolž svetovnice od presečišča svetovnice z neko hiperploskvijo). Vpeljemo četverec

$$\eta^i = \frac{\partial x^i}{\partial v} \delta v \equiv v^i \delta v,$$

*Enačbo (91.7) lahko izpeljemo tudi neposredno iz (91.6), tako da dvignemo indeks i in upoštevamo simetrijske lastnosti tenzorja R_{iklm} (glej § 92).

ki povezuje točki na neskončno bližnjih geodetkah (ki ustrezata vrednostim parametra v in $v + dv$) z isto vrednostjo s .

Iz definicije kovariantnega odvoda in enakosti $\partial u^i / \partial v = \partial v^i / \partial s$ (kjer je $u^i = \partial x^i / \partial s$) sledi

$$u^i{}_{;k} v^k = v^i{}_{;k} u^k. \quad (1)$$

Sedaj si oglejmo drugi odvod

$$\frac{D^2 v^i}{ds^2} \equiv (v^i{}_{;k} u^k)_{;l} u^l = u^i{}_{;k;l} v^k u^l + u^i{}_{;k} v^k{}_{;l} u^l.$$

Z uporabo izraza (1) ponovno preoblikujemo drugi člen in spremenimo vrstni red kovariantnega odvajanja v prvem členu z uporabo (91.7). Dobimo

$$\frac{D^2 v^i}{ds^2} = (u^i{}_{;l} u^l)_{;k} v^k + u^m R^i{}_{mkl} u^k v^l.$$

Prvi člen je enak nič, saj vzdolž geodetke velja $u^i{}_{;l} u^l = 0$. Vstavimo konstantni faktor δv in dobimo končni izraz

$$\frac{D^2 \eta^i}{ds^2} = R^i{}_{klm} u^k u^l \eta^m, \quad (2)$$

ki se imenuje geodetski uklon.

NALOGA 2. Zapiši Maxwellove enačbe v odsotnosti nabojev za četverni potencial v Lorentzevi umeritvi.

Rešitev: Kovariantna posplošitev pogoja (46.9) je

$$A^i{}_{;i} = 0. \quad (1)$$

Z uporabo enačbe (91.7) lahko Maxwellove enačbe zapišemo kot

$$F_{ik}{}^{;k} = A_{k;i}{}^{;k} - A_{i;k}{}^{;k} = A_k{}^{;k}{}_{;i} + A^m R_{im} - A_{i;k}{}^{;k} = 0,$$

kjer je R_{ik} definiran z (92.7). Nato upoštevamo enačbo (1) in dobimo

$$A_{i;k}{}^{;k} - R_{ik} A^k = 0. \quad (2)$$

§92 Lastnosti krivinskega tenzorja

Krivinski tenzor ima simetrijske lastnosti, ki postanejo očitne, ko spremenimo mešane komponente $R^i{}_{klm}$ v kovariantne:

$$R_{iklm} = g_{in} R^n{}_{klm}.$$

S pomočjo preprostih pretvorb dobimo naslednji izraz:

$$R_{iklm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l} \right) + g_{np} (\Gamma_{kl}^n \Gamma_{im}^p - \Gamma_{km}^n \Gamma_{il}^p). \quad (92.1)$$

Iz tega izraza takoj razberemo naslednje simetrijske lastnosti:

$$R_{iklm} = -R_{kil m} = -R_{ikml} \quad (92.2)$$

$$R_{iklm} = R_{lmik}, \quad (92.3)$$

kar pomeni, da je tenzor antisimetričen v parih indeksov i, k in l, m , ter simetričen na zamenjavo istih parov indeksov med seboj. Zaradi antisimetričnosti so vse komponente R_{iklm} , pri katerih je $i = k$ ali $l = m$, enake nič.

Preverimo lahko tudi, da je ciklična vsota komponent R_{iklm} , ki jo dobimo s permutacijo poljubnih treh indeksov, enaka nič. Na primer

$$R_{iklm} + R_{imkl} + R_{ilmk} = 0. \quad (92.4)$$

[Ostale enačbe te vrste takoj sledijo iz (92.4) zaradi lastnosti (92.2) in (92.3).]

Dokažemo lahko tudi Bianchijevo identiteto:

$$R^n{}_{ikl;m} + R^n{}_{imk;l} + R^n{}_{ilm;k} = 0. \quad (92.5)$$

Identiteto najlažje preverimo v lokalno geodetskem koordinatnem sistemu. Zaradi njenega tenzorskega značaja bo enačba (92.5) veljala tudi v vseh ostalih koordinatnih sistemih. Enačbo (91.4) odvajamo, vanjo vstavimo $\Gamma_{kl}^i = 0$ in dobimo

$$R^n{}_{ikl;m} = \frac{\partial R^n{}_{ikl}}{\partial x^m} = \frac{\partial^2 \Gamma_{il}^n}{\partial x^m \partial x^k} - \frac{\partial^2 \Gamma_{ik}^n}{\partial x^m \partial x^l}. \quad (92.6)$$

Z uporabo tega izraza se hitro prepričamo, da (92.5) dejansko velja.

Iz krivinskega tenzorja dobimo po skrčitvi tenzor drugega reda. Takšna skrčitev je ena sama: pri skrčitvi tenzorja R_{iklm} po indeksih i in k ali l in m dobimo nič zaradi antisimetričnosti teh indeksov, pri skrčitvi po poljubnem drugem paru pa dobimo enak rezultat (do predznaka natančno). Tenzor R_{ik} (*Riccijev tenzor*) vpeljemo torej kot *

$$R_{ik} = g^{lm} R_{limk} = R^l{}_{ilk}. \quad (92.7)$$

Upoštevamo (91.4) in dobimo

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{il}^l}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l. \quad (92.8)$$

Tenzor je očitno simetričen:

$$R_{ik} = R_{ki}. \quad (92.9)$$

Če skrčimo še R_{ik} dobimo invarianto

$$R = g^{ik} R_{ik} = g^{il} g^{km} R_{iklm}, \quad (92.10)$$

ki se imenuje *skalarna ukrivljenost* prostora.

Komponente tenzorja R_{ik} zadoščajo diferencialni identiteti, ki jo dobimo s skrčitvijo Bianchijeve identitete (92.5) po parih indeksov ik in ln :

$$R^l{}_{m;l} = \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x^m}. \quad (92.11)$$

Zaradi relacij (92.2), (92.3) in (92.4) vse komponente tenzorja niso med seboj neodvisne. Poiščimo število neodvisnih komponent.

Zgornja definicija krivinskega tenzorja velja za poljubno dimenzionalen prostor. Oglejmo si najprej dvodimenzionalni primer, torej običajno ploskev. Zaradi lažjega ločevanja s štiridimenzionalnimi količinami bomo tukaj označili krivinski tenzor z P_{abcd} , metrični tenzor

*V literaturi najdemo tudi drugačno definicijo tega tenzorja, po kateri tenzor R_{ik} dobimo s skrčitvijo prvega in zadnjega indeksa. Ta definicija se od naše razlikuje le po nasprotnem predznaku.

z γ_{ab} , indeksi $a, b, \dots$ pa tečejo po vrednostih 1 in 2. Ker morata biti v vsakem paru ab in cd indeksa različna, je očitno, da so vse od nič različne komponente tenzorja enake ali pa se razlikujejo za predznak. V tem primeru imamo torej eno samo komponent, na primer P_{1212} . Hitro se lahko prepričamo, da je skalarna ukrivljenost enaka

$$P = \frac{2P_{1212}}{\gamma}, \quad \gamma \equiv |\gamma_{ab}| = \gamma_{11}\gamma_{22} - (\gamma_{12})^2. \quad (92.12)$$

Količina $P/2$ je enaka *Gaussovi ukrivljenosti* ploskve K :

$$\frac{P}{2} = K = \frac{1}{\rho_1\rho_2}, \quad (92.13)$$

kjer sta ρ_1 in ρ_2 glavna krivinska polmera ploskve v izbrani točki (ρ_1 in ρ_2 imata isti predznak, če ležita ustrezni središči pritisnjenih krogov na isti strani ploskve in nasprotna predznaka, če ti točki ležita na različnih straneh ploskve; v prvem primeru je $K > 0$, v drugem pa $K < 0$).

*

Oglejmo si krivnski tenzor v tridimenzionalnem prostoru; označimo ga z $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$, metrični tenzor z $\gamma_{\alpha\beta}$, indeksi $\alpha, \beta, \dots$ pa tečejo od 1 do 3. Para indeksov $\alpha\beta$ in $\gamma\delta$ imata lahko tri različne vrednosti: 23, 31 in 12 (permutacija dveh indeksov samo spremeni predznak komponente tenzorja). Ker je tenzor $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ simetričen na zamenjavo teh parov, imamo skupno $3 \cdot 2/2$ neodvisnih komponent z različnima paroma indeksov in tri komponente z enakima paroma. Identiteta (92.4) ne prinese dodatne omejitve. V tridimenzionalnem prostoru ima zato krivnski tenzor šest neodvisnih komponent. Simetrični tenzor $P_{\alpha\beta}$ ima enako število neodvisnih komponent. Zato lahko s pomočjo linearne enačbe $P_{\alpha\beta} = g^{\gamma\delta} P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ vse komponente tenzorja $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ izrazimo z $P_{\alpha\beta}$ in metričnim tenzorjem $\gamma_{\alpha\beta}$ (glej prvo nalogo). Če si izberemo koordinatni sistem, ki je kartezičen v izbrani točki, potem lahko s primerno rotacijo tenzor $P_{\alpha\beta}$ diagonaliziramo. † Zato je krivnski tenzor v izbrani točki tridimenzionalnega prostora določen s tremi količinami. ‡

Končno si oglejmo še štiridimenzionalni prostor. Para indeksov ik in lm v tem primeru tečeta po šestih različnih parih vrednosti: 01, 02, 03, 23, 31, 12. Obstaja šest komponent tenzorja P_{iklm} z enakima paroma indeksov in $6 \cdot 5/2$ z različnima paroma indeksov. Zadnji

*Izraz (92.13) hitro dobimo, če enačbo ploskve v bližini izbrane točke ($x = y = 0$) zapišemo kot $z = (x^2/2\rho_1) + (y^2/2\rho_2)$.

Kvadrat ločne dolžine na ploskvi je tedaj

$$dl^2 = \left(1 + \frac{x^2}{\rho_1^2}\right) dx^2 + \left(1 + \frac{y^2}{\rho_2^2}\right) dy^2 + 2\frac{xy}{\rho_1\rho_2} dx dy.$$

Če izračunamo P_{1212} v točki $x = y = 0$ z uporabo (92.1) (pri čemer potrebujemo le druge odvode tenzorja $\gamma_{\alpha\beta}$), dobimo (92.13).

†Pri računanju lastnih vrednosti tenzorja $P_{\alpha\beta}$ ni potrebe, da bi opravili prehod v koordinatni sistem, ki je v izbrani točki kartezičen. Lastne vrednosti lahko določimo tako, da izračunamo korene enačbe $|P_{\alpha\beta} - \lambda\gamma_{\alpha\beta}| = 0$.

‡Poznavanje tenzorja $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ nam omogoča določiti Gaussovo ukrivljenost K poljubne ploskve v prostoru. Omenimo naj, da če x^1, x^2 in x^3 tvorijo pravokotni koordinatni sistem, potem je

$$K = \frac{P_{1212}}{\gamma_{11}\gamma_{22} - (\gamma_{12})^2}$$

Gaussova ukrivljenost "ravnine" pravokotne (v izbrani točki) na os x^3 ; z "ravnino" imamo v mislih ploskev, ki jo tvorijo geodetke.

pa niso vsi med seboj neodvisni; tri komponente, pri katerih so vsi štirje indeksi različni, so povezani z identiteto (92.4):

$$R_{0123} + R_{0312} + R_{0231} = 0. \quad (92.14)$$

V štiridimenzionalnem prostoru ima krivinski tenzor dvajset med seboj neodvisnih komponent.

Izberemo si opazovalni sistem, ki je v obravnavani točki Galilejski, in ga zasukamo (pri tem se komponente g_{ik} v dani točki ne spremenijo) na tak način, da postavimo šest komponent krivinskega tenzorja na nič (to lahko storimo, ker obstaja šest med seboj neodvisnih rotacij v štiridimenzionalnem koordinatnem sistemu). Zato je v splošnem ukrivljenost četrtega prostora določena s šestnajstimi količinami.

Če je $R_{ik} = 0$, * ima krivinski tenzor deset neodvisnih komponent v poljubnem koordinatnem sistemu. Z ustreznimi transformacijami lahko tenzor R_{iklm} (v izbrani točki četrtega prostora) pretvorimo v "kanonično" obliko, v kateri lahko komponente v splošnem izrazimo s štirimi neodvisnimi količinami; v posebnih primerih je to število lahko še manjše.

Če pa je $R_{ik} \neq 0$, potem lahko uporabimo isto klasifikacijo krivinskega tenzorja, če od njega odštejemo posebni del, ki ga izrazimo s komponentami R_{ik} . Sestavimo tenzor †

$$C_{iklm} = R_{iklm} - \frac{1}{2}R_{il}g_{km} + \frac{1}{2}R_{im}g_{kl} + \frac{1}{2}R_{kl}g_{im} - \frac{1}{2}R_{km}g_{il} + \frac{1}{6}R(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl}). \quad (92.15)$$

Hitro se lahko prepričamo, da ima ta tenzor enake simetrijske lastnosti kot tenzor R_{iklm} , ima pa dodatno lastnost, da postane enak nič po skrčitvi para indeksov il ali km .

Oglejmo si sedaj klasifikacijo možnih kanoničnih oblik krivinskega tenzorja, ko je $R_{ik} = 0$. (A. Z. Petrov, 1950).

Predpostavimo, da smo metriko v dani točki četrtega prostora privedli na Galilejsko obliko. Množico dvajsetih neodvisnih komponent tenzorja R_{iklm} zapišemo s tremi tridimenzionalnimi tenzorji, definiranimi z

$$A_{\alpha\beta} = R_{0\alpha 0\beta}, \quad C_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}e_{\alpha\gamma\delta}e_{\beta\lambda\mu}R_{\gamma\delta\lambda\mu}, \quad B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}e_{\alpha\gamma\delta}R_{0\beta\gamma\delta}. \quad (92.16)$$

($e_{\alpha\beta\gamma}$ je enotski antisimetrični tenzor; ker je tridimenzionalna metrika kartezična, ni potrebno razlikovati med spodnjimi in zgornjimi indeksi). Tenzorja $A_{\alpha\beta}$ in $C_{\alpha\beta}$ sta po definiciji simetrična; tenzor $B_{\alpha\beta}$ je antisimetričen, njegova sled pa je enaka nič zaradi (92.14). Po definiciji (92.16) imamo, na primer,

$$B_{11} = R_{0123}, \quad B_{21} = R_{0131}, \quad B_{31} = R_{0112}, \quad C_{11} = R_{2323}, \dots$$

Hitro uvidimo, da je pogoj $R_{km} = g^{il}R_{iklm} = 0$ ekvivalenten naslednjim povezavam med komponentami tenzorjev (92.16):

$$A_{\alpha\alpha} = 0, \quad B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha}, \quad A_{\alpha\beta} = -C_{\alpha\beta}. \quad (92.17)$$

*Kasneje (v § 95) bomo videli, da krivinski tenzor za gravitacijsko polje v vakuumu ima to lastnost.

†Ta dolgi izraz lahko zapišemo bolj strnjeno kot

$$C_{iklm} = R_{iklm} - R_{l[i}g_{k]m} + R_{m[i}g_{k]l} + \frac{1}{3}R_{l[i}R_{k]m},$$

kjer oglata oklepaja označujeta antisimetrizacijo po indeksih, ki jih oklepaja okvirjata:

$$A_{[ik]} = \frac{1}{2}(A_{ik} - A_{ki}).$$

Tenzor (92.15) se imenuje *Weylov tenzor*.

Vpeljemo simetričen kompleksen tenzor

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta} + 2iB_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta}) = A_{\alpha\beta} + iB_{\alpha\beta}. \quad (92.18)$$

Ta kombinacija dveh realnih tridimenzionalnih tenzorjev $A_{\alpha\beta}$ in $B_{\alpha\beta}$ v enega kompleksnega je podobna kombinaciji (glej §25) dveh vektorjev $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ v en kompleksni vektor $\mathbf{F}$, posledična povezava med $D_{\alpha\beta}$ in tenzorjem četvercem R_{iklm} pa je podobna povezavi med $\mathbf{F}$ in četvernim tenzorjem F_{ik} . Iz tega sledi, da so štiridimenzionalni zasuki tenzorja R_{iklm} ekvivalentni tridimenzionalnim kompleksnim zasukom tenzorja $D_{\alpha\beta}$.

Definiramo lahko lastne vrednosti $\lambda = \lambda' + i\lambda''$ in (v splošnem kompleksne) lastne vektorje n_α . To se rešitve sistema enačb

$$D_{\alpha\beta}n_\beta = \lambda n_\alpha. \quad (92.19)$$

Količine λ so invariante krivinskega tenzorja. Ker je sled $D_{\alpha\alpha} = 0$, je vsota korenov enačbe (92.19) enaka nič:

$$\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \lambda^{(3)} = 0. \quad (92.20)$$

Glede na število neodvisnim lastnih vektorjev n_α dobimo naslednjo klasifikacijo različnih primerov redukcije krivinskega tenzorja na tri *kanonične tipe Petrova*:

(I) Obstajajo trije neodvisni lastni vektorji. V tem primeru so njihovi kvadrati $n_\alpha n^\alpha$ različni od nič in z ustrezno rotacijo lahko tenzor $D_{\alpha\beta}$ (in s tem $A_{\alpha\beta}$ in $B_{\alpha\beta}$) diagonaliziramo:

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)'} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)'} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(1)'} - \lambda^{(2)'} \end{pmatrix}, \quad B_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)''} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)''} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(1)''} - \lambda^{(2)''} \end{pmatrix}. \quad (92.21)$$

V tem primeru ima krivinski tenzor štiri med seboj neodvisne invariante. *

Kompleksni invarianti $\lambda^{(1)}$ in $\lambda^{(2)}$ lahko izrazimo algebraično s kompleksnima skalarjema

$$I_1 = \frac{1}{48}(R_{iklm}R^{iklm} - iR_{iklm}{}^*R^{iklm}), \quad (92.22)$$

$$I_2 = \frac{1}{96}(R_{iklm}R^{lmpr}R_{pr}{}^{ik} + iR_{iklm}R^{lmpr}{}^*R_{pr}{}^{ik}),$$

kjer zvezdica nad simbolom označuje dualni tenzor

$${}^*R_{iklm} = \frac{1}{2}E_{ikpr}R^{pr}{}_{lm}. \quad (92.23)$$

Količini I_1 in I_2 izračunamo z uporabo vrednosti iz (92.21) in dobimo

$$I_1 = \frac{1}{3}(\lambda^{(1)2} + \lambda^{(2)2} + \lambda^{(3)2}), \quad I_2 = \frac{1}{2}\lambda^{(1)}\lambda^{(2)}(\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}). \quad (92.24)$$

Ta izraza omogočata izračun količin $\lambda^{(1)}$ in $\lambda^{(2)}$ z vrednostmi R_{iklm} v poljubnem opazovalnem sistemu.

(II) Obstajata dva neodvisna lastna vektorja. Kvadrat enega izmed njiju je enak nič, tako da tega vektorja ne moremo izbrati za smer ene izmed koordinatnih osi. Lahko pa si izberemo, da leži v ravnini x^1, x^2 : tedaj je $n_2 = in_1$ in $n_3 = 0$. Enačbe (92.19) se v tem primeru glasijo

$$D_{11} + iD_{12} = \lambda, \quad D_{22} - iD_{12} = \lambda,$$

*Degeneriran primer, ko je $\lambda^{(1)'} = \lambda^{(2)'}$, $\lambda^{(1)''} = \lambda^{(2)''}$, se v literaturi imenuje tip D .

tako da je

$$D_{11} = \lambda - i\mu, \quad D_{22} = \lambda + i\mu, \quad D_{12} = \mu.$$

kompleksna količina $\lambda = \lambda' + \lambda''$ je skalar in je s transformacijami ne moremo spremeniti. Toda količina μ ima lahko poljubno od nič različno vrednost, če opravimo primerno kompleksno rotacijo; predpostavimo lahko, da ima μ realno vrednost, ne da bi izgubili na splošnosti. Tako dobimo naslednjo kanonično obliko realnih tenzorjev $A_{\alpha\beta}$ in $B_{\alpha\beta}$:

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \lambda' & \mu & 0 \\ \mu & \lambda' & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda' \end{pmatrix}, \quad B_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \lambda'' - \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda'' + \mu & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda'' \end{pmatrix}. \quad (92.25)$$

V tem primeru obstajate le dve invarianti λ' in λ'' . Iz (92.25) dobimo $I_1 = \lambda^2$, $I_2 = \lambda^3$, tako da je $I_1^3 = I_2^2$.

(III) Obstaja en sam lastni vektor, katerega kvadrat je enak nič. Vse lastne vrednosti λ so tedaj enake nič. Rešitev enačb (92.19) lahko zapišemo v obliki $D_{11} = D_{22} = D_{12} = 0$, $D_{13} = \mu$, $D_{23} = i\mu$, tako da je

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & \mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (92.26)$$

V tem primeru krivinski tenzor sploh nima invariant. Opravka imamo s prav posebnim primerom: prostor čas je ukrivljen, ne obstaja pa nobena invarianta, ki bi igrala vlogo mere ukrivljenosti. *

NALOGE

NALOGA 1. Zapiši krivinski tenzor $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ tridimenzionalnega prostora s tenzorjem drugega reda $P_{\alpha\beta}$.

Rešitev: Iščemo $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ oblike

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = A_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta} - A_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma} + A_{\beta\gamma}\gamma_{\alpha\delta} - A_{\beta\delta}\gamma_{\alpha\gamma},$$

ki zadošča vsem simetrijskim zahtevam; $A_{\alpha\beta}$ je nek simetrični tenzor, čigar povezavo z $P_{\alpha\beta}$ določimo tako, da zgoraj zapisani izraz skržimo po indeksih α in γ . Tako dobimo

$$P_{\alpha\beta} = A\gamma_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}, \quad A_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}P\gamma_{\alpha\beta},$$

končni izraz pa je

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = P_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta} - P_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma} + P_{\beta\gamma}\gamma_{\alpha\delta} - P_{\beta\delta}\gamma_{\alpha\gamma} + \frac{P}{2}(\gamma_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma} - \gamma_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta}).$$

NALOGA 2. Izračunaj komponente tenzorjev R_{iklm} in R_{ik} za metriko, v kateri je $g_{ik} = 0$ za $i \neq k$.

Rešitev: Od nič različne komponente metričnega tenzorja zapišemo kot

$$g_{ii} = e_i e^{2F_i}, \quad e_0 = 1, \quad e_\alpha = -1.$$

*Do tega pride tudi v degeneriranem primeru (II), če je $\lambda' = \lambda''$; ta primer se imenuje tudi tip N.

Z uporabo enačbe (92.4) dobimo naslednje izraze za od nič različne komponente krivinskega tenzorja:

$$R_{lik} = e_l e^{2F_l} [F_{l,k} F_{k,i} + F_{i,k} F_{l,i} - F_{l,i} F_{l,k} - F_{l,i,k}], \quad i \neq k \neq l;$$

$$R_{lil} = e_l e^{2F_l} (F_{i,i} F_{l,i} - F_{l,i}^2 - F_{l,i,i}) + e_i e^{2F_i} (F_{l,l} F_{i,l} - F_{i,l}^2 - F_{i,l,l}) -$$

$$- e_l e^{2F_l} \sum_{m \neq i, l} e_i e_m e^{2(F_i - F_m)} F_{i,m} F_{l,m}, \quad i \neq l.$$

(tukaj po ponovljenih indeksih ne seštevamo!). Indeksi, ki sledijo vejici, označujejo običajno odvajanje po ustrezni koordinati.

Če krivinski tenzor skrcimo po paru indeksov, dobimo

$$R_{ik} = \sum_{l \neq i, k} (F_{l,k} F_{k,i} + F_{i,k} F_{l,i} - F_{l,i} F_{l,k} - F_{l,i,k}), \quad i \neq k;$$

$$R_{ii} = \sum_{l \neq i} [F_{i,i} F_{l,i} - F_{l,i}^2 - F_{l,i,i} + e_i e_l e^{2(F_i - F_l)} (F_{l,l} F_{i,l} - F_{i,l}^2 - F_{i,l,l} - F_{i,l} \sum_{m \neq i, l} F_{m,l})].$$

§93 Akcija gravitacijskega polja

Na poti do enačb, ki določajo gravitacijsko polje, moramo najprej poiskati akcijo S_g tega polja. Te enačbe bomo potem dobili z variacijo vsote akcij za polje in za snovne delce.

Kot pri elektromagnetnem polju moramo akcijo S_g izraziti s skalarnim integralom $\int G \sqrt{-g} d\Omega$, kjer integriramo po celotnem prostoru, po časovni koordinati x^0 pa integriramo med dvema izbranimi vrednostma. Iskanje skalarja bomo začeli z ugotovitvijo, da enačbe gravitacijskega polja ne smejo vsebovati odvodov "potencialov", ki so višji od drugega reda (podobno kot pri elektromagnetnem polju). Ker dobimo enačbe polja z variacijo akcije, integrand G ne sme vsebovati odvodov, višjih od prvega reda; zato sme G vsebovati le tenzor g_{ik} in količine Γ_{kl}^i .

Izkaže se, da je nemogoče sestaviti invarianto le s količinami g_{ik} in Γ_{kl}^i . To je razvidno iz tega, da lahko s primerno izbiro koordinatnega sistema vedno postavimo količine Γ_{kl}^i na nič v izbrani točki. Obstaja pa skalar R (ukrivljenost četvernega prostora), ki poleg g_{ik} in njegovih prvih odvodov vsebuje tudi druge odvode, vendar je linearen v prvih odvodih. Zaradi linearnosti je možno invariantni integral $\int R \sqrt{-g} d\Omega$ s pomočjo Gaussovega izreka pretvoriti v izraz, ki drugih odvodov ne vsebuje. Integral $\int R \sqrt{-g} d\Omega$ najprej zapišemo v obliki

$$\int R \sqrt{-g} d\Omega = \int G \sqrt{-g} d\Omega + \int \frac{\partial(\sqrt{-g} w^i)}{\partial x^i} d\Omega,$$

kjer G vsebuje le tenzor g_{ik} in njegove druge odvode, integrand drugega integrala pa se zapiše kot divergenca neke količine w^i (izračun z vsemi podrobnostmi je na koncu tega razdelka). Po Gaussovem izreku lahko drugi integral pretvorimo v integral po hiperploskvi, ki obkroža del četvernega prostora, po katerem integriramo v dveh preostalih integralih. Ko variiramo akcijo, bo variacija drugega člena na desni odpadla, ker je po principu najmanjše akcije variacija polja na mejah integracijskega območja enaka nič. Zato lahko zapišemo

$$\delta \int R \sqrt{-g} d\Omega = \delta \int G \sqrt{-g} d\Omega.$$

Leva stran je skalar, zato je tudi izraz na desni skalar (količina G sama pa seveda ni skalarna).

Količina G zadošča pogoju na začetku razdelka, saj vsebuje le g_{ik} in njegove odvode. Zato lahko zapišemo

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \delta \int G \sqrt{-g} d\Omega = -\frac{c^3}{16\pi k} \delta \int R \sqrt{-g} d\Omega, \quad (93.1)$$

kjer je k nova splošna fizikalna konstanta. Podobno kot pri obravnavi akcije elektromagnetnega polja v §28, se lahko prepričamo, da mora biti konstanta k pozitivna (glej konec tega razdelka).

Konstanta k se imenuje *gravitacijska konstanta*. Dimenzija k je razvidna iz (93.1). Akcija ima dimenzijo $\text{gm cm}^2 \text{sec}^{-1}$; vse koordinate imajo dimenzijo cm , komponente g_{ik} so brezdimenzijske, R pa ima dimenzijo cm^{-2} . Sledi, da ima k dimenzijo $\text{cm}^3 \text{gm}^{-1} \text{sec}^{-2}$. Vrednost konstante je

$$k = 6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{gm}^{-1} \text{sec}^{-2}. \quad (93.2)$$

Vredno je omeniti, da bi lahko postavili k na 1 (ali na kakšno drugo brezdimenzijsko vrednost), vendar bi s tem določili enoto za maso. *

Končno izračunajmo količino G v (93.1). Iz izraza (92.8) za R_{ik} sledi

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}g^{ik}R_{ik} = \sqrt{-g} \left\{ g^{ik} \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - g^{ik} \frac{\partial \Gamma_{il}^l}{\partial x^k} + g^{ik} \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - g^{ik} \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l \right\}.$$

Prva člena na desni pretvorimo v

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}g^{ik} \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} &= \frac{\partial}{\partial x^l} (\sqrt{-g}g^{ik} \Gamma_{ik}^l) - \Gamma_{ik}^l \frac{\partial}{\partial x^l} (\sqrt{-g}g^{ik}), \\ \sqrt{-g}g^{ik} \frac{\partial \Gamma_{il}^l}{\partial x^k} &= \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g}g^{ik} \Gamma_{il}^l) - \Gamma_{il}^l \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g}g^{ik}). \end{aligned}$$

Totalne odvode izpustimo, in dobimo

$$\sqrt{-g}G = \Gamma_{im}^m \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g}g^{ik}) - \Gamma_{ik}^l \frac{\partial}{\partial x^l} (\sqrt{-g}g^{ik}) - (\Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m) g^{ik} \sqrt{-g}.$$

S pomočjo enačb (86.5)-(86.8) ugotovimo, da sta prva člena na desni enaka zmnožku $\sqrt{-g}$ z

$$\begin{aligned} 2\Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^i g^{mk} - \Gamma_{im}^m \Gamma_{kl}^i g^{kl} - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m g^{ik} &= g^{ik} (2\Gamma_{mk}^l \Gamma_{li}^m - \Gamma_{im}^m \Gamma_{ik}^l - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m) \\ &= 2g^{ik} (\Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m). \end{aligned}$$

Končno dobimo

$$G = g^{ik} (\Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m). \quad (93.4)$$

Komponente metričnega tenzorja so količine, ki določajo gravitacijsko polje. Zato pri uporabi načela najmanjše akcije za gravitacijsko polje variiramo spremenljivke g_{ik} . Moramo pa upoštevati naslednji temeljni pridržek. Ne moremo namreč trditi, da ima v dejansko uresničljivem polju integral akcije minimum (in ne le ekstrem) glede na vse možne variacije

*Če si izberemo $k = c^2$, bi maso merili v cm , pri čemer bi veljalo $1 \text{ cm} = 1,34 \times 10^{28} \text{ g}$. Včasih namesto k uporabljamo količino

$$\kappa = \frac{8\pi k}{c^2} = 1,86 \times 10^{-27} \text{ cm/g}, \quad (93.3)$$

ki jo imenujemo *Einsteinova gravitacijska konstanta*.

količin g_{ik} . To je povezano z dejstvom, da ne vodijo vse spremembe tenzorja g_{ik} k spremembi metrike prostora-časa, torej k dejanski spremembi gravitacijskega polja. Komponente g_{ik} se spremenijo tudi pri preprosti transformaciji koordinat pri kateri se le preselimo iz enega koordinatnega sistema v drugega v istem prostoru-času. Vsaka takšna transformacija koordinat je v splošnem skupina štirih neodvisnih transformacij. Takšne spremembe g_{ik} , ki ne spremenijo metrike, bomo izključili iz obzira tako, da določimo štiri pomožne pogoje, ki bodo morali biti izpolnjeni pri variaciji. Zato lahko pri uporabi načela najmanjše akcije pri gravitacijskem polju trdimo le, da je mogoče zahtevati pomožne pogoje, ki jim mora g_{ik} zadostiti, če naj ima akcija minimum glede na variacije količin g_{ik} . *

Upoštevajoč te opombe bomo sedaj pokazali, da mora biti gravitacijska konstanta pozitivna. Kot štiri dodatne pogoje si bomo izbrali

$$g_{0\alpha} = 0, \quad |g_{\alpha\beta}| = 0;$$

iz zadnjega pogoja sledi

$$g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial x^0} |g_{\alpha\beta}| = 0.$$

Tu nas zanimajo tisti členi v integrandu izraza za akcijo, ki vsebuje odvode količine g_{ik} po x^0 (glej str.). Preprost izračun z uporabo (93.4) pokaže, da so ti členi v izrazu za G enaki

$$-\frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} g^{00} \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^0} \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^0}.$$

Hitro se lahko prepričamo, da je ta količina striktno negativna. Z izbiro prostorskega koordinatnega sistema, ki je kartezičen v izbrani točki ob danem trenutku (tako da je $g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$), dobimo

$$-\frac{1}{4} g^{00} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0} \right)^2,$$

in ker je $g^{00} = 1/g_{00} > 0$, je predznak zgornje količine očiten.

Če se komponente $g_{\alpha\beta}$ zadosti hitro spremenijo s časom x^0 (znotraj časovnega intervala, po katerem integriramo), je količina G lahko poljubno velika. Če bi bila konstanta k negativna, bi lahko akcija dosegla poljubno majhno vrednost in minimum ne bi obstajal.

§94 Napetostni tenzor

V §32 je bilo podano splošno pravilo za računanje napetostnega tenzorja poljubnega fizikalnega sistema, katerega akcija je podana v obliki integrala (32.1) po četvernem prostoru. V krivočrtnih koordinatah lahko ta integral zapišemo v obliki

$$S = \frac{1}{c} \int \Lambda \sqrt{-g} d\Omega \quad (94.1)$$

(v Galilejevih koordinatah je $g = -1$ in $S = \int \Lambda dV dt$). Integriramo po celotnem prostoru, po času pa med dvema izbranimi trenutkoma. Integral torej poteka po neskončnem območju četvernega prostora, ki ga omejujeta dve hiperploskvi.

*Poudariti moramo, da povedano ne vpliva na izpeljavo enačb polja z uporabo načela najmanjše akcije (§ 95). Da dobimo te enačbe, zadostuje zahteva, da ima akcija ekstrem (torej da je prvi odvod enak nič), ki ni nujno minimum. Zato bomo pri izpeljavi enačb neodvisno variirali vse g_{ik} .

Kot smo omenili v §32, napetostni tenzor, izračunan po enačbi (32.5), v splošnem ni simetričen, kot bi to moral biti. Da smo ga simetrizirali, smo morali k (32.5) dodati člene oblike $(\partial/\partial x^l)\psi_{ikl}$, kjer je $\psi_{ikl} = -\psi_{ilk}$. Sedaj bomo opisali drugačen pristop k računanju napetostnega tenzorja, katerega prednost je ta, da takoj dobimo pravilen izraz.

V (94.1) pretvorimo koordinate x^i v koordinate $x'^i = x^i + \xi^i$, kjer so ξ^i majhne količine. Pri tej transformaciji se g^{ik} spremenijo po enačbi

$$\begin{aligned} g'^{ik}(x'^l) &= g^{lm}(x^l) \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} = g^{lm} \left(\delta_l^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} \right) \left(\delta_m^k + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} \right) \\ &\sim g^{ik}(x^l) + g^{im} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{ki} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}. \end{aligned}$$

Tenzor g'^{ik} smatramo kot funkcijo spremenljivk x'^l , medtem ko je tenzor g^{ik} funkcija začetnih spremenljivk x^l . Če želimo zapisati vse člene kot funkcije enega samega nabora spremenljivk, moramo $g'^{ik}(x^l + \xi^l)$ razviti po potencah ξ^l . Poleg tega lahko, če zanemarimo vse člene višjih redov v ξ^l , v vseh členih, ki vsebujejo ξ^l , zamenjamo g'^{ik} z g^{ik} . Tako dobimo

$$g'^{ik}(x^l) = g^{ik}(x^l) - \xi^l \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + g^{il} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} + g^{kl} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}.$$

Z neposrednim izračunom se lahko prepričamo, da lahko zadnje tri člene na desni zapišemo kot vsoto $\xi^{i;k} + \xi^{k;i}$ kontravariantnih odvodov količine ξ^i . Končno dobimo pravilo za transformacijo g^{ik} v obliki

$$g'^{ik} = g^{ik} + \delta g^{ik}, \quad \delta g^{ik} = \xi^{i;k} + \xi^{k;i}. \quad (94.2)$$

Za kovariantne komponente pa velja

$$g'_{ik} = g_{ik} + \delta g_{ik}, \quad \delta g_{ik} = -\xi_{i;k} - \xi_{k;i} \quad (94.3)$$

(do členov prvega reda natančno velja pogoj $g_{il}g'^{kl} = \delta_i^k$). *

Ker je akcija S skalar, se ob koordinatni transformaciji ne spremeni. Po drugi strani pa se lahko sprememba akcije δS ob koordinatni transformaciji zapiše na naslednji način. Kot v §32 naj q označuje količine, ki določajo fizikalni sistem z akcijo S . Ob koordinatni transformaciji se količine q spremenijo za δq . Pri računanju δS ne rabimo zapisati količin, ki vsebujejo spremembe spremenljivk q . Takšni členi se med seboj okrajšajo zaradi "enačb gibanja" fizikalnega sistema, saj te enačbe dobimo z izenačenjem z nič variacije S glede na količine q . Zato zadostuje, da zapišemo člene, povezane s spremembami g_{ik} . Z uporabo Gaussovega izreka in upoštevajoč, da je $\delta g^{ik} = 0$ na integracijskih mejah, dobimo δS naslednje

*Omenimo naj, da enačbe

$$\xi^{i;k} + \xi^{k;i} = 0$$

opisujejo infinitezimalne pretvorbe koordinat, ki ne spremenijo metrike. V literaturi te enačbe pogosto imenujemo *Killingove enačbe*.

oblike: *

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial g^{ik}} \delta g^{ik} + \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} \delta \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right\} d\Omega \\ &= \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} \right\} \delta g^{ik} d\Omega.\end{aligned}$$

Vpeljemo zapis

$$\frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{ik} = \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}. \quad (94.4)$$

Potem lahko δS zapišemo kot †

$$\delta S = \frac{1}{2c} \int T_{ik} \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega = -\frac{1}{2c} \int T^{ik} \delta g_{ik} \sqrt{-g} d\Omega \quad (94.5)$$

(tu smo upoštevali, da je $g^{ik} \delta g_{lk} = -g_{lk} \delta g^{ik}$ in zato $T^{ik} \delta g_{ik} = -T_{ik} \delta g^{ik}$). Variacije δg^{ik} nadomestimo z izrazom (94.2) in dobimo, če upoštevamo še simetričnost tenzorja T_{ik} ,

$$\delta S = \frac{1}{2c} \int T_{ik} (\xi^{i;k} + \xi^{k;i}) \sqrt{-g} d\Omega = \frac{1}{c} \int T_{ik} \xi^{i;k} \sqrt{-g} d\Omega.$$

Ta izraz pretvorimo v naslednjo obliko:

$$\delta S = \frac{1}{c} \int (T_i^k \xi^i)_{;k} \sqrt{-g} d\Omega - \frac{1}{c} \int T_{i;k}^k \xi^i \sqrt{-g} d\Omega. \quad (94.6)$$

Z uporabo (86.9) lahko pri integral zapišemo kot

$$\frac{1}{c} \int \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} T_i^k \xi^i) d\Omega,$$

in ga pretvorimo v integral po hiperploskvi. Ker so ξ^i enake nič na robovih integracijskega območja, ta integral odpade.

Če izenačimo δS z nič, dobimo

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int T_{i;k}^k \xi^i \sqrt{-g} d\Omega = 0.$$

Ker so ξ^i poljubni, dobimo

$$T_{i;k}^k = 0. \quad (94.7)$$

*Potrebno je poudariti, da ima tu vpeljan zapis za odvajanje po komponentah simetričnega tenzorja g_{ik} v nekem smislu simbolični pomen. Odvod $\partial F / \partial g_{ik}$ (kjer je F neka funkcija količin g_{ik}) je namreč smiselno le kot izraz dejstva, da je $dF = (\partial F / \partial g_{ik}) dg_{ik}$. V vsoti $(\partial F / \partial g_{ik}) dg_{ik}$ se členi z diferenciali dg_{ik} komponent, za katere je $i \neq k$, pojavljajo dvakrat. Zato bi pri dejanskem odvajanju izraza za F po poljubni komponenti g_{ik} (z $i \neq k$) dobili dvakrat večjo vrednost, kot je ta, ki jo označujemo z $\partial F / \partial g_{ik}$. To opombo moramo nujno upoštevati, ko priredimo vrednosti indeksoma i, k v enačbah, v katerih se pojavljajo odvodi po g_{ik} .

†V obravnavanem primeru vseh deset količin δg_{ik} ni med seboj neodvisnih, saj so te posledica pretvorbe koordinat, ki pa so le štiri. Zato iz $\delta S = 0$ ne sledi $T_{ik} = 0$.

To primerjamo z enačbo (32.4) $\partial T_{ik}/\partial x^k = 0$, ki velja v Galilejevih koordinatah. Ugotovimo, da je tenzor T_{ik} , definiran z izrazom (94.4), enak napetostnemu tenzorju – vsaj do konstantnega faktorja natančno. Hitro lahko preverimo, na primer z izračunom tenzorja napetosti za elektromagnetno polje

$$\left(\Lambda = -\frac{1}{16\pi} F_{ik} F^{ik} = -\frac{1}{16\pi} F_{ik} F_{lm} g^{il} g^{km} \right)$$

in uporabo izraza (94.4), da je ta konstanta enaka ena.

Z enačbo (94.4) lahko torej izračunamo napetostni tenzor z odvajanjem funkcije Λ po komponentah metričnega tenzorja in njegovih odvodov. Tako dobljeni tenzor T_{ik} je simetričen. Enačba (94.4) je uporabna ne le za računanje napetostnega tenzorja v prisotnosti gravitacijskega polja, temveč tudi za podobne račune v ravnem prostoru. V tem primeru metrični tenzor nima posebnega pomena, prehod v krivočrtne koordinate uporabimo le formalno, kot vmesni korak pri izračunu tenzorja T_{ik} .

Izraz (33.1) za napetostni tenzor elektromagnetnega polja moramo napisati v krivočrtnih koordinatah v obliki

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(-F_{il} F_k{}^l + \frac{1}{4} F_{lm} F^{lm} g_{ik} \right). \quad (94.8)$$

Napetostni tenzor makroskopskega telesa je

$$T_{ik} = (p + \epsilon) u_i u_k - p g_{ik}. \quad (94.9)$$

Naj opozorimo, da je količina T_{00} vedno pozitivna: *

$$T_{00} \geq 0. \quad (94.10)$$

(Nič pa ne moremo v splošnem povedati o mešani komponenti T_0^0 .)

NALOGA

NALOGA Obravnavaj različne primere poenostavitve simetričnega tenzorja drugega reda v psevdoeuklidskem prostoru na kanonično obliko.

Rešitev: Poenostavitev simetričnega tenzorja A_{ik} na lastne osi pomeni, da moramo poiskati lastne vektorje n^i , za katere velja

$$A_{ik} n^k = \lambda n_i. \quad (1)$$

Ustrezne lastne vrednosti λ dobimo iz karakteristične enačbe

$$|A_{ik} - \lambda g_{ik}| = 0. \quad (2)$$

Lastne vrednosti so invariante tenzorja. Tako lastni vektorji kot lastne vrednosti so lahko kompleksni. (Predpostavili pa seveda bomo, da so komponente tenzorja A_{ik} realne.)

*Velja $T_{00} = \epsilon u_0^2 + p(u_0^2 - g_{00})$. Prvi člen je vedno pozitiven. V drugem členu zapišemo

$$u_0 = g_{00} u^0 + g_{0\alpha} u^\alpha = \frac{g_{00} dx^0 + g_{0\alpha} dx^\alpha}{ds}$$

in po preoblikovanju dobimo $g_{00} p (dl/ds)^2$, kjer je dl diferencial prostorske razdalje (84.6); od tod je razvidno, da je tudi drugi člen pozitiven. Isti rezultat lahko dobimo tudi z uporabo zapisa tenzorja iz enačbe (94.8).

S pomočjo enačbe (1) na običajen način pokažemo, da sta vektorja $n_i^{(1)}$ in $n_i^{(2)}$, ki ustrezata različnim lastnim vrednostma $\lambda^{(1)}$ in $\lambda^{(2)}$, med seboj pravokotna:

$$n_i^{(1)} n^{i(2)} = 0. \quad (3)$$

V posebnem primeru, ko ima enačba (2) kompleksno konjugirana korena λ in λ^* , ki ustrezata kompleksno konjugiranim vektorjema n_i in n_i^* , mora veljati

$$n_i n^{i*} = 0. \quad (4)$$

Tenzor A_{ik} zapišemo z lastnimi vrednostmi in lastnimi vektorji kot

$$A_{ik} = \sum \lambda \frac{n_i n_k}{n_l n^l} \quad (5)$$

(če le ni kakšna izmed količin $n_l n^l$ enaka nič – več o tem primeru je v nadaljevanju).

Odvisto od tega, kakšni so koreni enačbe (2), lahko nastopijo trije primeri:

- (a) Vse štiri lastne vrednosti λ so realne. Tedaj so tudi vektorji n_i realni, in ker so ti med seboj pravokotni, morajo trije izmed njih imeti prostorske smeri, eden pa časovno smer (normaliziramo jih lahko s pogoji $n_l n^l = -1$ oziroma $n_l n^l = 1$). Če si izberemo koordinatne osi vzdolž teh vektorjev, lahko tenzor A_{ik} zapišemo kot

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} \lambda^{(0)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

- (b) Enačba (2) ima dva realna korena $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$ in en par kompleksno konjugiranih korenov ($\lambda' \pm i\lambda''$). Kompleksno konjugirana vektorja n_i , n_i^* , ki ustrezata zadnjima dvema korenoma, zapišemo kot $a_i \pm ib_i$; ker sta vektorja definirana do poljubnega kompleksnega faktorja natančno, ju lahko normiramo s pogojem $n_i n^i = n_i^* n^{i*} = 1$. S pomočjo enačbe (4) dobimo še

$$a_i a^i + b_i b^i = 0, \quad a_i b^i = 0, \quad a_i a^i - b_i b^i = 1,$$

od koder sledi

$$a_i a^i = \frac{1}{2}, \quad b_i b^i = -\frac{1}{2},$$

kar pomeni, da je eden izmed obeh vektorjev prostorski, drugi pa časoven. * Koordinatne osi si izberemo vzdolž vektorjev a^i , b^i , $n^{(2)i}$ in $n^{(3)i}$ in tenzor zapišemo kot

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} \lambda' & \lambda'' & 0 & 0 \\ \lambda'' & -\lambda' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

- (c) Če je kvadrat enega izmed vektorjev n^i enak nič ($n_l n^l = 0$), potem tega vektorja ne moremo izbrati kot smer koordinatne osi. Lahko pa si izberemo eno izmed ravnin x^0 , x^α tako, da bo vektor n^i ležal v njej. Naj bo to ravnina x^0 , x^1 ; tedaj iz $n_l n^l = 0$ sledi $n^0 = n^1$ in iz enačbe (1) dobimo $A_{00} + A_{01} = \lambda$, $A_{10} + A_{11} = -\lambda$, zato je $A_{11} = -\lambda + \mu$, $A_{00} = \lambda + \mu$, $A_{01} = -\mu$, kjer μ ni invarianta, temveč se spreminja ob zasukih v ravnini x^0 , x^1 ; s primernim zasukom lahko

* Ker ima lahko le eden izmed vektorjev časovno smer, enačba (2) ne more imeti dveh parov kompleksno konjugiranih rešitev.

vedno naredimo μ realen. Osi x^2 in x^3 si izberemo vzdolž ostalih dveh (prostorskih) vektorjev $n^{(2)i}$ in $n^{(3)i}$ in tenzor A_{ik} zapišemo kot

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu & -\mu & 0 & 0 \\ -\mu & -\lambda + \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Ta primer ustreza slučaju, ko sta dva korena ($\lambda^{(0)}$ in $\lambda^{(1)}$) enačbe (2) enaka.

Pri napetostnemu tenzorju T_{ik} snovi, ki se giblje s hitrostjo, manjšo od svetlobne, imamo lahko le primer (a); to je povezano z dejstvom, da si vedno lahko izberemo takšen opazovalni sistem, da bo v njem pretok energije snovi (torej komponente $T_{0\alpha}$) enake nič. Pri napetostnem tenzorju elektromagnetnega valovanja pa imamo vedno primer (c), z $\lambda^{(2)} = \lambda^{(3)} = \lambda = 0$ (glej stran 85); dokazati je možno, da bi v nasprotnem primeru obstajal opazovalni sistem, v katerem bi pretok energije bil večji od gostote energije, pomnožene s c .

§95 Einsteinove enačbe

Sedaj bomo izpeljali enačbe gravitacijskega polja. Dobili jih bomo iz načela najmanjše akcije $\delta(S_m + S_g) = 0$, kjer sta S_g in S_m akciji gravitacijskega polja in snovi. Sedaj variiramo gravitacijsko polje, torej količine g_{ik} .

Variacija δS_g je

$$\begin{aligned} \delta \int R \sqrt{-g} d\Omega &= \delta \int g^{ik} R_{ik} \sqrt{-g} d\Omega \\ &= \int \left\{ R_{ik} \sqrt{-g} \delta g^{ik} + R_{ik} g^{ik} \delta \sqrt{-g} + g^{ik} \sqrt{-g} \delta R_{ik} \right\} d\Omega. \end{aligned}$$

Iz enačbe (86.4) dobimo

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ik} \delta g^{ik};$$

to vstavimo v izraz za δS_g in sledi

$$\delta \int R \sqrt{-g} d\Omega = \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega + \int g^{ik} \delta R_{ik} \sqrt{-g} d\Omega. \quad (95.1)$$

Izračunati moramo še δR_{ik} . Pri tem upoštevamo, da količine Γ_{kl}^i ne tvorijo tenzorja, njihove variacije $\delta \Gamma_{kl}^i$ pa so tenzor, saj je $\Gamma_{il}^k A_k dx^l$ sprememba vektorja ob vzporednem premiku (glej (85.5)) iz neke točke P v infinitezimalno oddaljeno točko P' . Zato je $\delta \Gamma_{kl}^i A_k dx^l$ razlika dveh vektorjev, ki je posledica dveh vzporednih premikov (enega z nevariirano, drugega z variirano Γ_{kl}^i) iz točke P v eno in isto točko P' . Razlika dveh vektorjev v isti točki je vektor, zato je $\delta \Gamma_{kl}^i$ tenzor.

Sedaj uporabimo lokalno geodetski koordinatni sistem. V izbrani točki je torej $\Gamma_{kl}^i = 0$. Z uporabo izraza (92.8) za R_{ik} in upoštevajoč, da so prvi odvodi količin g^{ik} enaki nič, dobimo

$$g^{ik} \delta R_{ik} = g^{ik} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^l} \delta \Gamma_{ik}^l - \frac{\partial}{\partial x^k} \delta \Gamma_{il}^l \right\} = g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^l} \delta \Gamma_{ik}^l - g^{il} \frac{\partial}{\partial x^l} \delta \Gamma_{il}^k = \frac{\partial w^l}{\partial x^l},$$

kjer je

$$w^l = g^{ik} \delta \Gamma_{ik}^l - g^{il} \delta \Gamma_{ik}^k.$$

Ker je w^l vektor, lahko zapišemo dobljeni izraz v obliki, ki velja v poljubnem koordinatnem sistemu:

$$g^{ik} \delta R_{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^l} (\sqrt{-g} w^l)$$

[pri tem smo $\partial w^l / \partial x^l$ zamenjali z $w^l_{;l}$ in uporabili (86.9)]. Zato je drugi integral na desni strani (95.1) enak

$$\int g^{ik} \delta R_{ik} \sqrt{-g} d\Omega = \int \frac{\partial(\sqrt{-g} w^l)}{\partial x^l} d\Omega.$$

in z uporabo Gaussovega izreka lahko ta člen pretvorimo v integral w^l po hiperploskvi, ki obkroža celoten del četvernega prostora. Ker so variacije polja enake nič na robovih integracijskega območja, ta člen odpade. Zato je variacija δS_g enaka *

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega. \quad (95.2)$$

Če bi izpeljavo začeli z izrazom

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \int G \sqrt{-g} d\Omega$$

za akcijo polja, bi dobili

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \int \left\{ \frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} \right\} \delta g^{ik} d\Omega.$$

To primerjamo z (95.2) in dobimo naslednjo relacijo:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} \right\}. \quad (95.3)$$

Variacijo akcije snovi lahko takoj zapišemo s pomočjo (94.5):

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int T_{ik} \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega, \quad (95.4)$$

kjer je T_{ik} napetostni tenzor snovi (vključno z elektromagnetnim poljem). Gravitacijska interakcija je opazna le pri telesih z zadosti veliko maso (ker je gravitacijska konstanta majhna), zato se pri obravnavi gravitacijskega polja običajno ukvarjamo z makroskopskimi telesi. Za napetostni tenzor moramo zato običajno uporabiti (94.9).

Iz načela najmanjše akcije $\delta S_m + \delta S_g = 0$ sledi

$$-\frac{c^3}{16\pi k} \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik} \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega = 0,$$

*Omenimo naslednje hecno dejstvo. Če bi računali variacijo $\delta \int R \sqrt{-g} d\Omega$ [z R_{ik} iz (92.11)], pri čemer bi kot neodvisne spremenljivke smatrali Γ^i_{kl} , g_{ik} pa kot konstante, nato pa uporabili izraz (86.3) za Γ^i_{kl} , bi dobili identično nič, v kar se lahko brez težav prepričamo. Velja tudi nasprotno: zvezo med Γ^i_{kl} in metričnim tenzorjem lahko dobimo z zahtevo, da je omenjena variacija enaka nič.

in ker je δg^{ik} poljuben, dobimo

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi k}{c^4}T_{ik}, \quad (95.5)$$

ali v mešanih komponentah

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = \frac{8\pi k}{c^4}T_i^k. \quad (95.6)$$

To so iskane *enačbe gravitacijskega polja*, osnovne enačbe splošne teorije relativnosti. Imenujejo se *Einsteinove enačbe*.

Enačbo (95.6) skrajšamo po indeksih i in k . Dobimo

$$R = -\frac{8\pi k}{c^4}T; \quad (95.7)$$

($T = T_i^i$). Zato lahko enačbe polja zapišemo tudi v obliki

$$R_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4} \left(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T \right). \quad (95.8)$$

Einsteinove enačbe so nelinearne. Zato za gravitacijsko polje načelo superpozicije ne velja. To načelo velja le približno za šibka polja, pri katerih lahko Einsteinovo enačbo lineariziramo (takšno je na primer gravitacijsko polje v klasični Newtonovi limiti, §99).

V praznem prostoru je $T_{ik} = 0$ in enačbe gravitacijskega polja se poenostavijo v obliko

$$R_{ik} = 0. \quad (95.9)$$

Poudariti moramo, da to ne pomeni, da je v vakuumu prostor-čas raven; za to bi bil potreben strožji pogoj $R_{iklm}^i = 0$.

Napetostni tenzor elektromagnetnega polja ima lastnost $T_i^i = 0$ [glej (33.2)]. Iz (95.7) sledi, da je v elektromagnetnem polju v odsotnosti mas skalarna ukrivljenost prostora-časa enaka nič.

Kot že vemo, je divergenca napetostnega tenzorja enaka nič:

$$T_{i;k}^k = 0; \quad (95.10)$$

zato je enaka nič tudi divergenca leve strani enačbe (95.6). To je res že zaradi identitete (92.14).

Zato je enačba (95.10) pravzaprav že vsebovana v enačbah polja (95.6). Po drugi strani pa enačba (95.10), ki izraža zakon o ohranitvi energije in gibalne količine, vsebuje gibalne enačbe fizikalnega sistema, na katerega se nanaša obravnavani napetostni tenzor (na primer enačbe gibanja snovnega delca ali pa drugi par Maxwellovih enačb). Zato enačbe gravitacijskega polja vsebujejo tudi gibalne enačbe snovi, ki povzročajo polje. Zato si ne moremo poljubno izbrati porazdelitve in hitrosti snovi, ki ustvarjajo gravitacijsko polje, temveč jih moramo določiti (z reševanjem enačb polja ob danih začetnih pogojih) sočasno s poljem, ki ga snov povzroča.

Poudariti moramo načelno razliko med tem primerom in primerom elektromagnetnega polja. Enačbe elektromagnetnega polja (Maxwellove enačbe) vsebujejo le enačbo o ohranitvi celotnega naboja (kontinuitetno enačbo), ne pa enačb gibanja samih nabojev. Zato si lahko porazdelitev in gibanje nabojev poljubno izberemo, če je le skupni naboj konstanten. Izbira

porazdelitve nabojev tedaj preko Maxwellovih enačb določa elektromagnetno polje, ki ga ustvarjajo naboji.

Opozoriti moramo na to, da potrebujemo poleg Einsteinovih enačb tudi enačbo stanja snovi, torej enačbo, ki podaja povezavo med pritiskom in gostoto, če želimo povsem določiti porazdelitev in hitrost snovi. *

Četverne koordinate lahko poljubno transformiramo. S takšnimi transformacijami si lahko poljubno izberemo vrednosti štirih izmed desetih komponent tenzorja g_{ik} . Zato obstaja le šest neodvisnih količin g_{ik} . Poleg tega so štiri komponente četverca hitrosti u^i , ki se pojavljajo v napetostnem tenzorju snovi, med seboj povezane z relacijo $u^i u_i = 1$, tako da so le tri izmed njih neodvisne. Zato imamo deset enačb polja (95.5) z desetimi neznankami: šest komponent tenzorja g_{ik} , tri komponente četverca u^i in gostoto snovi ϵ/c^2 (ali pritisk snovi p).

Za gravitacijsko polje v vakuumu ostane skupaj šest neznanih količin (komponente g_{ik}) in število neodvisnih enačb polja je ustrezno manjše: deset enačb $R_{ik} = 0$ je med seboj povezanih s štirimi identitetami (92.11).

Omenimo še nekaj posebnosti v strukturi Einsteinovih enačb. Te so sistem parcialnih diferencialnih enačb drugega reda, ki pa ne vsebujejo časovnih odvodov vseh desetih komponent g_{ik} . Iz enačbe (92.1) je namreč razvidno, da drugi odvodi po času nastopajo le v komponentah $R_{0\alpha 0\beta}$ krivinskega tenzorja, kjer se pojavljajo v obliki člena $-\ddot{g}_{\alpha\beta}$ (točka označuje odvod po x^0); drugih odvodov komponent $g_{0\alpha}$ in g_{00} v enačbah ni. Zato je jasno, da tenzor R_{ik} , ki ga dobimo s skrčitvijo krivinskega tenzorja, in zato tudi enačba (95.5), vsebujejo druge odvode po času izključno šestih prostorskih komponent $g_{\alpha\beta}$.

Hitro se lahko tudi prepričamo, da se ti odvodi pojavljajo le v ${}^\beta_\alpha$ -enačbah sistema (95.6), torej v enačbah

$$R^\beta_\alpha - \frac{1}{2}\delta^\beta_\alpha R = \frac{8\pi k}{c^4} T^\beta_\alpha. \quad (95.11)$$

Enačbi, kjer nastopajo komponente 0_0 in ${}^0_\alpha$, torej enačbi

$$R^0_0 - \frac{1}{2}R = \frac{8\pi k}{c^4} T^0_0, \quad R^\alpha_\alpha = \frac{8\pi k}{c^4} T^\alpha_\alpha, \quad (95.12)$$

vsebujejo le prve odvode po času. V to se lahko prepričamo tako, da ugotovimo, da se pri tvorjenju količin R^α_α in $R^0_0 - \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}(R^0_0 - R^\alpha_\alpha)$ s skrčitvijo tenzorja R_{iklm} komponente oblike $R_{0\alpha 0\beta}$ okrajšajo. Še bolj preprosto lahko to preverimo s pomočjo identitete (92.11), če jo zapišemo v obliki

$$(R^0_i - \frac{1}{2}\delta^0_i R)_{;0} = -(R^\alpha_i - \frac{1}{2}\delta^\alpha_i R)_{;a} \quad (95.13)$$

($i=0,1,2,3$). Najvišji časovni odvodi, ki se pojavljajo na desni strani te enačbe, so drugi odvodi (ki nastopajo v količinah R^α_i in R). Ker je (95.13) identiteta, leva stran ne more vsebovati časovnih odvodov, višjih od drugega. Toda odvajanje po času se v enačbi že pojavlja eksplicitno, zato lahko izraz $R^0_i - \frac{1}{2}\delta^0_i R$ vsebuje kvečjemu prve odvode po času.

Poleg tega enačbi (95.12) ne vsebujejo niti prvih odvodov $\dot{g}_{0\alpha}$, niti $\dot{g}_{00}$ (temveč le odvode $\dot{g}_{\alpha\beta}$). Izkaže se, da izmed vseh količin $\Gamma_{i,kl}$ le $\Gamma_{\alpha,00}$ in $\Gamma_{0,00}$ vsebujejo te odvode, količine $\Gamma_{\alpha,00}$ in $\Gamma_{0,00}$ pa se po drugi strani pojavljajo le v komponentah krivinskega tenzorja oblike $R_{0\alpha 0\beta}$, ki se – kot že vemo – okrajšajo, ko tvorimo leve strani enačb (95.12).

*Pravzaprav enačba stanja med seboj ne povezuje le dveh, temveč tri termodinamične količine, na primer pritisk, gostoto in temperaturo snovi. Pri uporabi teorije gravitacije ta podrobnost ni pomembna, saj približne enačbe stanja, ki jih pri tem uporabljamo, pravzaprav niso odvisne od temperature (kot na primer enačba $p = 0$ za redko snov, mejna ultrarelativistična enačba $p = \epsilon/3$ za močno stisnjeno snov, ipd.).

Če nas zanima rešitev Einsteinovih enačb pri zadanih začetnih pogojih, moramo obravnavati vprašanje števila količin, katerih začetno prostorsko porazdelitev si lahko poljubno izberemo.

Začetni pogoji sistema enačb drugega reda morajo vsebovati tako vrednosti odvisnih spremenljivk, kot njihove prve odvode. Ker pa v našem primeru enačbe vsebujejo druge odvode izključno šestih spremenljivk $g_{\alpha\beta}$, ne moremo vsem g_{ik} in $\dot{g}_{ik}$ predpisati poljubnih začetnih vrednosti. Zato lahko poleg začetne porazdelitve hitrosti in gostote snovi predpišemo začetne vrednosti količinam $g_{\alpha\beta}$ in $\dot{g}_{\alpha\beta}$. Tedaj enačbe (95.12) določijo dopustne začetne vrednosti za $g_{0\alpha}$ in g_{00} , v enačbi (95.11) pa so začetne vrednosti za $\dot{g}_{0\alpha}$ še poljubne.

Med izbranimi začetnimi pogoji so tudi takšni, katerih poljubnost je preprosto posledica poljubnosti izbire četvernega koordinatnega sistema. Toda edino, kar ima pravi fizikalni pomen, je število "fizikalno različnih" poljubnih začetnih pogojev, ki jih ne moremo odpraviti z nobeno izbiro koordinatnega sistema. S fizikalnimi argumenti se lahko prepričamo, da je to število osem: začetni pogoji morajo predpisati porazdelitev gostote snovi in tri komponente hitrosti, ter štiri druge količine, ki določajo prosto gravitacijsko polje v odsotnosti snovi (glej §107); za prosto gravitacijsko polje v vakuumu moramo predpisati le zadnje štiri količine.

NALOGA

Zapiši enačbe za konstantno gravitacijsko polje: vse operacije odvajanja po prostorskih koordinatah zapiši kot kovariantne odvode v prostoru z metriko $\gamma_{\alpha\beta}$ (84.7).

Rešitev: Vpeljemo zapis $g_{00} = h$, $g_{0\alpha} = -hg_{\alpha}$ (88.11) in tridimenzionalno hitrost v^{α} (88.10). V nadaljevanju bomo vse operacije dvigovanja in spuščanja indeksov ter kovariantnega odvajanja nad tridimenzionalnima vektorjema g_{α} in v^{α} ter nad skalarjem h izvajali v tridimenzionalnem prostoru z metriko $\gamma_{\alpha\beta}$.

Iskane enačbe morajo biti invariantne proti pretvorbi

$$x^{\alpha} \rightarrow x^{\alpha}, \quad x^0 \rightarrow x^0 + f(x^{\alpha}), \quad (1)$$

ki ne spremeni stacionarnega značaja polja. Ob takšni transformaciji se, kot lahko zlahka pokažemo (glej opombo na strani 248), g_{α} spremeni v $g_{\alpha} - \partial f / \partial x^{\alpha}$, medtem ko skalar h in tenzor $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + hg_{\alpha}g_{\beta}$ ostaneta nespremenjena. Od tod je razvidno, da iskane enačbe (če jih izrazimo z $\gamma_{\alpha\beta}$, h in g_{α}) lahko g_{α} vsebujejo samo kot kombinacijo odvodov, ki sestavljajo tridimenzionalni antisimetrični tenzor:

$$f_{\alpha\beta} = g_{\beta;\alpha} - g_{\alpha;\beta} = \frac{\partial g_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}, \quad (2)$$

ki je invarianten proti takšnim pretvorbam. Če to upoštevamo, si lahko računanje močno olajšamo, saj lahko postavimo $g_{\alpha} = 0$ in $g_{\alpha;\beta} + g_{\beta;\alpha} = 0$, potem ko izračunamo vse odvode, ki se pojavljajo v R_{ik} . *

*Da ne bo nesporazuma, moramo poudariti, da ta poenostavljen računski postopek, ki nam sicer da pravilne enačbe polja, ni primer za računanje poljubnih komponente tenzorja R_{ik} samega, saj te niso invariantne proti pretvorbi (1). V levih straneh enačb (3)-(5) nastopajo tiste komponente Riccijevega tenzorja, ki so dejansko enake zapisanim izrazom. Te komponente so invariantne proti (1).

Christoffelovi simboli so:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2}g^\alpha h_{;\alpha}, \\
 \Gamma_{00}^\alpha &= \frac{1}{2}h^{;\alpha}, \\
 \Gamma_{\alpha 0}^0 &= \frac{1}{2h}h_{;\alpha} + \frac{h}{2}g^\beta f_{\alpha\beta} + \dots, \\
 \Gamma_{0\beta}^\alpha &= \frac{h}{2}f_\beta^\alpha - \frac{1}{2}g_\beta h^{;\alpha}, \\
 \Gamma_{\alpha\beta}^0 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_\beta}{\partial x^\alpha}\right) - \frac{1}{2h}(g_\alpha h_{;\beta} + g_\beta h_{;\alpha}) + g_\gamma \lambda_{\alpha\beta}^\gamma + \dots, \\
 \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha &= \lambda_{\beta\gamma}^\alpha - \frac{h}{2}(g_\beta f_\gamma^\alpha + g_\gamma f_\beta^\alpha) + \dots
 \end{aligned}$$

Izpuščeni členi (označeni s pikami) so kvadratni v g_α ; te členi bodo odpadli, ko bomo po odvajanju v R_{ik} (92.11) postavili $g_\alpha = 0$. Pri računanju uporabimo enačbe (84.10), (84.13), (84.14); $\lambda_{\beta\gamma}^\alpha$ so tridimenzionalni Christoffelovi simboli, ki jih sestavimo iz metrike $\gamma_{\alpha\beta}$.

Tenzor T_{ik} izračunamo z uporabo (94.9) ter z u^i iz (88.14) (tudi tu postavimo $g_\alpha = 0$).

Kot končni rezultat dobimo iz (95.8) naslednje enačbe:

$$\frac{1}{h}R_{00} = \frac{1}{\sqrt{h}}(\sqrt{h})_{;\alpha}^\alpha + \frac{h}{4}f_{\alpha\beta}f^{\alpha\beta} = \frac{8\pi k}{c^4} \left(\frac{\epsilon + p}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\epsilon - p}{2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{h}}R_0^\alpha = -\frac{\sqrt{h}}{2}f^{\alpha\beta}_{;\beta} - \frac{3}{2}f^{\alpha\beta}(\sqrt{h})_{;\beta} = \frac{8\pi k}{c^4} \frac{p + \epsilon}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{v^\alpha}{c}, \quad (4)$$

$$R^{\alpha\beta} = P^{\alpha\beta} + \frac{h}{2}f^{\alpha\gamma}f_\gamma^\beta - \frac{1}{\sqrt{h}}(\sqrt{h})_{;\alpha;\beta} = \frac{8\pi k}{c^4} \left[\frac{(p + \epsilon)v^\alpha v^\beta}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} + \frac{\epsilon - p}{2} \gamma^{\alpha\beta} \right]. \quad (5)$$

Tenzor $P^{\alpha\beta}$ je tridimenzionalni tenzor, ki ga sestavimo iz $\gamma_{\alpha\beta}$, tako kot je R^{ik} sestavljen iz g_{ik} . *

§96 Napetostni psevdotenzor gravitacijskega polja

V odsotnosti gravitacijskega polja zapišemo zakon o ohranitvi energije in gibalne količine snovi (in elektromagnetnega polja) z enačbo $\partial T^{ik}/\partial x^k = 0$. Posplošitev te enačbe na primer, ko je gravitacijsko polje prisotno, je enačba (94.7):

$$T_{i;k}^k = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(T_i^k \sqrt{-g})}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} T^{kl} = 0. \quad (96.1)$$

V tej obliki pa ta enačbe ne izraža nobenega ohranitvenega zakona. †

*Einsteinove enačbe lahko na podoben način zapišemo tudi za splošni primer časovno odvisne metrike. Poleg časovnih odvodov bodo enačbe vsebovale tudi časovne odvode količin $\gamma_{\alpha\beta}$, g_α in h . Glej A. L. Zel'manov, *Doklady Acad. Sci., S. Z.* **107**, 815 (1956).

†Ker se integral $\int T_i^k \sqrt{-g} dS_k$ ohranja le, če je izpolnjen pogoj

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}T_i^k)}{\partial x^k} = 0,$$

ne pa pogoj (96.1). To lahko zlahka preverimo, če v krivočrtnih koordinatah opravimo račune, ki so bili v § 29 narejeni v Galilejevih koordinatah. Poleg tega zadostuje že, da opazimo, da imajo ti izračuni povsem formalen pomen, ki ni povezan s tenzorskimi lastnostmi ustreznih količin, podobno kot dokaz Gaussovega izreka, ki ima isto obliko (83.19) tako v krivočrtnih kot v kartezičnih koordinatah.

To je povezano z dejstvom, da se v gravitacijskem polju ne ohranja ločeno četverec gibalne količine snovi, temveč le četverec gibalne količine snovi in gravitacijskega polja; slednje v izrazu za T_i^k ni vsebovano.

Sedaj bomo določili ohranjeni skupni četverec gibalne količine gravitacijskega polja in snovi v njem (L. D. Landau in E. M. Lifšic, 1947). Izberemo si takšen koordinatni sistem, v katerem so v izbrani točki prostora-časa vsi prvi odvodi količin g_{ik} enaki nič (količine g_{ik} zato še nimajo nujno Galilejevih vrednosti). V tej točki drugi člen v enačbi (96.1) odpade, v prvem členu pa lahko $\sqrt{-g}$ izpostavimo iz odvoda in preostane

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T_i^k = 0,$$

kar s kontravariantnimi komponentami zapišemo kot

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T^{ik} = 0.$$

Količine T^{ik} , ki identično zadovoljijo to enačbo, lahko zapišemo v obliki

$$T^{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l} \eta^{ikl},$$

kjer so η^{ikl} količine, ki so antisimetrične v indeksih k in l :

$$\eta^{ikl} = -\eta^{ilk}.$$

Pravzaprav ni težko zapisati T^{ik} v takšni obliki. Začnemo z enačbo polja

$$T^{ik} = \frac{c^4}{8\pi k} \left(R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R \right),$$

tenzor R^{ik} pa zapišemo po (92.1) kot

$$R^{ik} = \frac{1}{2} g^{im} g^{kp} g^{ln} \left\{ \frac{\partial^2 g_{lp}}{\partial x^m \partial x^n} + \frac{\partial^2 g_{mn}}{\partial x^l \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{ln}}{\partial x^m \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{mp}}{\partial x^l \partial x^n} \right\}$$

(spomnimo se, da so v obravnavani točki vsi $\Gamma_{kl}^i = 0$). Po preprostih pretvorbah lahko tenzor T^{ik} zapišemo v obliki

$$T^{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l} \left\{ \frac{c^4}{16\pi k} \frac{1}{(-g)} \frac{\partial}{\partial x^m} [(-g)(g^{ik} g^{lm} - g^{il} g^{km})] \right\}.$$

Izraz med zavitimi oklepaji je antisimetričen v indeksih k in l , in je količina, ki smo jo zgoraj označili z η^{ikl} . Ker so prvi odvodi količin g_{ik} enaki nič v obravnavani točki, lahko faktor $1/(-g)$ izpostavimo pred znak za odvajanje $\partial/\partial x^l$. Vpeljemo zapis

$$h^{ikl} = \frac{\partial}{\partial x^m} \lambda^{iklm}, \quad (96.2)$$

$$\lambda^{iklm} = \frac{c^4}{16\pi k} (-g)(g^{ik} g^{lm} - g^{il} g^{km}). \quad (96.3)$$

Količine h^{ikl} so antisimetrične v indeksih k in l :

$$h^{ikl} = -h^{ilk}. \quad (96.4)$$

Zapišemo lahko torej

$$\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l} = (-g)T^{ik}.$$

Ta relacija, ki smo jo izpeljali ob predpostavki $\partial g_{ik}/\partial x^l = 0$, ne velja več, ko se preselimo v poljubni koordinatni sistem. V splošnem je razlika $\partial h^{ikl}/\partial x^l - (-g)T^{ik}$ različna od nič; označimo jo z $(-g)t^{ik}$. Tedaj imamo po definiciji

$$(-g)(T^{ik} + t^{ik}) = \frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}. \quad (96.5)$$

Količine t^{ik} so simetrične v indeksih i in k :

$$t^{ik} = t^{ki}. \quad (96.6)$$

To je takoj razvidno iz definicije, ker so, podobno kot tenzor T^{ik} , odводи $\partial h^{ikl}/\partial x^l$ simetrične količine. * Tenzor T^{ik} izrazimo z R^{ik} v skladu z Einsteinovimi enačbami in dobimo identiteto

$$(-g) \left\{ \frac{c^4}{8\pi k} (R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R) + t^{ik} \right\} = \frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}, \quad (96.7)$$

od koder dobimo po dokaj dolgem izračunu naslednji izraz za t^{ik} :

$$\begin{aligned} t^{ik} = \frac{c^4}{16\pi k} \{ & (2\Gamma_{lm}^n \Gamma_{np}^p - \Gamma_{lp}^n \Gamma_{mn}^p - \Gamma_{ln}^n \Gamma_{mp}^p)(g^{il}g^{km} - g^{ik}g^{lm}) + \\ & + g^{il}g^{mn}(\Gamma_{lp}^k \Gamma_{mn}^p + \Gamma_{mn}^k \Gamma_{lp}^p - \Gamma_{np}^k \Gamma_{lm}^p - \Gamma_{lm}^k \Gamma_{np}^p) + \\ & + g^{kl}g^{mn}(\Gamma_{lp}^i \Gamma_{mn}^p + \Gamma_{mn}^i \Gamma_{lp}^p - \Gamma_{np}^i \Gamma_{lm}^p - \Gamma_{lm}^i \Gamma_{np}^p) + \\ & + g^{lm}g^{np}(\Gamma_{ln}^i \Gamma_{mp}^k - \Gamma_{lm}^i \Gamma_{np}^k) \}, \end{aligned} \quad (96.8)$$

kar lahko zapišemo tudi s prvimi odводи komponent metričnega tenzorja kot

$$\begin{aligned} (-g)t^{ik} = \frac{c^4}{16\pi k} \{ & \mathcal{G}^{ik},_l \mathcal{G}^{lm},_m - \mathcal{G}^{il},_l \mathcal{G}^{km},_m + \frac{1}{2}g^{ik}g_{lm}\mathcal{G}^{ln},_p \mathcal{G}^{pm},_n - \\ & - (g^{il}g_{mn}\mathcal{G}^{kn},_p \mathcal{G}^{mp},_l + g^{kl}g_{mn}\mathcal{G}^{in},_p \mathcal{G}^{mp},_l) + g_{lm}g^{np}\mathcal{G}^{il},_n \mathcal{G}^{km},_p + \\ & + \frac{1}{8}(2g^{il}g^{km} - g^{ik}g^{lm})(2g_{np}g_{qr} - g_{pq}g_{nr})\mathcal{G}^{nr},_l \mathcal{G}^{pq},_m \}, \end{aligned} \quad (96.9)$$

kjer je $\mathcal{G}^{ik} = \sqrt{-g}g^{ik}$, in indeks $,i$ označuje običajni odvod po x^i .

Bistvena lastnost količin t^{ik} je ta, da ne tvorijo tenzorja; to je razvidno iz tega, da v $\partial h^{ikl}/\partial x^l$ nastopa običajni, in ne kovariantni odводи. Toda t^{ik} lahko izrazimo s količinami Γ_{kl}^i , slednje pa se obnašajo kot tenzor pri linearnih koordinatnih transformacijah (glej §85), zato to velja tudi za t^{ik} .

*Prav zato smo $(-g)$ izpostavili pred znak za odvajanje v izrazu za T^{ik} . V nasprotnem primeru $\partial h^{ikl}/\partial x^l$ in zato tudi t^{ik} ne bi bila simetrična v indeksih i in k .

Iz definicije (96.5) sledi, da za vsoto $T^{ik} + t^{ik}$ identično velja enačba

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(-g)(T^{ik} + t^{ik}) = 0. \quad (96.10)$$

To pomeni, da obstaja ohranitveni zakon za količine

$$P^i = \frac{1}{c} \int (-g)(T^{ik} + t^{ik}) dS_k. \quad (96.11)$$

V odsotnosti gravitacijskega polja in v Galilejevih koordinatah je $t^{ik} = 0$, in zgoraj zapisani integral postane $(1/c) \int T^{ik} dS_k$, kar je četverec gibalne količine snovi. Zato mora biti količina (96.11) skupni četverec gibalne količine snovi in gravitacijskega polja. Skupina količin t^{ik} se imenuje *napetostni psevdotenzor* gravitacijskega polja.

Integral v (96.11) lahko izračunamo po poljubni neskončni hiperploskvi, vključno s celotnim tridimenzionalnem prostorom. Če si izberemo hiperploskev $x^0 = \text{konst}$, potem lahko P^i zapišemo v obliki tridimenzionalnega prostorskega integrala

$$P^i = \frac{1}{c} \int (-g)(T^{i0} + t^{i0}) dV. \quad (96.12)$$

To dejstvo, da je skupni četverec gibalne količine snovi in polja možno izraziti kot integral količine $(-g)(T^{ik} + t^{ik})$, ki je simetrična v indeksih i in k , je zelo pomemben. Pomeni namreč, da obstaja ohranitveni zakon za vrtilno količino, definirano kot (glej §32) *

$$M^{ik} = \int (x^i dP^k - x^k dP^i) = \frac{1}{c} \int \{x^i (T^{kl} + t^{kl}) - x^k (T^{il} + t^{il})\} (-g) dS_l. \quad (96.13)$$

Zato se tudi v splošni teoriji relativnosti skupna vrtilna količina izoliranega sistema gravitirajočih teles ohranja. Poleg tega lahko ponovno definiramo težišče, ki se giblje enakomerno premočrtno. Slednje dejstvo je povezano z ohranjanjem komponent $M^{0\alpha}$ (glej §14), kar zapišemo z enačbo

$$x^0 \int (T^{\alpha 0} + t^{\alpha 0}) (-g) dV - \int x^\alpha (T^{00} + t^{00}) (-g) dV = \text{konst}.$$

Koordinate težišča lahko zapišemo kot

$$X^\alpha = \frac{\int x^\alpha (T^{00} + t^{00}) (-g) dV}{\int (T^{00} + t^{00}) (-g) dV}. \quad (96.14)$$

Z izbiro koordinatnega sistema, ki je inercialen v izbranem diferencialnem delu prostora, lahko izničimo vse količine t^{ik} v poljubni točki prostora-časa (ker so tedaj vsi Γ_{kl}^i enaki nič). Po drugi strani lahko dobimo od nič različne količine t^{ik} tudi v ravnem prostoru, torej v odsotnosti gravitacijskega polja, če uporabljamo krivočrtne koordinate namesto kartezičnih. Zato ni smiselno govoriti o določeni lokalizaciji v prostoru energije gravitacijskega polja. Če je

*Poudariti moramo, da dobljeni izraz za četverec gibalne količine snovi in polja nikakor ni edini možni. Prav nasprotno: obstaja neskončno veliko izrazov (glej na primer nalogo v tem razdelku), ki se v odsotnosti polja poenostavijo na T^{ik} in ki, integrirani po dS_k , opisujejo ohranitev iste količine. Vseeno pa je naša izbira edina, pri kateri napetostni psevdotenzor polja vsebuje le prve odvode (ne pa višjih) metrike g_{ik} (pogoj, ki je povsem naraven iz fizikalnega vidika) in ki je poleg tega simetrična, tako da lahko postavimo zakon o ohranitvi vrtilne količine.

tenzor T_{ik} enak nič v določeni svetovni točki, potem je enak nič tudi v vseh ostalih opazovalnih sistemih, zato lahko rečemo, da v tej točki ni niti snovi, niti elektromagnetnega polja. Povsem drugače je s psevdotenzorjem, pri katerem njegova ničnost v dani točki v enem opazovalnem sistemu nikakor ne pomeni, da je enak nič tudi v drugih opazovalnih sistemih, zato se je nesmiselno vprašati, če je v dani točki gravitacijska energija ali ne. To ustreza dejstvu, da lahko s primerno izbiro koordinat vedno "izničimo" gravitacijsko polje v danem diferencialnem delu prostora. V tem primeru, kot smo že pokazali, psevdotenzor t^{ik} prav tako postane enak nič v tem istem diferencialnem delu prostora.

Količine P^i (četverec gibalne količine snovi in polja) imajo povsem določen pomen in so neodvisne od izbire opazovalnega sistema do tiste mere, ki je potrebna na osnovi fizikalnih pogojev.

Okoli obravnavanih mas narišimo tako veliko območje prostora, da lahko rečemo, da zunaj območja ni gravitacijskega polja. S časom bo to območje orisalo "kanal" v četvernem prostoru-času. Zunaj tega kanala polja ni in tam je prostor-čas raven. Ko računamo energijo in gibalno količino polja, si moramo zato izbrati takšen opazovalni sistem, da bo zunaj kanala Galilejev in bodo količine t^{ik} enake nič.

S to zahtevo opazovalni sistem nikakor ni enolično določen – v notranjosti kanala je še povsem poljuben. Toda izkaže se, da so količine P^i povsem neodvisne od izbire koordinatnega sistema v notranjosti kanala, kot to tudi morajo biti zaradi njihovega fizikalnega pomena. Mislimo si, da imamo dva koordinatna sistema, ki se razlikujeta v notranjosti kanala, zunaj njega pa sta oba enak Galilejev sistem. Primerjajmo vrednosti četverca gibalne količine P^i in P'^i v teh dveh sistemih v določenih trenutkih "časa" x^0 in x'^0 . Vpeljimo še tretji opazovalni sistem, ki se v notranjosti kanala ob času x^0 ujema s prvim sistemom, ob času x'^0 z drugim, zunaj kanala pa je Galilejev. V skladu z zakonom o ohranitvi energije in gibalne količine so količine P^i konstantne ($dP^i/dx^0 = 0$). To velja tako za tretji, kot za prva dva sistema, zato od tod sledi, da je $P^i = P'^i$.

Omenili smo, da se količine t^{ik} obnašajo kot tenzor ob linearnih koordinatnih transformacijah. Zato količine P^i tvorijo četverec glede na takšne transformacije; med te transformacije spadajo tudi Lorentzeve transformacije, ki v neskončnosti preslikajo en Galilejev opazovalni sistem v drugega. * Četverec gibalne količine P^i lahko izrazimo tudi kot integral po oddaljeni tri-dimenzionalni ploskvi, ki obkroža "celoten prostor". V enačbo (96.11) vstavimo (96.5) in dobimo

$$P^i = \frac{1}{c} \int \frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l} dS_k.$$

Ta integral lahko pretvorimo v integral po navadni ploskvi s pomočjo (6.17):

$$P^i = \frac{1}{2c} \oint h^{ikl} df_{kl}^*. \quad (96.15)$$

Če si za integracijsko ploskev v (96.11) izberemo $x^0 = \text{konst.}$, potem je integracijska ploskev

*Strogo vzeto je po definiciji (96.11) P^i četverec le proti linearnim transformacijam z determinanto ena; med njimi so Lorentzeve transformacije, ki so edine fizikalno zanimive. Če dopustimo tudi pretvorbe, katerih determinanta ni enaka ena, moramo v definicijo P^i dodati vrednost g v neskončnosti, tako da zapišemo $\sqrt{-g_\infty} P^i$ namesto P^i na levi strani (96.11).

v (96.15) ploskev v običajnem prostoru: [†]

$$P^i = \frac{1}{c} \oint h^{i0\alpha} df_\alpha. \quad (96.16)$$

Analogno formulo za vrtilno količino lahko izpeljemo tako, da (96.5) vstavimo v (96.13) in h^{ikl} zapišemo v obliki (96.2). Z integracijo per partes dobimo

$$\begin{aligned} M^{ik} &= \frac{1}{c} \int \left(x^i \frac{\partial^2 \lambda^{klmn}}{\partial x^m \partial x^n} - x^k \frac{\partial^2 \lambda^{ilmn}}{\partial x^m \partial x^n} \right) dS_i \\ &= \frac{1}{2c} \int \left(x^i \frac{\partial \lambda^{klmn}}{\partial x^n} - x^k \frac{\partial \lambda^{ilmn}}{\partial x^n} \right) df_{lm}^* - \frac{1}{c} \int \left(\delta_m^i \frac{\partial \lambda^{klmn}}{\partial x^n} - \delta_m^k \frac{\partial \lambda^{ilmn}}{\partial x^n} \right) dS_l \\ &= \frac{1}{2c} \int (x^i h^{klm} - x^k h^{ilm}) df_{lm}^* - \frac{1}{c} \int \frac{\partial}{\partial x^n} (\lambda^{klin} - \lambda^{ilkn}) dS_l. \end{aligned}$$

Iz definicije količin λ^{iklm} lahko hitro razberemo, da velja

$$\lambda^{ilkn} - \lambda^{klin} = \lambda^{lnk}, \quad \lambda^{lnk} = -\lambda^{lnk}.$$

Preostali integral po dS_l je torej enak

$$\frac{1}{c} \int \frac{\partial \lambda^{ilnk}}{\partial x^n} dS_l = \frac{1}{2c} \int \lambda^{lnk} df_{ln}^*.$$

Ponovno si kot integracijsko območje izberemo povsem prostorsko hiperploskev in končno dobimo

$$M^{ik} = \frac{1}{c} \int (x^i h^{k0\alpha} - x^k h^{i0\alpha} + \lambda^{i0\alpha k}) df_\alpha. \quad (96.17)$$

NALOGA

Izpelji izraz za skupni četverec gibalne količine snovi in gravitacijskega polja z uporabo enačbe (32.5).

Rešitev: V krivočrtnih koordinatah namesto enačbe (32.1) velja

$$S = \int \Lambda \sqrt{-g} dV dt,$$

zato bomo dobili ohranjeno količino, če v (32.5) vstavimo $\Lambda \sqrt{-g}$ namesto Λ . Četverec gibalne količine zapišemo torej kot

$$P_i = \frac{1}{c} \int \left[-\Lambda \sqrt{-g} \delta_i^k + \Sigma \frac{\partial q^{(l)}}{\partial x^i} \frac{\partial (\sqrt{-g} \Lambda)}{\partial \frac{\partial q^{(l)}}{\partial x^k}} \right] dS_k.$$

Ko to enačbo uporabimo za snov, pri kateri količine $q^{(l)}$ niso odvisne od g_{ik} , lahko $\sqrt{-g}$ izpostavimo pred znak za odvajanje in integrand postane enak $\sqrt{-g} T_i^k$, kjer je T_i^k napetostni tenzor snovi. Ko

[†]Količina df_{kl}^* je "pravokotna" na infinitezimalno ploskvico; s "tangentnim" diferencialom je povezana preko $df_{ik}^* = \frac{1}{2} e_{iklm} df^{lm}$. Na ploskvi, ki omejuje hiperploskev, ki je pravokotna na os x^0 , so edine od nič različne komponente df^{lm} tiste, za katere je $l, m = 1, 2, 3$, zato je pri od nič različnih komponentah tenzorja df_{ik}^* vsaj eden izmed indeksov i in k enak nič. Komponente $df_{0\alpha}^*$ pa so kar enake komponentam tridimenzionalnega diferenciala ploščine običajne ploskve, ki jih označujemo z df_α .

uporabimo isto enačbo za gravitacijsko polje, moramo vzeti $\Lambda = -(c^4/16\pi k)G$, količine $q^{(l)}$ pa so komponente g_{ik} metričnega tenzorja. Celotni četverec gibalne količine polja in snovi je torej enak:

$$P_i = \frac{1}{c} \int T_i^k \sqrt{-g} dS_k + \frac{c^3}{16\pi k} \int \left[G \sqrt{-g} \delta_i^k - \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} \frac{\partial (G \sqrt{-g})}{\partial \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^k}} \right] dS_k.$$

Z uporabo izraza (93.4) za G , lahko to zapišemo kot

$$P_i = \frac{1}{c} \int \left[T_i^k \sqrt{-g} + \frac{c^4}{16\pi k} \left(G \sqrt{-g} \delta_i^k + \Gamma_{im}^k \frac{\partial (g^{lm} \sqrt{-g})}{\partial x^i} - \Gamma_{ml}^l \frac{\partial (g^{mk} \sqrt{-g})}{\partial x^i} \right) \right] dS_k.$$

Drugi člen med oglatima oklepajema je četverec gibalne količine gravitacijskega polja v odsotnosti snovi. Integrand ni simetričen v indeksih i in k , zato ne moremo od tod dobiti zakona o ohranitvi vrtilne količine.

§97 Sinhroni opazovalni sistem

Iz 84 vemo, da lahko ure sinhroniziramo v različnih točkah prostora, če so komponente $g_{0\alpha}$ metričnega tenzorja enake nič. Če poleg tega velja še $g_{00} = 1$, je časovna koordinata $x^0 = t$ v vsaki točki prostora lastni čas. * Opazovalni sistem, v katerem velja

$$g_{0\alpha} = 0, \quad g_{00} = 1, \quad (97.1)$$

je *sinhroni* opazovalni sistem. Diferencialna dolžina v takšnem sistemu je podana z

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (97.2)$$

kjer so komponente prostorskega metričnega tenzorja enake (do predznaka natančno) komponentam $g_{\alpha\beta}$:

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}. \quad (97.3)$$

V sinhronem opazovalnem sistemu so časovnice (angl. *time lines*) geodetke v prostoru-času. Četverec $u^i = dx^i/ds$, ki je tangenta na svetovnico $x^1, x^2, x^3 = \text{konst}$, ima komponente $u^\alpha = 0, u^0 = 1$, in avtomatično zadosti enačbam geodetke:

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{kl}^i u^k u^l = \Gamma_{00}^i = 0,$$

ker sta Christoffelova simbola Γ_{00}^α in Γ_{00}^0 identično enaka nič zaradi pogoja (97.1).

Hitro se lahko prepričamo, da so te krivulje normalne na hiperploskve $t = \text{konst}$. Normalni četverec na takšno hiperploskev, $n_i = \partial t / \partial x^i$, ima kovariantne komponente $n_0 = 1, n_\alpha = 0$. Zaradi pogoja (97.1) so tudi ustrezne kontravariantne komponente enake: $n^0 = 1, n^\alpha = 0$, torej so enake komponentam četverca u^i , ki je tangenta na časovnice.

Te lastnosti pa lahko uporabimo tudi za geometrijsko konstrukcijo sinhronega opazovalnega sistema v poljubnem prostoru-času. V ta namen si na začetku izberemo prostorsko hiperploskev, torej takšno hiperploskev, na kateri so normale v vsaki točki v časovni smeri (torej ležijo znotraj svetlobnega stožca, katerega vrh leži v izbrani točki). Nato poiščemo družino geodetk, normalnih na to hiperploskev. Te geodetke si izberemo kot krivulje časovne

*V tem odseku postavimo $c = 1$.

koordinate in vpeljemo časovno koordinato t kot ločno dolžino geodetk, merjeno iz izhodišč na začetni hiperploskvi. Tako dobimo sinhroni koordinatni sistem.

Očitno je, da je konstrukcija in izbira sinhronnega koordinatnega sistema vsaj načeloma vedno mogoča. Poleg tega ta izbira ni enolična. Metrika oblika (97.2) dopušča poljubne transformacije prostorskih koordinat, ki ne prizadenejo časovne koordinate, ter transformacije, ki ustrezajo poljubnosti izbire začetne hiperploskve pri geometrijski konstrukciji.

Prehod v sinhron opazovalni sistem lahko načeloma poiščemo tudi analitično z uporabo Hamilton-Jacobijeve enačbe; temelj tega pristopa je dejstvo, da so trajektorije delcev v gravitacijskem polju prav geodetke.

Hamilton-Jacobijeva enačba za delec (katerega maso postavimo na ena) v gravitacijskem polju je

$$g^{ik} \frac{\partial \tau}{\partial x^i} \frac{\partial \tau}{\partial x^k} = 0, \quad (97.4)$$

(kjer akcijo označimo z τ). Popolni integral enačbe je oblike

$$\tau = f(\xi^\alpha, x^i) + A(\xi^\alpha), \quad (97.5)$$

kjer je f funkcija štirih koordinat x^i in treh parametrov ξ^α ; četrto konstanto A smatramo kot poljubno funkcijo količin ξ^α . S takšnim zapisom akcije τ lahko enačbe za trajektorije delcev dobimo tako, da postavimo odvode $\partial \tau / \partial \xi^\alpha$ na nič, in dobimo

$$\frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha} = -\frac{\partial A}{\partial \xi^\alpha}. \quad (97.6)$$

Za vsako skupino izbranih vrednosti parametrov ξ^α imajo desne strani (97.6) določene konstantne vrednosti in svetovnica, ki jo te enačbe določajo, je ena izmed možnih poti delca. Če si izberemo količine ξ^α , ki so konstantne po trajektoriji, kot nove prostorske koordinate in količino τ kot novo časovno koordinato, dobimo sinhroni opazovalni sistem; transformacija, ki nas preseli iz starih v nove koordinate, je podana z enačbama (97.5) in (97.6). Še več: pri takšni transformaciji bodo dobljene časovnice geodetke in bodo normalne na ploskve $\tau = \text{konst.}$ Slednje sledi iz analogije z mehaniko: četverec $-\partial \tau / \partial x^i$, ki je normalen na hiperploskev, v mehaniki ustreza četvercu gibalne količine delca, in je zato v smeri četverca hitrosti u^i , torej v smeri četverca, ki je tangenta na trajektorijo. Zadoščeno je tudi pogoju $g_{00} = 1$, saj je odvod akcije v smeri trajektorije $-d\tau/ds$ enak masi delca, ki smo jo postavili na ena, zato je $|d\tau/ds| = 1$.

Zapišimo Einsteinove enačbe v sinhronem opazovalnem sistemu, pri čemer bomo ločili časovne in prostorske odvode.

Vpeljimo zapis

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial t}. \quad (97.7)$$

za časovne odvode tridimenzionalnega metričnega tenzorja; te količine tvorijo tenzor. Vse premike indeksov in kovariantno odvajanje tridimenzionalnega tenzorja $\kappa_{\alpha\beta}$ bo opravili v tridimenzionalnem prostoru z metriko $\gamma_{\alpha\beta}$. * Opazimo, da je vsota κ_α^α enaka logaritmičnemu odvodu determinante $\gamma \equiv |\gamma_{\alpha\beta}| = -g$:

$$\kappa_\alpha^\alpha = \gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \ln(\gamma). \quad (97.8)$$

*To pa seveda ne velja za operacije premikanje indeksov prostorskih komponent štiridimenzionalnih tenzorjev R_{ik} , T_{ik} (glej opombo na strani 251). Zato moramo T_α^β razumeti kot $g^{\beta\gamma} T_{\gamma\alpha} + g^{\beta 0} T_{0\alpha}$, kar se v obravnavanem primeru poenostavi na $g^{\beta\gamma}$, kar se od $\gamma^{\beta\gamma} T_{\gamma\alpha}$ razlikuje v predznaku.

Christoffelove simbole zapišemo kot

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^0 &= \Gamma_{00}^\alpha = \Gamma_{0\alpha}^0 = 0 \\ \Gamma_{\alpha\beta}^0 &= \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\beta}, \quad \Gamma_{0\beta}^\alpha = \frac{1}{2}\kappa_\beta^\alpha, \quad \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \lambda_{\beta\gamma}^\alpha,\end{aligned}\tag{97.9}$$

kjer so $\lambda_{\beta\gamma}^\alpha$ tridimenzionalni Christoffelovi simboli, ki jih dobimo iz tenzorja $\gamma_{\alpha\beta}$. Izračun z uporabo enačbe (92.8) da naslednje izraze za komponente tenzorja R_{ik} :

$$\begin{aligned}R_{00} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\kappa_\alpha^\alpha - \frac{1}{4}\kappa_\alpha^\beta\kappa_\beta^\alpha, \\ R_{0\alpha} &= \frac{1}{2}(\kappa_{\alpha;\beta}^\beta\kappa_{\beta;\alpha}^\beta), \\ R_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\kappa_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}(\kappa_{\alpha\beta}\kappa_\gamma^\gamma - 2\kappa_\alpha^\gamma\kappa_{\beta\gamma}) + P_{\alpha\beta}.\end{aligned}\tag{97.10}$$

Tenzor $P_{\alpha\beta}$ je tridimenzionalni Riccijev tenzor, ki ga z $\gamma_{\alpha\beta}$ zapišemo na enak način kot R_{ik} s količinami g_{ik} . Vse operacije dvigovanja indeksov in kovariantnega odvajanja opravimo z uporabo tridimenzionalnega metričnega tenzorja $\gamma_{\alpha\beta}$.

Einsteinove enačbe zapišemo z mešanimi komponentami:

$$R_0^0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\kappa_\alpha^\alpha - \frac{1}{4}\kappa_\alpha^\beta\kappa_\beta^\alpha = 8\pi k(T_0^0 - \frac{1}{2}T),\tag{97.11}$$

$$R_\alpha^0 = \frac{1}{2}(\kappa_{\alpha;\beta}^\beta - \kappa_{\beta;\alpha}^\beta) = 8\pi kT_\alpha^0,\tag{97.12}$$

$$R_\alpha^\beta = -P_\alpha^\beta - \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\gamma}\kappa_\alpha^\beta) = 8\pi k(T_\alpha^\beta - \frac{1}{2}\delta_\alpha^\beta T).\tag{97.13}$$

Posebna lastnost sinhronih opazovalnih sistemov je ta, da niso stacionarni; v njih gravitacijsko polje ne more biti nespremenljivo. V nespremenljivem polju bi namreč veljalo $\kappa_{\alpha\beta} = 0$. Toda v prisotnosti snovi bi bila ničnost vseh $\kappa_{\alpha\beta}$ v nasprotju z enačbo (97.11) (katere desna stran bi bila od nič različna). V praznem prostoru bi iz (97.13) sledilo, da so vsi $P_{\alpha\beta}$ (in z njimi tudi vse komponente tridimenzionalnega krivinskega tenzorja $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$) enaki nič, torej polja ne bi bilo (v sinhronem opazovalnem sistemu z evklidsko prostorsko metriko je prostor-čas raven).

Velja tudi, da snov v prostoru v splošnem ne more mirovati glede na sinhroni opazovalni sistem. To je razvidno iz dejstva, da se delci snovi, znotraj katere obstaja končen pritisk, ne gibljejo po geodetkah; svetovnica mirujočega delca pa je časovnica in zato geodetka sinhronnega opazovalnega sistema. Posebni primer je le "prah" ($p = 0$). V tem primeru se bodo interagirajoči delci gibal po geodetkah, zato v tem primeru ni protislovja med pogojem za sinhroni opazovalni sistem in pogojem, da se ta sistem sogiblje (angl. *comove*) s snovjo. *

* Celo v tem primeru se more snov gibati "brez vrtenja", če si želimo izbrati "sinhrono sogibljiv" opazovalni sistem. V sogibljivem sistemu so kontravariantne komponente hitrosti enake $u^0 = 1, u^\alpha = 0$. Če je opazovalni sistemu tudi sinhron, morajo kovariantne komponente biti $u_0 = 1, u_\alpha = 0$, zato mora biti štiridimenzionalni rotor enak nič:

$$u_{i;k} - u_{k;i} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x^k} - \frac{\partial u_k}{\partial x^i} = 0.$$

Ta tenzorska enačba mora veljati tudi v vsakem drugem opazovalnem sistemu. Zato lahko v sinhronem, a ne sogibljivem, sistemu zapišemo pogoj $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ za tridimenzionalno hitrost $\mathbf{v}$.

Pri drugačnih enačbah stanja je stanje podobno pravkar opisanemu le v posebnih primerih, ko ni gradienta pritiska v vseh ali v nekaterih smereh.

Z uporabo enačbe (97.11) lahko pokažemo, da mora determinanta metričnega tenzorja $-g = \gamma$ v sinhronem opazovalnem sistemu v končnem času doseči vrednost 0.

Na poti do dokaza najprej ugotovimo, da je izraz na desni strani te enačbe pozitiven za poljubno porazdelitev snovi. V sinhronem opazovalnem sistemu dobimo za napetostni tenzor (94.9):

$$T_0^0 - \frac{1}{2}T = \frac{1}{2}(\epsilon + 3p) + \frac{(p + \epsilon)v^2}{1 - v^2}$$

[komponente četverca hitrosti so podane z (88.14)]; ta količina pa je očitno pozitivna. Isto velja tudi za napetostni tenzor elektromagnetnega polja ($T = 0$, T_0^0 pa je pozitivna gostota energije polja). Iz (97.11) zato sledi

$$-R_0^0 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \kappa_\alpha^\alpha + \frac{1}{4} \kappa_\alpha^\beta \kappa_\beta^\alpha \leq 0 \quad (97.14)$$

(enakost velja v praznem prostoru).

Z uporabo algebrajske neenačbe *

$$\kappa_\beta^\alpha \kappa_\alpha^\beta \geq \frac{1}{3} (\kappa_\alpha^\alpha)^2$$

lahko (97.14) zapišemo v obliki

$$\frac{\partial}{\partial t} \kappa_\alpha^\alpha + \frac{1}{6} (\kappa_\alpha^\alpha)^2 \leq 0$$

ali

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\kappa_\alpha^\alpha} \right) \geq \frac{1}{6}. \quad (97.15)$$

Naj bo ob nekem času $\kappa_\alpha^\alpha > 0$. Z upadajočim t se količina $1/\kappa_\alpha^\alpha$ zmanjšuje s končnim (od nič različnim) odvodom, tako da mora doseči vrednost 0 (po pozitivnih vrednostih) v končnem času. Tedaj gre κ_α^α proti $+\infty$, toda ker je $\kappa_\alpha^\alpha = \partial \ln \gamma / \partial t$, to pomeni, da gre determinanta γ proti nič [najhitreje kot t^6 , kar nam pove neenačba (97.15)]. Če je ob začetnem času $\kappa_\alpha^\alpha < 0$, potem dobimo isti rezultat za naraščajoči čas t .

Ta rezultat pa še ne dokazuje, da imamo opravka s pravo fizikalno singularnostjo metrike. Fizikalna singularnost je lastnost prostora časa samega in ni povezana z vrsto opazovalnega sistema, ki smo si ga izbrali (pravo singularnost bi zaznali kot neskončno naraščanje različnih skalarnih količin – gostote snovi ali invariant krivinskega tenzorja). Singularnost v sinhronem opazovalnem sistemu, ki se ji – kot dokazano – ne moremo izogniti, je običajno le navidezna in izgine, ko se preselimo v drugi (nesinhroni) opazovalni sistem. Izvor singularnosti postane razviden s preprostim geometrijskim razmislekom.

Pokazali smo, da sinhron opazovalni sistem konstruiramo tako, da narišemo družino geodetk, ki so pravokotne na poljubno prostorsko hiperploskev. Geodetke poljubne družine se bodo v splošnem med seboj sekale na neki ogrinjalni hiperploskvi, ki so štiridimenzionalna posplošitev kavstičnih ploskev v geometrijski optiki. Vemo pa, da sekanje koordinatnih črt vodi k singularnosti metrike koordinatnega sistema. To je torej geometrijski vzrok singularnosti, ki je povezan z lastnostmi, ki so specifične za izbrani sinhroni opazovalni sistem, in zato niso fizikalnega značaja. V splošnem dopušča poljubna metrika četrtega prostora

*Veljavnost te enačbe lahko preverimo tako, da tenzor κ_α^β diagonaliziramo (v izbranem trenutku).

obstoj družine geodetk, ki se ne sekajo. Ničelnost determinante v sinhronem opazovalnem sistemu, ki se ji ne moremo izogniti, pomeni, da je ukrivljenost realnega (neravnega) prostora (ki je izražena z $R_0^0 \geq 0$), ki jo dopuščajo enačbe polja takšna, da se časovne črte v sinhronem opazovalnem sistemu vedno sekajo. [†]

Prej smo omenili, da je v prašni (angl. *dustlike*) snovi sinhroni opazovalni sistem lahko sogibljev. V tem primeru gre gostota snovi proti neskončnosti na kavstiki kot posledica sekanja svetovnic delcev, ki sovpadajo s časovnicami. Jasno pa je, da se lahko singularnosti gostote izognemo, če predpostavimo obstoj poljubno majhnega od nič različnega pritiska v snovi, zato tudi ta singularnost ni fizikalnega značaja.

NALOGE

NALOGA 1. Poišči obliko rešitve za enačbe gravitacijskega polja v bližini točke, ki ni singularna, temveč je regularna v času.

Rešitev: Omenjeni trenutek si izberemo kot izhodišče za merjenje časa, zato iščemo $\gamma_{\alpha\beta}$ oblike

$$\gamma_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + tb^{\alpha\beta} + t^2 c_{\alpha\beta} + \dots, \quad (1)$$

kjer so $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ in $c_{\alpha\beta}$ funkcije prostorskih koordinat. V istem približku je recipročni tenzor enak

$$\gamma^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta} - tb^{\alpha\beta} + t^2 (b^{\alpha\gamma} b_{\gamma}^{\beta} - c^{\alpha\beta}),$$

kjer je tenzor $a^{\alpha\beta}$ recipročen tenzorju $a_{\alpha\beta}$, indekse drugih tenzorjev pa dvigujemo z uporabo $a^{\alpha\beta}$. Velja:

$$\kappa_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} + 2tc_{\alpha\beta}, \quad \kappa_{\alpha}^{\beta} = b_{\alpha}^{\beta} + t(2c_{\alpha}^{\beta} - b_{\alpha\gamma} b^{\beta\gamma}).$$

Einsteinove enačbe (97.11)-(97.13) nam dajo naslednje zveze:

$$R_0^0 = -c + \frac{1}{4} b_{\alpha}^{\beta} b_{\beta}^{\alpha} = 0, \quad (2)$$

$$R_{\alpha}^0 = \frac{1}{2} (b_{\alpha;\beta}^{\beta} - b_{;\alpha}) + t[-c_{;\alpha} + \frac{3}{8} (b_{\gamma}^{\gamma} etab_{\gamma}^{\beta})_{;\alpha} + c_{\alpha;\beta}^{\beta} + \frac{1}{4} b_{\alpha}^{\beta} b_{;\beta} - \frac{1}{2} (b_{\alpha}^{\gamma} b_{\gamma}^{\beta})_{;\beta}] = 0, \quad (3)$$

$$R_{\alpha}^{\beta} = -P_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{4} b_{\alpha}^{\beta} b + \frac{1}{2} b_{\alpha}^{\gamma} b_{\gamma}^{\beta} - c_{\alpha}^{\beta} = 0 \quad (4)$$

($b \equiv b_{\alpha}^{\alpha}$, $c \equiv c_{\alpha}^{\alpha}$). Operacije kovariantnega odvajanja opravljamo v tridimenzionalnem prostoru z metriko $a_{\alpha\beta}$; tudi tenzor $P_{\alpha\beta}$ je definiran glede na to metriko.

Iz (4) je razvidno, da so koeficienti $c_{\alpha\beta}$ povsem določeni s koeficienti $a_{\alpha\beta}$ in $b_{\alpha\beta}$. To uporabimo v (2) in dobimo

$$P + \frac{1}{4} b^2 - \frac{1}{4} b_{\alpha}^{\beta} b_{\beta}^{\alpha} = 0. \quad (5)$$

Iz členov ničelnega reda v (3) dobimo

$$b_{\alpha;\beta}^{\beta} = b_{;\alpha}. \quad (6)$$

[†]Več o analitični konstrukciji metrike v bližini navidezne singularnosti v sinhronem opazovalnem sistemu lahko bralec najde v E. M. Lifšitz, V. V. Sudakov in I. M. Khalatnikov, *JETP* **40**, 1847, 1961, (*Soviet Phys.-JETP* **13**, 1298, 1961). Splošne značilnosti metrike so jasne z geometrijskega vidika. Ker kavstična hiperploskev vedno vsebuje časovne intervale (diferenciale ločnih dolžin geodetskih časovnic v točkah, kjer so te tangentne na kavstiko), ne more biti prostorska. Poleg tega je na kavstiki ena izmed lastnih vrednosti metričnega tenzorja $\gamma_{\alpha\beta}$ enaka nič, kar je povezano s tem, da postane razdalja δ med dvema sosednjima geodetskama, ki se sekata v njunem dotikališču s kavstiko, enaka nič. Količina δ gre proti nič kot prva potenca razdalje l do presečišča. Zato gre lastna vrednost metričnega tenzorja, z njo pa tudi determinanta γ , proti nič kot l^2 .

Členi reda $\sim t$ v tej enačbi so identično enaki nič, če uporabimo (2) in (4)-(6), ter identiteto $P_{\alpha;\beta}^{\beta} = \frac{1}{2}P_{;\alpha}$ [glej (92.11)].

Dvanajst količin $a_{\alpha\beta}$ in $b_{\alpha\beta}$ je med seboj povezanih z eno zvezo (5) in tremi zvezami (6), zato ostane osem poljubnih funkcij, odvisnih od treh prostorskih koordinat. Izmed teh funkcij so tri povezane z možnostjo poljubne pretvorbe treh prostorskih koordinat, ena pa s poljubnostjo pri izbiri začetne hiperploskve, s katero določimo sinhroni opazovalni sistem. Zato nam preostane pravilno število (glej konec § 95) štirih “fizikalno različnih” poljubnih funkcij.

NALOGA 2. Izračunaj komponente krivinskega tenzorja R_{iklm} v sinhronem opazovalnem sistemu.

Rešitev: Z uporabo Christoffelovih simbolov (97.9) dobimo iz (92.1):

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -P_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{4}(\kappa_{\alpha\delta}\kappa_{\beta\gamma} - \kappa_{\alpha\gamma}\kappa_{\beta\delta}),$$

$$R_{0\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(\kappa_{\alpha\gamma;\beta} - \kappa_{\alpha\beta;\gamma}),$$

$$R_{0\alpha 0\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\kappa_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\kappa_{\alpha\gamma}\kappa_{\beta}^{\gamma},$$

kjer je $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ tridimenzionalni krivinski tenzor, ki ustreza tridimenzionalni metriki $\gamma_{\alpha\beta}$.

NALOGA 3. Zapiši splošno obliko infinitezimalne pretvorbe iz enega sinhronega opazovalnega sistema v drugega.

Rešitev: Pretvorbo lahko zapišemo kot

$$t \rightarrow t + \phi(x^1, x^2, x^3), \quad x^{\alpha} \rightarrow x^{\alpha} + \xi^{\alpha}(x^1, x^2, x^3),$$

kjer sta ϕ in ξ^{α} majhni količini. Pogoji $g_{00} = 1$ bo gotovo izpolnjen, saj ϕ ni odvisen od t ; da bo izpolnjen pogoj $g_{0\alpha} = 0$, pa mora veljati enačba

$$\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\alpha}},$$

od koder sledi

$$\xi^{\alpha} = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\beta}} \int \gamma^{\alpha\beta} dt + f^{\alpha}(x^1, x^2, x^3), \quad (1)$$

kjer so f^{α} ponovno majhne količine (in sestavljajo tridimenzionalni vektor $\mathbf{f}$). Prostorski metrični tenzor $\gamma_{\alpha\beta}$ preide v

$$\gamma_{\alpha\beta} \rightarrow \gamma_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha;\beta} - \xi_{\beta;\alpha} - \phi \kappa_{\alpha\beta} \quad (2)$$

[kar brez težav preverimo z uporabo (94.3)].

Pretvorba torej vsebuje štiri poljubne funkcije (ϕ, f^{α}) prostorskih koordinat.

§98 Einsteinove enačbe v tetradnem zapisu

Določanje komponent Riccijevega tenzorja (in dobljena formulacija Einsteinovih enačb) za metriko določene oblike v splošnem zahteva dokaj zahtevne račune. Zato je pomembno, da si ogledamo različne formule, ki poenostavijo te račune in omogočajo zapis rezultatov v bolj razumljivi obliki. Med takšne formule štejemo zapis krivinskega tenzorja v tetradni obliki.

Vpeljemo skupino štiri linearne neodvisnih koordinatnih vektorjev četvercev $e_{(a)}^i$ (oštevilčeni so z indeksom a), ki morajo zadostiti pogoju

$$e_{(a)}^i e_{(b)i} = \eta_{ab}, \quad (98.1)$$

kjer je η_{ab} podana simetrična matrika s signaturo $+- - -$; matriko, ki je tej matriki recipročna, označimo z η^{ab} ($\eta^{ac}\eta_{cb} = \delta_b^a$). * Sočasno s tetrado vektorjev $e_{(a)}^i$ vpeljemo tudi tetrado recipročnih vektorjev $e^{(a)i}$ (oštevilčeni so z dvignjenim indeksom a), ki so definirani s pogojem

$$e_i^{(a)} e_{(b)}^i = \delta_b^a, \quad (98.2)$$

torej vsak izmed vektorjev $e_i^{(a)}$ je pravokoten na tri vektorje $e_{(b)}^i$ z $b \neq a$. Enačbo (98.2) pomnožimo z $e_{(a)}^k$ in dobimo $(e_{(a)}^k e_i^{(a)}) e_{(b)}^i = e_{(b)}^k$, od koder je razvidno, da poleg (98.2) posledično velja tudi enačba

$$e_i^{(a)} e_{(a)}^k = \delta_i^k. \quad (98.3)$$

Enačbo $e_{(a)}^i e_{(c)i} = \eta_{ac}$ pomnožimo na obeh straneh z η^{bc} in dobimo

$$e_{(a)}^i (\eta^{bc} e_{(c)i}) = \delta_a^b.$$

Primerjamo z (98.2) in dobimo

$$e_i^{(b)} = \eta^{bc} e_{(c)i}, \quad e_{(b)i} = \eta_{bc} e_i^{(c)}. \quad (98.4)$$

Tetradne indekse dvigamo in spuščamo z matrikama η_{bc} in η^{bc} . Tetrade so pomembne zato, ker lahko z njimi zapišemo metrični tenzor. Povezava med kovariantnimi in kontravariantnimi komponentami četverca je $e_i^{(a)} = g_{il} e^{(a)l}$; to pomnožimo z $e_{(a)k}$, uporabimo (98.3) in (98.4), pa dobimo

$$g_{ik} = e_{(a)i} e_k^{(a)} = \eta_{ab} e_i^{(a)} e_k^{(b)}. \quad (98.5)$$

Kvadrat diferencialne dolžine metričnega tenzorja (98.5) je

$$ds^2 = \eta_{ab} (e_i^{(a)} dx^i) (e_k^{(b)} dx^k). \quad (98.6)$$

Matriko η_{ab} si lahko poljubno izberemo. Najbolj običajna izbira je "Galilejeva" oblika, torej diagonalna matrika z diagonalnimi komponentami $1, -1, -1, -1$. Tedaj bodo zaradi (98.1) koordinatni vektorji med seboj pravokotni, eden izmed njih bo časovni, ostali trije pa prostorski. * Poudariti pa moramo, da takšna izbira nikakor ni potrebna in da obstajajo primeri, pri katerih je iz nekega razloga (na primer zaradi simetrijskih lastnosti metrike) bolj prikladno izbrati tetrado, ki ni pravokotna. †

*V tem odseku bomo z latinskimi črkami $a, b, c, \dots$ označevali indekse koordinatnih vektorjev; četverni tenzorji bodo še vedno oštevilčeni z $i, k, l, \dots$. V literaturi so indeksi osi običajno obdani z oklepaji. Da ne bo zapisovanje preveč nerodno, bomo v enačbah oklepaje uporabljali le tedaj, ko se indeksi osi pojavljajo skupaj z vektorskimi indeksi, izpuščali pa jih bomo pri količinah, ki so po definiciji odvisni le od indeksov osi (na primer η_{ab} , pozneje še γ_{abc} , λ_{abc}). Vedno bomo seštevali po ponovljenih indeksih obeh vrst.

*Potem, ko smo si izbrali linearne forme $dx^{(a)} = e_i^{(a)} dx^i$ za odseke koordinatnih osi v izbranem infinitezimalnem delu četvernega prostora, metriko v tem delu prostora pretvorimo v Galilejevo. Ponovno moramo poudariti, da forme $dx^{(a)}$ v splošnem niso točni diferenciali neke funkcije koordinat.

†Bolj prikladna izbira tetrade je lahko povezana z opisano poenostavitvijo ds^2 na obliko (98.6). Na primer izraz za ds^2 (88.13) ustreza koordinatnim vektorjem

$$\mathbf{e}_i^{(0)} = (\sqrt{h}, -\sqrt{h}\mathbf{g}), \quad \mathbf{e}_i^{(u)} = (0, \mathbf{e}^{(a)}),$$

pri čemer je izbira $\mathbf{e}^{(a)}$ odvisna od prostorske forme ds^2 .

Tetradne komponente četverca A^i (in podobno za četverni tenzor poljubne stopnje) so definirane kot “projekcije” na koordinatne četverce:

$$A_{(a)} = e_{(a)}^i A_i, \quad A^{(a)} = e_i^{(a)} A^i = \eta^{ab} A_{(b)}. \quad (98.7)$$

Obratno velja

$$A_i = e_i^{(a)} A_{(a)}, \quad A^i = e_{(a)}^i A^{(a)}. \quad (98.8)$$

V istem duhu definiramo operacijo “odvajanja vzdolž smeri a ”:

$$\phi_{,(a)} = e_{(a)}^i \frac{\partial \phi}{\partial x^i}. \quad (98.9)$$

Vpeljemo količine, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju: *

$$\gamma_{abc} = e_{(a)i;k} e_{(b)}^i e_{(c)}^k, \quad (98.10)$$

in njihovo linearno kombinacijo

$$\lambda_{abc} = \gamma_{abc} - \gamma_{acb} = (e_{(a)i;k} - e_{(a)k;i}) e_{(b)}^i e_{(c)}^k = (e_{(a)i,k} - e_{(a)k,i}) e_{(b)}^i e_{(c)}^k. \quad (98.11)$$

Zadnja enakost v (98.11) sledi iz (86.12); poudarimo naj, da lahko količine λ_{abc} izračunamo s preprostim odvajanjem koordinatnih vektorjev. Inverzni izraz za količine γ_{abc} , zapisane z λ_{abc} , je

$$\gamma_{abc} = \frac{1}{2}(\lambda_{abc} + \lambda_{bca} - \lambda_{cab}). \quad (98.12)$$

Količine imajo simetrijske lastnosti

$$\gamma_{abc} = -\gamma_{bac}, \quad \lambda_{abc} = -\lambda_{acb}. \quad (98.13)$$

Naš cilj je poiskati tetradne komponente krivinskega tenzorja. Začeti moramo z definicijo (91.6), ki jo zapišemo za primer kovariantnega odvajanja koordinatnih vektorjev:

$$e_{(a)i;k;l} - e_{(a)i;l;k} = e_{(a)}^m R_{mikl},$$

ali

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = (e_{(a)i;k;l} - e_{(a)i;l;k}) e_{(b)}^i e_{(c)}^k e_{(d)}^l.$$

Ta izraz lahko preprosto zapišemo s količinami γ_{abc} . Zapišemo

$$e_{(a)i;k} = \gamma_{abc} e_i^{(b)} e_k^{(c)},$$

in po naslednjem kovariantnem odvajanju (po x^l) odvode koordinatnih vektorjev ponovno zapišemo na tak način. Kovariantni odvodi skalarne količine γ_{abc} so kar običajni odvodi. †

*Količine γ_{abc} se imenujejo *Riccijevi koeficienti sukanja* (angl. *Ricci rotation coefficients*).

†Uporabno je poznati tudi podobno pretvorbo za poljubni četverec in četverni tenzor:

$$A_{i;k} e_{(a)}^i e_{(b)}^k = A_{(a)(b)} - A^{(d)} \gamma_{dab},$$

$$A_{ik;l} e_{(a)}^i e_{(b)}^k e_{(c)}^l = A_{(a)(b)(c)} - A^{(d)} \gamma_{dac} + A_{(a)}^{(d)} \gamma_{dbc},$$

in tako dalje.

Kot rezultat dobimo

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = \gamma_{abc,d} - \gamma_{abd,c} + \gamma_{abf}(\gamma^f_{cd} - \gamma^f_{dc}) + \gamma_{afc}\gamma^f_{bd} - \gamma_{afd}\gamma^f_{bc}, \quad (98.14)$$

kjer je v skladu s splošnim pravilom $\gamma^f_{bc} = \eta^{ad}\gamma_{dbc}$, ipd.

Če ta tenzor skrčimo po paru indeksov a in c dobimo iskano tetradno komponento Riccijevega tenzorja. Če jih zapišemo s količinami γ_{abc} , dobimo

$$\begin{aligned} R_{(a)(b)} = & -\frac{1}{2}(\lambda_{ab}{}^c{}_{,c} + \lambda_{ba}{}^c{}_{,c} + \lambda^c{}_{ca,b} + \lambda^c{}_{cb,a} + \\ & + \lambda^{cd}{}_b\lambda_{cda} + \lambda^{cd}{}_b\lambda_{dca} - \frac{1}{2}\lambda_b{}^{cd}\lambda_{acd} + \lambda^c{}_{cd}\lambda_{ab}{}^d + \lambda^c{}_{cd}\lambda_{ba}{}^d). \end{aligned} \quad (98.15)$$

Na koncu naj opozorimo še na dejstvo, da je naša konstrukcija povsem neodvisna od štiridimenzionalne narave metrike. Zato lahko dobljene rezultate uporabimo tudi za računanje tridimenzionalnih Riemannovih in Riccijevih tenzorjev za tridimenzionalno metriko. V tem primeru bomo seveda namesto s tetrado četvercev imeli opravka s triado tridimenzionalnih vektorjev, matrika η_{ab} pa bo morala imeti signaturo $+++$ (takšen primer bomo obravnavali v 116).

Poglavje 12

Polje gravitirajočih teles

§99 Newtonov zakon

V Einsteinovih enačbah polja sedaj opravimo prehod v nerelativistično mehaniko. Kot smo omenili v 87, predpostavka, da so hitrosti vseh delcev majhne, v sebi skriva tudi zahtevo, da mora biti gravitacijsko polje šibko.

Izraz za komponento g_{00} metričnega tenzorja (to je edina komponenta, ki jo potrebujemo) v opisani limiti smo poiskali v 87:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}.$$

Za komponente napetostnega tenzorja uporabimo izraz (35.4) $T_i^k = \mu c^2 u_i u_k$, kjer je μ gostota mase telesa (vsota mirovnih mas delcev na enoto prostornine; izpuščali bomo oznako 0 pri μ). Ker je obravnavano makroskopsko gibanje počasno moramo pri četverni hitrosti u^i zanemariti vse prostorske komponente in ohraniti le časovno. Zato je $u^\alpha = 0$ in $u^0 = u_0 = 1$. Izmed vseh komponent T_0^0 preostane ena sama, in sicer

$$T_0^0 = \mu c^2. \quad (99.1)$$

Skalar $T = T_i^i$ je zato enak tej vrednosti, μc^2 .

Enačbe polja zapišemo v obliki (95.8):

$$R_i^k = \frac{8\pi k}{c^4} \left(T_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k T \right);$$

ki se za $i = k = 0$ glasi

$$R_0^0 = \frac{4\pi k}{c^2} \mu.$$

Hitro se lahko prepričamo, da so v uporabljenem približku vse preostale enačbe identično enake nič.

Pri računanju količine R_0^0 s pomočjo splošne formule (92.8) upoštevamo, da so členi, ki vsebujejo zmnožke količin Γ_{kl}^i , vedno količine drugega reda. Členi, ki vsebujejo odvode po $x^0 = ct$ so majhni (v primerjavi s členi, kjer odvajamo po koordinatah x^α), saj vsebujejo dodatne potence $1/c$. Zato preostane le $R_{00} = R_0^0 = \partial \Gamma_{00}^\alpha / \partial x^\alpha$. Vstavimo

$$\Gamma_{00}^\alpha \simeq -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\beta} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha}$$

in dobimo

$$R_0^0 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^{\alpha 2}} = \frac{1}{c^2} \Delta \phi.$$

Iz Einsteinovih enačb dobimo torej

$$\Delta \phi = 4\pi k \mu. \quad (99.2)$$

To je enačba gravitacijskega polja v nerelativistični mehaniki. Povsem analogna je Poissonovi enačbi (36.4) za potencial električnega polja, kjer se namesto gostote naboja pojavlja gostota mase, pomnožena z $-k$. Zato lahko takoj zapišemo splošno rešitev enačbe (99.2) po analogiji z (36.8). Glasi se

$$\phi = -k \int \frac{\mu dV}{R}. \quad (99.3)$$

Ta enačba določa potencial gravitacijskega polja poljubne porazdelitve mas v nerelativističnem približku.

Potencial polja enega samega delca z maso m je

$$\phi = -\frac{km}{R}, \quad (99.4)$$

zato je sila $F = -m'(\partial\phi/\partial R)$, ki zaradi polja deluje na drug delec z maso m' , enaka

$$F = -\frac{km m'}{R^2}. \quad (99.5)$$

To je dobro poznani *Newtonov zakon gravitacijske privlačnosti*.

Potencialna energija delca v gravitacijskem polju je enaka njegovi masi, pomnoženi s potencialom polja, podobno kot je potencialna energija delca v električnem polju enaka zmnožku naboja in potenciala polja. Zato lahko po analogiji z (37.1) potencialno energijo poljubne porazdelitve mas zapišemo kot

$$U = \frac{1}{2} \int \mu \phi dV. \quad (99.6)$$

Newtonov potencial konstantnega gravitacijskega polja daleč stran od mas, ki polje proizvajajo, lahko razvijemo, podobno kot smo to storili v §§40-41 za elektrostaticno polje. Za izhodišče koordinatnega sistema si izberemo težišče mas. Tedaj je integral $\int \mu \mathbf{r} dV$, ki je analogen dipolnemu momentu sistema nabojev, identično enak nič. V nasprotju z elektrostaticnim poljem lahko v primeru gravitacijskega polja "dipolne člene" vedno postavimo na nič. Zato ima razvoj potenciala ϕ obliko

$$\phi = -k \left\{ \frac{M}{R_0} + \frac{1}{6} D_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0} + \dots \right\}, \quad (99.7)$$

kjer je $M = \int \mu dV$ skupna masa sistema, količina

$$D_{\alpha\beta} = \int \mu (3x_\alpha x_\beta - r_{\alpha\beta}^2) dV \quad (99.8)$$

pa je *tenzor masnega kvadrupolnega momenta* (angl. *mass quadrupole moment tensor*). * Z običajnim *tenzorjem vztrajnostnega momenta* (angl. *moment of inertia tensor*)

$$J_{\alpha\beta} = \int \mu (r^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta) dV$$

*Tukaj pišemo indekse α, β kar spodaj in ne razlikujemo med kovariantnimi in kontravariantnimi komponentami, saj vse operacije izvajamo v običajnem Newtonovem (evklidskem) prostoru.

je povezan preprosto z

$$D_{\alpha\beta} = J_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} - 3J_{\alpha\beta}. \quad (99.9)$$

Določanje Newtonovega potenciala podane porazdelitve mase je tema ene izmed vej matematične fizike; opise različnih pristopov bomo v tej knjigi izpustili. Zapisali bomo le enačbe za potencial gravitacijskega polja homogenega elipsoidnega telesa.

Naj bo površina elipsoida podana z enačbo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a > b > c. \quad (99.10)$$

Potencial polja v poljubni točki zunaj telesa je podan z naslednjo enačbo:

$$\phi = -\pi\mu abc \int_{\xi}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s} \right) \frac{ds}{R_s} \quad (99.11)$$

$$R_s = \sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)},$$

kjer je ξ pozitivni koren enačbe

$$\frac{x^2}{a^2+\xi} + \frac{y^2}{b^2+\xi} + \frac{z^2}{c^2+\xi} = 1. \quad (99.12)$$

Potencial polja v notranjosti elipsoida pa je

$$\phi = -\pi\mu abc \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s} \right) \frac{ds}{R_s}, \quad (99.13)$$

ki se od (99.11) razlikuje le v spodnji integracijski meji; opazimo lahko, da je ta izraz kvadratična funkcija koordinat x, y in z .

Gravitacijsko energijo telesa dobimo po enačbi (99.6), tako da integriramo izraz (99.13) po prostornini elipsoida. Integral lahko izračunamo z običajnimi postopki * in dobimo

$$U = \frac{3km^2}{8} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{5} \left(\frac{a^2}{a^2+s} + \frac{b^2}{b^2+s} + \frac{c^2}{c^2+s} \right) - 1 \right] \frac{ds}{R_s} =$$

$$= \frac{3km^2}{8} \int_0^{\infty} \left[\frac{2}{5} s \, d \left(\frac{1}{R_s} \right) - \frac{2}{5} \frac{ds}{R_s} \right]$$

($m = \frac{4\pi}{3} abc\mu$ je masa telesa); prvi člen integriramo per partes in končno dobimo

$$U = -\frac{3km^2}{10} \int_0^{\infty} \frac{ds}{R_s}. \quad (99.14)$$

Vse integrale, ki se pojavljajo v (99.11)-(99.14) lahko izrazimo z eliptičnimi integrali prve in druge vrste. Pri rotacijskih elipsoidih pa jih lahko zapišemo z elementarnimi funkcijami. Tako je gravitacijska energija sploščenega (angl. *oblate*) rotacijskega elipsoida ($a = b > c$) enaka

$$U = -\frac{3km^2}{5\sqrt{a^2-c^2}} \cos^{-1} \frac{c}{a}, \quad (99.15)$$

*Integral kvadratov x^2, y^2 in z^2 najlažje izračunamo tako, da nadomestimo $x = ax', y = by'$ in $z = cz'$, tako da se integral po prostornini elipsoida poenostavi na integral po prostornini enotske krogle.

pri raztegnjenem (angl. *prolate*) pa znaša

$$U = -\frac{3km^2}{5\sqrt{a^2 - c^2}} \cosh^{-1} \frac{a}{c}. \quad (99.16)$$

Za kroglo ($a = c$) dobimo iz obeh izrazov $U = -3km^2/5a$, kar bi seveda lahko dobili tudi z bolj preprostim računom. *

NALOGA

Določi ravnovesno obliko homogene gravitirajoče tekočine, ki se kot celota vrti okoli svoje osi.

Rešitev: Tekočina je v ravnovesju, če je vsota gravitacijskega potenciala in potenciala centrifugalne sile konstantna na površini telesa:

$$\phi - \frac{\Omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \text{konst},$$

(Ω je kotna hitrost; telo se vrti okoli osi Z). Iskana oblika je sploščeni (angl. *oblate*) rotacijski elipsoid. Polosi bomo določili tako, da v pogoj za ravnovesje vstavimo (99.13) in z^2 odpravimo z uporabo (99.10). Tako dobimo

$$(x^2 + y^2) \left[\int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)^2 \sqrt{c^2 + s}} - \frac{\Omega^2}{2\pi\mu k a^2 c} - \frac{c^2}{a^2} \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)(c^2 + s)^{3/2}} \right] = \text{konst},$$

od koder sledi, da mora izraz med oglatima oklepajema biti enak nič. Z integracijo dobimo

$$\frac{(a^2 + 2c^2)c}{(a^2 - c^2)^{3/2}} \cos^{-1} \frac{c}{a} - \frac{3c^2}{a^2 - c^2} = \frac{\Omega^2}{2\pi k \mu} = \frac{25}{6} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} \frac{M^2 \mu^{1/3}}{m^{10/3} k} \left(\frac{c}{a} \right)^{4/3}.$$

($M = \frac{2}{5}ma^2\Omega$ je vrtilna količina telesa okoli osi Z). Ta enačba določa razmerje med polosema c/a pri znanih Ω in M . Odvisnost količine c/a od M je enolična; c/a monotonno narašča z naraščajočim M .

Izkaže pa se, da je simetrična oblika, ki smo jo našli, stabilna (glede na majhne motnje) le za zadosti nizke vrednosti M . † Sistem postane nestabilen pri $M = 2,89k^{1/2}m^{5/3}\mu^{-1/6}$ (ko je $c/a = 0,58$). Ko nato M še povečamo, je ravnovesna oblika splošni elipsoid, pri katerem vrednosti b/a in c/a upadata (z 1 oziroma z 0,58). Tudi ta oblika naposled postane nestabilna in sicer pri $M = 3,84k^{1/2}m^{5/3}\mu^{-1/6}$ (ko je $a : b : c = 1 : 0,43 : 0,34$).

§100 Središčno simetrično gravitacijsko polje

Oglejmo si gravitacijsko polje s središčno simetrijo. Takšno polje lahko proizvaja poljubna središčno simetrična porazdelitev snovi; seveda morata biti v tem primeru središčno simetrični tako porazdelitev snovi kot tudi gibanje snovi, zato mora biti v vsaki točki hitrost v radialni smeri.

Središčna simetrija polja pomeni, da je metrika prostora-časa, torej zapis integrala ds^2 , enak za vse točke, ki so od središča enako oddaljene. V evklidskem prostoru je ta razdalja

*Potencial polja v notranjosti homogene krogle polmera a je

$$\phi = -2\pi k \mu \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right).$$

†Reference na literaturo o tej enačbe najdemo v knjigi H. Lamb, *Hydrodynamics*, XII. poglavje.

enaka dolžini krajevnega vektorja, v neevklidskem prostoru, s katerim imamo opravka v prisotnosti gravitacije, pa ni nobene količine, ki bi imela vse lastnosti evklidskega krajevnega vektorja (na primer, da bi bila njegova dolžina enaka razdalji od središča in hkrati tudi dolžini obsega, deljenega z 2π). Zato je izbira “krajevnega vektorja” sedaj poljubna.

Če uporabimo “sferične” prostorske koordinate r, θ, ϕ , potem je najbolj splošen središčno simetričen izraz za ds^2 enak

$$ds^2 = h(r, t) dr^2 + k(r, t)(\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) + l(r, t) dt^2 + a(r, t) dr dt, \quad (100.1)$$

kjer so a, h, k, l neke funkcije “radialne dolžine” r in “časa” t . Zaradi poljubnosti izbire opazovalnega sistema v splošni teoriji relativnosti, lahko koordinate poljubno transformiramo, če s tem ne porušimo središčne simetrije ds^2 ; to pomeni, da lahko koordinati r in t pretvorimo po enačbah

$$r = f_1(r', t'), \quad t = f_2(r', t'),$$

kjer sta f_1 in f_2 poljubni funkciji novih koordinat r' in t' .

To možnost izbire izkoristimo za to, da koordinati r in t izberemo na takšen način, da bo – prvič – koeficient $a(r, t)$ pred $dr dt$ v izrazu za ds^2 enak nič, in – drugič – da bo koeficient $k(r, t)$ enak $-r^2$. * Drugi pogoj pomeni, da je polmer r izbran tako, da je obseg kroga s središčem v koordinatnem izhodišču enak $2\pi r$ (diferencial ločne dolžine kroga v ravnini $\theta = \pi/2$ je enak $dl = r d\phi$). Prikladno je zapisati količini h in l v eksponentni obliki kot $-e^\lambda$ in $c^2 e^\nu$, kjer sta λ in ν neki funkciji spremenljivk r in t . Dobimo naslednji izraz za ds^2 :

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - e^\lambda dr^2. \quad (100.2)$$

Koordinate ct, r, θ in ϕ označimo z x^0, x^1, x^2 in x^3 . Od nič različne komponente metričnega tenzorja so

$$g_{00} = e^\nu, \quad g_{11} = -e^\lambda, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta.$$

Očitno je

$$g^{00} = e^{-\nu}, \quad g^{11} = -e^{-\lambda}, \quad g^{22} = -r^{-2}, \quad g^{33} = -r^{-2} \sin^{-2} \theta.$$

Z uporabo enačbe (86.3) in zgornjih izrazov lahko hitro izračunamo količine Γ_{kl}^i . Dobimo naslednje izraze (črtica označuje odvod po r , pika nad simbolom pa odvod po ct):

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{\lambda'}{2}, & \Gamma_{10}^0 &= \frac{\nu'}{2}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{11}^0 &= \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu}, & \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-\lambda}, & \Gamma_{00}^1 &= \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta, & \Gamma_{00}^0 &= \frac{\dot{\nu}}{2}, \\ \Gamma_{10}^1 &= \frac{\dot{\lambda}}{2}, & \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta e^{-\lambda}. \end{aligned} \quad (100.3)$$

Vse druge komponente so enake nič (razen seveda tistih, ki se od zgornjih razlikujejo za zamenjavo indeksov k in l).

*Te pogoji časovne koordinate ne določajo enolično. Še vedno jo lahko pretvorimo s transformacijo $t = f(t')$, ki ni odvisna od r .

Enačbe gravitacijskega polja bomo dobili tako, da najprej izračunamo komponente tenzorja R_k^i po enačbi (92.8). Preprost račun nam da naslednje enačbe

$$\frac{8\pi k}{c^4} T_1^1 = -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (100.4)$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T_2^2 = \frac{8\pi k}{c^4} T_3^3 = -\frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu' \lambda'}{2} \right) + \frac{1}{2} e^{-\nu} \left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{2} \right), \quad (100.5)$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T_0^0 = -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (100.6)$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T_0^1 = -e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r}. \quad (100.7)$$

Druge komponente tenzorja (95.6) so identično enake nič. Z uporabo (94.9) lahko komponente napetostnega tenzorja izrazimo z gostoto energije snovi ϵ , njenim pritiskom p in z radialno hitrostjo v .

Enačbe (100.4)-(100.7) lahko točno integriramo v zelo pomembnem primeru središčno simetričnega polja v vakuumu, torej izven mas, ki povzročajo polje. Napetostni tenzor postavimo na nič in dobimo naslednje enačbe

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0, \quad (100.8)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0, \quad (100.9)$$

$$\dot{\lambda} = 0 \quad (100.10)$$

[četrte enačbe, torej enačbe (100.5), ne zapišemo, saj sledi iz drugih treh].

Iz (100.10) takoj razberemo, da λ ni odvisna od časa. Seštejemo enačbi (100.8) in (100.9) in dobimo $\lambda' + \nu' = 0$, torej

$$\lambda + \nu = f(t), \quad (100.11)$$

kjer je funkcija $f(t)$ odvisna le od časa. Ko izberemo diferencial ds^2 v obliki enačbe (100.2), imamo še vedno možnost poljubno transformirati čas kot $t = f(t')$. Takšna transformacija je ekvivalentna temu, da k ν dodamo poljubno funkcijo časa, zato lahko vedno dosežemo, da je $f(t)$ v (100.11) enaka nič. Zato lahko (ne da bi izgubili splošnost) postavimo $\lambda + \nu = 0$. Opazimo, da je središčno simetrično gravitacijsko polje v praznem prostoru vedno statično.

Enačbo (100.9) lahko preprosto integriramo in dobimo

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 + \frac{\text{konst}}{r}. \quad (100.12)$$

Zato je v neskončnosti ($r \rightarrow \infty$) $e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1$, kar pomeni, da je daleč stran od gravitirajočih teles metrika vedno Galilejeva. Konstantno lahko preprosto izrazimo z maso, če zahtevamo, da pri velikih razdaljah, kjer je polje šibko, velja Newtonov zakon. * Z drugimi besedami, veljati mora $g_{00} = 1 + (2\phi/c^2)$, kjer ima potencial ϕ Newtonovo vrednost (99.4) $\phi = -(km/r)$

*Za polje v notranjosti okrogle votline v središčno simetrični porazdelitvi mora veljati konst = 0, sicer bi metrika imela singularnosti pri $r = 0$. Zato je metrika v notranjosti takšne votline samodejno Galilejeva, kar pomeni, da v votlini ni gravitacijskega polja (natanko tako kot v Newtonovi teoriji).

(m je skupna masa teles, ki povzročajo polje). Od tod sledi, da je konstanta enaka $-(2km/c^2)$. Ta količina ima dimenzijo dolžine; imenuje se *gravitacijski polmer* telesa:

$$r_g = \frac{2km}{c^2}. \quad (100.13)$$

Tako smo dobili metriko prostora-časa oblike

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - r^2(\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}}. \quad (100.14)$$

To rešitev Einsteinovih enačb je našel K. Schwarzschild (1916). Rešitev popolnoma določa gravitacijsko polje v vakuumu, ki ga povzroča poljubna središčno simetrična porazdelitev mas. Poudariti moramo, da ta rešitev velja ne le za mirujoče mase, temveč tudi za mase, ki se gibljejo, vendar le, če ima gibanje ustrezno simetrijo (na primer središčno simetrično utripanje). Opazimo, da je metrika (100.14) odvisna le od skupne mase gravitirajočega telesa, podobno kot pri ustrezni nalogi v Newtonovi teoriji.

Prostorska metrika je določena z izrazom za diferencialno ločno dolžino

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2(\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2). \quad (100.15)$$

Geometrijski pomen koordinate r je določen z dejstvom, da je v metriki (100.15) obseg kroga s središčem v središču polja enak $2\pi r$. Dolžina med dvema točkama r_1 in r_2 , ki ležita na isti radialni črti, pa je

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} > r_2 - r_1. \quad (100.16)$$

Opazimo še, da je $g_{00} \leq 1$. Če to uporabimo v enačbi (84.1) $d\tau = \sqrt{g_{00}} dt$, ki je definicija lastnega časa, dobimo

$$d\tau \leq dt. \quad (100.17)$$

Enakost velja le v neskončnosti, kjer je t enak lastnemu času. Pri končni oddaljenosti od mas pride do "upočasnitve" časa v primerjavi s časom v neskončni oddaljenosti.

Zapišimo še približek za ds^2 , ki velja pri velikih razdaljah od koordinatnega izhodišča:

$$ds^2 = ds_0^2 - \frac{2km}{c^2 r} (dr^2 + c^2 dt^2). \quad (100.18)$$

Drugi člen je majhen popravek k Galilejevi metriki ds_0^2 . Pri velikih razdaljah od mas, ki ustvarjajo polje, je vsako polje videti središčno simetrično. Zato (100.18) določa metriko pri velikih oddaljenostih za vsak sistem teles.

Nekaj splošnih stvari lahko povemo tudi o obnašanju središčno simetričnih polj v notranjosti gravitirajočih mas. Iz enačbe (100.6) sledi, da mora v limiti $r \rightarrow 0$ iti λ proti nič vsaj kot r^2 ; v nasprotnem primeru bi postala desna stran enačbe neskončna pri $r \rightarrow 0$, zato bi imel T_0^0 singularnosti v točki $r = 0$, kar je iz fizikalnih razlogov nemogoče. Enačbo (100.6) integriramo upoštevajoč pogoj $\lambda|_{r=0} = 0$ in dobimo

$$\lambda = -\ln \left\{ 1 - \frac{8\pi k}{c^4 r} \int_0^r T_0^0 r^2 dr \right\}. \quad (100.19)$$

Ker iz (100.10) sledi $T_0^0 = e^{-\nu} T_{00} \geq 0$, mora veljati $\lambda \geq 0$, torej

$$e^\lambda \geq 1. \quad (100.20)$$

Enačbo (100.6) odštejemo od (100.4) in dobimo

$$\frac{e^{-\lambda}}{r}(\nu' + \lambda') = \frac{8\pi k}{c^4}(T_0^0 - T_1^1) = \frac{(\epsilon + p)\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \geq 0,$$

torej $\nu' + \lambda' \geq 0$. Pri $r \rightarrow \infty$ (daleč stran od mas) postane metrika Galilejeva, zato $\nu \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0$. Zaradi pogoja $\nu' + \lambda' \geq 0$ od tod nujno sledi, da je po vsem prostoru

$$\nu + \lambda \leq 0. \quad (100.21)$$

Ker je $\lambda \geq 0$, mora veljati $\nu \leq 0$, torej

$$e^\nu \leq 1. \quad (100.22)$$

Zgoraj izpeljani neenačbi pomenita, da lastnosti (100.16) in (100.17) prostorske metrike in obnašanja ur v središčno simetričnem polju v vakuumu veljata prav tako tudi v notranjosti gravitirajočih mas.

Če gravitacijsko polje povzroča krogelno telo s "polmerom" a , potem za $r > a$ velja $T_0^0 = 0$. Za točke $r > a$ zato sledi iz enačbe (100.19), da je

$$\lambda = -\ln \left\{ 1 - \frac{8\pi k}{c^4 r} \int_0^a T_0^0 r^2 dr \right\}.$$

Po drugi strani na istem območju (v vakuumu) velja (100.14), od koder sledi

$$\lambda = -\ln \left(1 - \frac{2km}{c^2 r} \right). \quad (100.23)$$

Če izenačimo oba izraza, dobimo enačbo

$$m = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^a T_0^0 r^2 dr, \quad (100.24)$$

ki izraža skupno maso telesa z njegovim napetostnim tenzorjem.

Za statično porazdelitev snovi v telesu velja $T_0^0 = \epsilon$, tako da je

$$m = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^a \epsilon r^2 dr. \quad (100.25)$$

Poudariti moramo, da tukaj integriramo po $4\pi r^2 dr$, medtem ko je diferencialna prostornina za metriko (100.2) enaka $dV = 4\pi r^2 e^{\lambda/2} dr$, kjer po enačbi (100.20) velja $e^{\lambda/2} \geq 1$. Dobljeno razliko pripišemo gravitacijskemu primanjkljaju mase telesa.

NALOGE

NALOGA 1. Poišči invariante krivinskega tenzorja za Schwarzschildovo metriko (100.14).

Rešitev: Račun z uporabo (92.1) in Γ_{kl}^i iz (100.13) (ali pa z enačbami, dobljenimi v drugi nalogi v § 92) nam da naslednje vrednosti za od nič različne komponente krivinskega tenzorja:

$$R_{0101} = \frac{r_g}{r^3}, \quad R_{0202} = \frac{R_{0303}}{\sin^2 \theta} = -\frac{r_g(r-r_g)}{2r^2},$$

$$R_{1212} = \frac{R_{1313}}{\sin^2 \theta} = \frac{r_g}{2(r-r_g)}, \quad R_{2323} = -rr_g \sin^2 \theta.$$

Invarianti I_1 in I_2 iz (92.22) sta

$$I_1 = \left(\frac{r_g}{2r^3}\right)^2, \quad I_2 = -\left(\frac{r_g}{2r^3}\right)^2$$

(zmnožki, ki vsebujejo dualni tenzor $\overset{*}{R}_{iklm}$, so identično enaki nič). Krivinski tenzor je tipa D po razvrstitvi Petrova (z realnima invariantama $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = -r_g/2r^3$). Opazimo, da imajo krivinske invariante singularnost le v točki $r = 0$, ne pa pri $r = r_g$.

NALOGA 2. Določi prostorsko ukrivljenost te metrike.

Rešitev: Komponente prostorskega krivinskega tenzorja $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ lahko izrazimo s komponentami tenzorja $P_{\alpha\beta}$ (ter tenzorja $\gamma_{\alpha\beta}$, zato zadostuje, da izračunamo $P_{\alpha\beta}$ (glej prvo nalogo v § 92). Tenzor $P_{\alpha\beta}$ lahko zapišemo z $\gamma_{\alpha\beta}$ natanko tako, ko tenzor R_{ik} zapišemo z g_{ik} . Z uporabo vrednosti $\gamma_{\alpha\beta}$ iz (100.15) tako dobimo

$$P_\theta^\theta = P_\phi^\phi = \frac{r_g}{2r^3}, \quad P_r^r = -\frac{r_g}{r^3},$$

in $P_\alpha^\beta = 0$ za $\alpha \neq \beta$. Opazimo, da je $P_\theta^\theta, P_\phi^\phi = \frac{r_g}{2r^3}, P_r^r < 0$, medtem ko je $P \equiv P_\alpha^\alpha = 0$.

Z uporabo enačbe iz prve naloge v § 92 dobimo

$$P_{\tau\theta\tau\theta} = (P_r^r + P_\theta^\theta)\gamma_{rr}\gamma_{\theta\theta} = -P_\phi^\phi\gamma_{rr}\gamma_{\theta\theta},$$

$$P_{\tau\phi\tau\phi} = -P_\theta^\theta\gamma_{rr}\gamma_{\phi\phi},$$

$$P_{\theta\phi\theta\phi} = -P_r^r\gamma_{\theta\theta}\gamma_{\phi\phi}.$$

Od tod sledi (glej opombo na strani 264), da je v “ravnini”, ki je pravokotna na radialno smer, Gaussova ukrivljenost enaka

$$K = \frac{P_{\theta\phi\theta\phi}}{\gamma_{\theta\theta}\gamma_{\phi\phi}} = -P_r^r > 0,$$

(to pomeni, da je v majhnem trikotniku, ki ga narišemo v “ravnini” v bližini točke, kjer radialna polpremica to ravnino seka, vsota kotov trikotnika večja od π). Gaussova ukrivljenost “ravnin”, ki gredo skozi središče, je negativna, $K < 0$; to pomeni, da je vsota kotov majhnih trikotnikov v teh “ravninah” manjša od π (vseeno pa to ne velja za trikotnike, ki zajemajo središče; vsota njihovih kotov je večja od π).

NALOGA 3. Določi obliko rotacijske ploskve, na kateri bi geometrija bila enaka kot v “ravnini”, ki poteka skozi izhodišče v središčno simetričnem gravitacijskem polju v vakuumu.

Rešitev: Geometrija na rotacijski ploskvi $z = z(r)$ je določena (v valjnih koordinatah) z diferencialom dolžine:

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + r^2 d\phi^2 = dr^2(1 + z'^2) + r^2 d\phi^2.$$

To primerjamo z diferencialom dolžine (100.15) v “ravnini” $\theta = \pi/2$

$$dl^2 = r^2 d\phi^2 + \frac{dr^2}{1 - r_g/r}$$

in dobimo

$$1 + z'^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1},$$

od koder sledi

$$z = 2\sqrt{r_g(r - r_g)}.$$

Za $r = r_g$ ima ta funkcija singularnost – točko razvejitve. Razlog je v tem, da ima prostorska metrika (100.15) v nasprotju s prostorsko-časovno metriko (100.14), dejansko ima singularnost pri $r = r_g$.

Glavne lastnosti geometrije v “ravnini”, ki poteka skozi središče, ki smo jih že opisali v prejšnji nalogi, lahko določimo tudi z uporabo tukaj izpeljanega modela.

NALOGA 4. Pretvori diferencial (100.14) v takšne koordinate, da bo diferencial prostorske ločne dolžine imel konformno evklidsko obliko, kar pomeni, da bo dl^2 sorazmeren z evklidsko obliko.

Rešitev: Vpeljemo ρ z

$$r = \left(1 + \frac{r_g}{4\rho}\right)\rho,$$

in iz (100.14) dobimo

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \frac{r_g}{4\rho}}{1 + \frac{r_g}{4\rho}}\right)^2 c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{4\rho}\right)^4 (d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Koordinate ρ, θ, ϕ se imenujejo izotropne krogelne koordinate; namesto njih lahko vpeljemo izotropne kartezične koordinate x, y, z . Pri velikih oddaljenostih $\rho \gg r_g$ na primer velja

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{p}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{p}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

NALOGA Poišči enačbe središčno simetričnega gravitacijskega polja v snovi v sogiblјivem opazovalnem sistemu.

Rešitev: Uporabimo dve možni pretvorbi koordinat r in t v formi (100.1). Najprej dosežemo, da je koeficient $a(r, t)$ pred $dr dt$ enak nič, nato po radialno hitrost snovi postavimo na nič v vseh točkah (zaradi središčne simetrije drugih komponent ni). Po tem je še vedno mogoče r in t pretvoriti s poljubno transformacijo oblike $r = r(r')$ in $t = t(t')$.

Tako izbrano radialno koordinato in čas označimo z R in τ , koeficiente h, k, l pa z $-e^\lambda, -e^\mu$ in $-e^\nu$ (kjer so λ, μ, ν funkcije spremenljivk R in τ). Diferencial dolžine lahko tedaj zapišemo kot

$$ds^2 = c^2 e^\nu d\tau^2 - e^\lambda dR^2 - e^\mu (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1)$$

V sogiblјivem opazovalnem sistemu so komponente napetostnega tenzorja enake

$$T_0^0 = \epsilon, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p.$$

Izračun da naslednje enačbe polja: *

$$-\frac{8\pi k}{c^4} T_1^1 = \frac{8\pi k}{c^4} p = \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\frac{\mu'^2}{2} + \mu' \nu' \right) - e^{-\nu} (\ddot{\mu} - \frac{1}{2} \dot{\mu} \dot{\nu} + \frac{3}{4} \dot{\mu}^2) - e^{-\mu}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} -\frac{8\pi k}{c^4} T_2^2 = \frac{8\pi k}{c^4} p = \frac{1}{4} e^{-\lambda} (2\nu'' + \nu'^2 + 2\mu'' + \mu'^2 - \mu' \lambda' - \nu' \lambda' + \mu' \nu') + \\ + \frac{1}{4} e^{-\nu} (\dot{\lambda} \dot{\nu} + \dot{\mu} \dot{\nu} - \dot{\lambda} \dot{\mu} - 2\ddot{\lambda} - \dot{\lambda}^2 - 2\ddot{\mu} - \dot{\mu}^2), \end{aligned} \quad (3)$$

*Komponente R_{ik} lahko izračunamo neposredno, ko smo storili v besedilu razdelka, ali pa z uporabo enačbe, ki smo jih dobili v drugi nalogi v § 92.

$$\frac{8\pi k}{c^4}T_0^0 = \frac{8\pi k}{c^4}\epsilon = -e^{-\lambda} \left(\mu'' + \frac{3}{4}\mu'^2 - \frac{\mu'\lambda'}{2} \right) + \frac{1}{2}e^{-\nu} \left(\dot{\lambda}\dot{\mu} + \frac{\dot{\mu}^2}{2} \right) + e^{-\mu}, \quad (4)$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T_0^1 = 0 = \frac{1}{2}e^{-\lambda}(2\dot{\mu}' + \dot{\mu}\mu' - \dot{\lambda}\mu' - \nu'\dot{\mu}) \quad (5)$$

(kjer s črtico označujemo odvod po R , s piko pa odvod po $c\tau$).

Splošne zveze za λ , μ in ν lahko preprosto najdemo, če za izhodišče vzamemo enačbe $T_{i;k}^k = 0$, ki so vsebovane že v enačbah polja. Z uporabo (86.11) dobimo naslednji enačbi:

$$\dot{\lambda} + 2\dot{\mu} = -\frac{2\epsilon}{p + \epsilon}, \quad \nu' = -\frac{2p'}{p + \epsilon}. \quad (6)$$

Če poznamo p kot funkcijo ϵ , lahko enačbo (6) integriramo:

$$\lambda + 2\mu = -2 \int \frac{d\epsilon}{p + \epsilon} + f_1(R), \quad \nu = -2 \int \frac{dp}{p + \epsilon} + f_2(\tau),$$

kjer lahko funkciji $f_1(R)$ in $f_2(\tau)$ poljubno izberemo zaradi predhodno omenjene možnosti, da lahko opravimo poljubne pretvorbe oblike $R = R(R')$, $\tau = \tau(\tau')$.

NALOGA 6. Poišči enačbe, ki določajo statično gravitacijsko polje v vakuumu okoli osno simetričnega telesa, ki miruje (H. Weyl, 1917).

Rešitev: Privzemimo, da ima statični diferencial dolžne v valjnih prostorskih koordinatah $x^1 = \phi$, $x^2 = \rho$, $x^3 = z$ obliko

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - e^\omega d\phi^2 - e^\mu (d\rho^2 + dz^2),$$

kjer so ν , ω in μ funkcije spremenljivk ρ in z ; takšen zapis omeji izbiro koordinat do pretvorbe oblike $\rho = \rho(\rho', z')$, $z = z(\rho', z')$ natančno. Takšna pretvorba pomnoži formo $d\rho^2 + dz^2$ z enakim faktorjem.

Iz enačb

$$R_0^0 = \frac{1}{4}e^{-\mu}[2\nu_{,\rho,\rho} + \nu_{,\rho}(\nu_{,\rho} + \omega_{,\rho}) + 2\nu_{,z,z} + \nu_{,z}(\nu_{,z} + \omega_{,z})] = 0,$$

$$R_1^1 = \frac{1}{4}e^{-\mu}[2\omega_{,\rho,\rho} + \omega_{,\rho}(\nu_{,\rho} + \omega_{,\rho}) + 2\omega_{,z,z} + \omega_{,z}(\nu_{,z} + \omega_{,z})] = 0$$

(kjer spodnja indeksa $_{,\rho}$ in $_{,z}$ označujeta odvajanje po ρ oziroma po z), ki ju seštejemo, dobimo

$$\rho'_{,\rho,\rho} + \rho'_{,z,z} = 0,$$

kjer je

$$\rho'(\rho, z) = e^{\frac{\nu + \omega}{2}}.$$

Funkcija $\rho'(\rho, z)$ je torej harmonična funkcija spremenljivk ρ in z . Splošno znana lastnost takšnih funkcij je obstoj konjugirane harmonične funkcije $z'(\rho, z)$, tako da velja $\rho' + iz' = f(\rho + iz)$, pri čemer je f analitična funkcija spremenljivke $\rho + iz$. Če si ρ' in z' izberemo kot nove koordinate bo zaradi konformnosti preslikave $\rho, z \rightarrow \rho', z'$ veljajo

$$e^\mu (d\rho^2 + dz^2) = e^{\mu'} (d\rho'^2 + dz'^2),$$

kjer je $\mu'(\rho', z')$ neka nova funkcija. Sočasno velja $e^\omega = \rho'^2 e^{-\nu}$; če zapišemo $\omega + \nu = \gamma$ in opustimo pisanje črtic, lahko ds^2 zapišemo kot

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - \rho^2 e^{-\nu} d\phi^2 - e^{\gamma-\nu} (d\rho^2 + dz^2). \quad (1)$$

Če zapišemo enačbe $R_0^0 = 0$, $R_3^3 - R_2^2 = 0$, $R_2^2 = 0$ v tej metriki, dobimo

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \nu}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} = \rho \frac{\partial \nu}{\partial \rho} \frac{\partial \nu}{\partial z}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} = \rho \left[\left(\frac{\partial \nu}{\partial \rho} \right)^2 - \left(\frac{\partial \nu}{\partial z} \right)^2 \right]. \quad (3)$$

Opazimo, da ima (2) obliko Laplaceove enačbe v valjnih koordinatah (za funkcijo, ki ni odvisna od ϕ). Če to enačbo rešimo, je funkcija $\gamma(\rho, z)$ povsem določena z enačbama (2) in (3). Prvi veliki oddaljenosti od telesa, ki ustvarja polje, morata funkciji ν in γ padati proti nič.

§101 Gibanje v središčno simetričnem gravitacijskemu polju

Oglejmo si gibanje delca v središčno simetričnem gravitacijskemu polju. Kot pri ostalih primerih gibanja v središčno simetričnem polju tudi tukaj gibanje poteka v eni sami "ravnini", ki gre skozi izhodišče; za to ravnino si bomo izbrali ravnino $\theta = \pi/2$.

Tir delca bomo določili z Hamilton-Jacobijevo enačbo:

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2 c^2 = 0,$$

kjer je m masa delca (maso telesa v središču polja pa bomo označevali z m'). Uporabimo g^{ik} iz izraza (100.14) in dobimo naslednjo enačbo:

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{c \partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 - m^2 c^2 = 0, \quad (101.1)$$

kjer je $r_g = 2km/c^2$ gravitacijski polmer telesa v središču polja.

Hamilton-Jacobijeve enačbe se lotimo po običajnem postopku, z nastavkom oblike

$$S = -\mathcal{E}_0 t + M \phi + S_r(r), \quad (101.2)$$

s konstantno energijo $\mathcal{E}_0$ in vrtilno količino M . Izraz (101.2) vstavimo v (101.1), dobimo odvod dS_r/dr , in ga integriramo:

$$S_r = \int \sqrt{\frac{\mathcal{E}_0^2}{c^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-2} - \left(m^2 c^2 + \frac{M^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}} dr. \quad (101.3)$$

Izraz za $r = r(t)$ je podan z enačbo (glej *Mehanika*, §47) $\partial S / \partial \mathcal{E}_0 = \text{konst.}$, od koder dobimo

$$ct = \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left[\left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}\right)^2 - \left(1 + \frac{M^2}{m^2 c^2 r^2}\right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \right]}. \quad (101.4)$$

Samo tirnico dobimo iz enačbe $\partial S / \partial M = \text{konst.}$, tako da je

$$\phi = \int \frac{M dr}{r^2 \sqrt{\frac{\mathcal{E}_0^2}{c^2} - \left(m^2 c^2 + \frac{M^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}. \quad (101.5)$$

Ta integral lahko zapišemo z eliptičnim integralom.

Pri gibanju planeta v privlačnem polju Sonca vodi teorija relativnosti k izjemno majhnim popravkom k Newtonovi teoriji, ker so hitrosti planetov zelo majhne v primerjavi s svetlobno hitrostjo. V integrandu enačbe (101.5) za tirnico je to razvidno iz majhne vrednosti razmerja r_g/r , kjer je r_g gravitacijski polmer sonca. *

Relativistične popravke k tirnici je najlažje izračunati tako, da začnemo z izrazom (101.3) za radialni del akcije, preden odvajamo po M .

Integracijsko spremenljivko transformiramo. Zapišemo

$$r(r - r_g) = r'^2, \quad \text{torej} \quad r - \frac{r_g}{2} \approx r',$$

*Za Sonce je $r_g = 3 \text{ km}$, za Zemljo pa $r_g = 0.9 \text{ cm}$.

tako da postane člen z M^2 pod korenem oblike M^2/r'^2 . V drugih členih naredimo razvoj po potencah r_g/r' . Do želene natančnosti tedaj velja

$$S_r = \int \left[\left(2\mathcal{E}'m + \frac{\mathcal{E}'^2}{c^2} \right) + \frac{1}{r} (2m^2 m' k + 4\mathcal{E}' m r_g) - \frac{1}{r^2} \left(M^2 - \frac{3m^2 c^2 r_g^2}{2} \right) \right]^{1/2} dr, \quad (101.6)$$

kjer smo z namenom krajšega zapisa opustili pisanje črtice pri r' in vpeljali nerelativistično energijo $\mathcal{E}'$ (ki ne vsebuje mirovne energije).

Popravki v koeficientih prvih dveh členov pod korenem imajo razmeroma nezanemljiv učinek: spremenijo zvezo med energijo in vrtilno količino delca, ter parametre Newtonove orbite (elipse). Popravki v koeficientu količine $1/r^2$ pa imajo pomemben vpliv – ustvarijo sistematičen (sekularen) premik perihelija orbite.

Tirnica je določena z enačbo $\phi + (\partial S_r / \partial M) = \text{konst.}$ Sprememba kota ϕ po enem obhodu planeta po orbiti je zato

$$\Delta\phi = -\frac{\partial}{\partial M} \Delta S_r, \quad (101.7)$$

kjer je ΔS_r ustrežna razlika v S_r . Količino S_r razvijemo po majhnem popravku koeficienta $1/r^2$ in dobimo

$$\Delta S_r = \Delta S_r^{(0)} - \frac{3m^2 c^2 r_g^2}{4M} \frac{\partial S_r^{(0)}}{\partial M}, \quad (101.8)$$

kjer $\Delta S_r^{(0)}$ ustreza gibanju po zaključeni elipsi, ki se ne premakne. Izraz odvajamo po M in upoštevamo, da je

$$-\frac{\partial}{\partial M} \Delta S_r^{(0)} = \Delta\phi^{(0)} = 2\pi,$$

in dobimo

$$\Delta\phi = 2\pi + \frac{3\pi m^2 c^2 r_g^2}{2M^2} = 2\pi + \frac{6\pi k^2 m^2 m'^2}{c^2 M^2}.$$

Drugi člen je iskani kotni premik Newtonove elipse po enem obhodu, torej premik perihelija orbite. Če ga zapišemo z dolžino a polovice dolge osi in z ekscentričnostjo elipse po enačbi

$$\frac{M^2}{km'm^2} = a(1 - e^2),$$

dobimo *

$$\delta\phi = \frac{6\pi km'}{c^2 a(1 - e^2)}. \quad (101.9)$$

Sedaj si oglejmo pot svetlobnega žarka v središčno simetričnem polju. Pot je določena z ikonalno enačbo (87.9)

$$g^{ik} \frac{\partial\psi}{\partial x^i} \frac{\partial\psi}{\partial x^k} = 0,$$

ki se od Hamilton-Jacobijeve enačbe razlikuje le v tem, da je m enak nič. Zato lahko tirnico žarka dobimo kar iz (101.5), če postavimo $m = 0$; pri tem moramo namesto energije delca

*Numerični vrednosti premika, določeni z enačbo (101.9), sta za Merkur in za Zemljo enaki 43.0" oziroma 3.8" na stoletje.

$\mathcal{E}_0 = -(\partial S/\partial t)$ pisati frekvenco svetlobe $\omega_0 = -(\partial\psi/\partial t)$. Poleg tega namesto konstante M vpeljemo konstanto ρ , definirano z $\rho = cM/\omega_0$. Dobimo

$$\phi = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}. \quad (101.10)$$

Če zanemarimo relativistični popravek ($r_g \rightarrow 0$), dobimo $r = \rho/\cos\phi$, torej enačbo pre-mice, ki je od izhodišča oddaljena za ρ . Relativistične popravke bomo dobili kot v predhodnem primeru.

Radialni del ikonala je (glej (101.3)):

$$\phi_r(r) = \frac{\omega_0}{c} \int \sqrt{\frac{r^2}{(r-r_g)^2} - \frac{\rho^2}{r(r-r_g)}} dr.$$

Naredimo enako transformacijo kot ob prehodu iz (101.3) k (101.6) in dobimo

$$\psi_r(r) = \frac{\omega_0}{c} \int \sqrt{1 + \frac{2r_g}{r} - \frac{\rho^2}{r^2}} dr.$$

Integrand razvijemo po potencah r_g/r :

$$\psi_r = \psi_r^{(0)} + \frac{r_g\omega_0}{c} \int \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} = \psi_r^{(0)} + \frac{r_g\omega_0}{c} \cosh^{-1} \frac{r}{\rho},$$

kjer $\psi_r^{(0)}$ ustreza običajnemu ravnemu žarku.

Celotna sprememba k ψ_r med širjenjem žarka od zelo velika razdalje R do točke $r = \rho$, ki je najbližja središču, in nazaj do velike razdalje R je enaka

$$\Delta\psi_r = \Delta\psi_r^{(0)} + 2\frac{r_g\omega_0}{c} \cosh^{-1} \frac{R}{\rho}.$$

Posledično spremembo polarnega kota ϕ na celotni poti žarka dobimo z odvodom po $M = \rho_0/\omega c$:

$$\Delta\phi = -\frac{\partial\Delta\psi_r}{\partial M} = -\frac{\partial\Delta\psi_r^{(0)}}{\partial M} + \frac{2r_g R}{\rho\sqrt{R^2 - \rho^2}}.$$

Končno naredimo limito $R \rightarrow \infty$ in upoštevamo, da je pri ravnem žarku $\Delta\phi = \pi$. Dobimo

$$\Delta\phi = \pi + \frac{2r_g}{\rho}.$$

To pomeni, da je pod vplivom privlačnega polja svetlobni žarek ukrivljen: njegova tirnica je krivulja, ki je konkavna proti središču, kot med asimptotama pa se od π razlikuje za

$$\delta\phi = \frac{2r_g}{\rho} = \frac{4km'}{c^2\rho}; \quad (101.11)$$

z drugimi besedami, svetlobni žarek, ki mimo središča polja potuje pri razdalji ρ , se ukloni za kot $\delta\phi$. *

*Za žarek, ki se dotakne površine Sonca, je $\delta\phi = 1,75''$.

§102 Gravitacijski kolaps kroglastega telesa

V Schwarzschildovi metriki (100.14) gre g_{00} proti nič in g_{11} proti neskončnosti, ko gre r proti r_g ($r = r_g$ se imenuje “Schwarzschildova sfera”). To bi nam lahko dalo misliti, da mora obstajati singularnosti prostorsko-časovne metrike in da je nemogoče, da bi telesa imela “polmer”, ki je manjši od gravitacijskega polmera za dano maso. Takšen zaključek pa bi bil napačen. To je razvidno že iz dejstva, da determinanta $g = -r^4 \sin^2 \theta$ nima singularnosti pri $r = r_g$, tako da pogoj $g < 0$ (88.3) ni prekršen. Pokazali bomo, da gre tu dejansko le za nezmožnost vpeljave togega opazovalnega sistema za $r < r_g$.

Pravi značaj metrike prostora-časa na tem področju bomo našli, * če opravimo transformacijo koordinat naslednje oblike:

$$c\tau = \pm ct \pm \int \frac{f(r) dr}{1 - \frac{r_g}{r}}, \quad R = ct + \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) f(r)}. \quad (102.1)$$

Tedaj je

$$ds^2 = \frac{1 - \frac{r_g}{r}}{1 - f^2} (c^2 d\tau^2 - f^2 dR^2) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Singularnosti pri $r = r_g$ bomo odpravili, če si izberemo takšno funkcijo $f(r)$, da bo $f(r_g) = 1$. Če je $f(r) = \sqrt{r_g/r}$, bo novi koordinatni sistem poleg vsega tudi sinhron ($g_{\tau\tau} = 1$). Najprej si izberemo zgornji znak v (102.1) in dobimo

$$R - c\tau = \int \frac{(1 - f^2) dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) f} = \int \sqrt{\frac{r}{r_g}} dr = \frac{2}{3} \frac{r^{3/2}}{r_g^{1/2}},$$

ali

$$r = \left(\frac{3}{2} (R - c\tau) \right)^{2/3} r_g^{1/3} \quad (102.2)$$

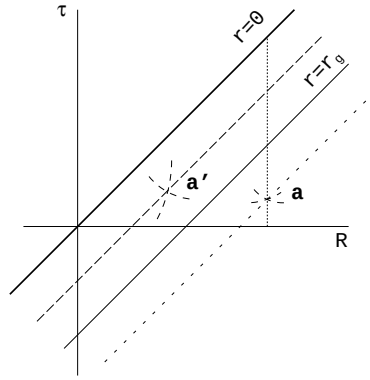
(integracijsko konstantno, ki je odvisna od izbire izhodišča za merjenje časa, postavimo na nič). Diferencial ločne dolžine je

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \frac{dR^2}{\left[\frac{3}{2r_g} (R - c\tau) \right]^{2/3}} - \left[\frac{3}{2} (R - c\tau) \right]^{4/3} r_g^{2/3} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (102.3)$$

V teh koordinatah singularnosti na Schwarzschildovi sferi [kateri ustreza enačba $\frac{3}{2}(R - c\tau) = r_g$] ni več. Koordinata R je povsod prostorska, τ pa časovna. Metrika (102.3) ni stacionarna. Kot v vsakem sinhronem opazovalnem sistemu so časovnice geodetke. To pomeni, da so “testni” delci, ki mirujejo glede na opazovalni sistem, prosto gibajoči delci v danem polju.

Izbranim vrednostim količine r ustrezajo svetovnice $R - c\tau = \text{konst}$ (poševne ravne črte na sliki 17). Svetovnice delcev, ki mirujejo glede na opazovalni sistem, so na skici prikazane kot navpične črte; ko se delci gibljejo po teh črtah, po končnem intervalu lastnega časa “padejo” v notranjost polja ($r = 0$), kjer se nahaja dejanska singularnost metrike.

*Fizikalni pomen Schwarzschildove singularnosti je prvi razložil D. Finkelstein (1958) z uporabo drugačne pretvorbe. Metriko (102.3) pa je prvi našel Lemaitre (1938).



Slika 17:

Oglejmo si širjenje radialnih svetlobnih signalov. Enačba $ds^2 = 0$ (pri $\theta, \phi = \text{konst}$) nam da odvod $d\tau/dR$ vzdolž žarka:

$$c \frac{d\tau}{dR} = \pm \frac{1}{\left(\frac{3}{2r_g}(R - c\tau)\right)^{1/3}} = \pm \sqrt{\frac{r_g}{r}}, \quad (102.4)$$

različna predznaka ustrežata dvema mejama svetlobnega stožca, katerega vrh je v izbrani svetovni točki. Ko je $r > r_g$ (točka a na sliki 17), ukrivljenost teh mej zadosti pogoju $|cd\tau/dR| < 1$, tako da ravna črta $r = \text{konst}$ (vzdolž katere velja $|cd\tau/dR| = 1$) pade v notranjost stožca. V področju $r < r_g$ (točka a') pa imamo $|cd\tau/dR| > 1$, tako da črta $r = \text{konst}$, svetovnica delca, ki miruje glede na središče polja, leži zunaj stožca. Obe meji stožca sekata črto $r = 0$ pri končni razdalji in se ji približata vzdolž navpične črte. Ker vzročno povezani dogodki ne morejo ležati na svetovnici, ki je zunaj svetlobnega stožca, na območju $r < r_g$ delci ne morejo mirovati. Vse interakcije in signali se tu širijo proti središču, ki ga dosežejo po končnem intervalu časa τ .

Če bi izbrali spodnje predznake v (102.1), bi podobno dobili “razširjajoč” se opazovalni sistem, v katerem se metrika od (102.3) razlikuje le pri predznaku količine τ . Takšen opazovalni sistem ustreza prostoru časa v katerem je (v območju $r < r_g$) mirovanje ponovno nemogoče, vsi signali pa se razširjajo navzven iz središča.

Zgornje rezultate lahko uporabimo pri opisu obnašanja masivnih teles v splošni teoriji relativnosti.

Pri iskanju relativističnih pogojev za ravnovesje sferičnega telesa ugotovimo, da za telo z zadosti veliko maso stanje statičnega ravnovesja ni mogoče. * Očitno se mora takšno telo brezmejno krčiti (to je “gravitacijski kolaps”). †

V opazovalnem sistemu, ki ni vezan na telo, in ki je v neskončnosti Galilejev [metrika (100.14)], polmer središčno simetričnega telesa ne more biti manjši od r_g . To pomeni, da se v skladu z uro t daljnega opazovalca polmer sesedajočega se telesa asimptotično približuje gravitacijskemu polmeru, ko gre $t \rightarrow \infty$. Hitro lahko poiščemo limitno obliko te odvisnosti.

Delec na površini sesedajočega se telesa je ves čas podvržen privlačnemu polju konstantne mase m , ki je skupna masa telesa. Ko $r \rightarrow r_g$, postaja gravitacijska sila vedno večja; gostota telesa (in z njo pritisk) pa ostajata končna. Zato bomo sile pritiska zanemarili in določili

* Glej *Statistična fizika*, prvi del, § 111.

† Ključne lastnosti tega pojava sta prva opisala J. R. Oppenheimer in H. Snyder (1939).

časovno odvisnost $r = r(t)$ polmera telesa tako, da bomo obravnavali prosti pad testnega delca v polju mase m .

Funkcija $r(t)$, ki opisuje padanje v Schwarzschildovem polju, je podana z integralom (101.4), kjer moramo za povsem radialno gibanje vstaviti $M = 0$. Če se padec začne pri razdalji r_0 od središča s hitrostjo nič ob nekem času t_0 , je energija delca $\mathcal{E}_0 = mc^2 \sqrt{1 - r_g/r_0}$, "razdaljo" r pa bo dosegel ob času t , določenim z

$$c(t - t_0) = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r_0}} \int_r^{r_0} \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{\frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r_0}}}. \quad (102.5)$$

Integral divergira kot $r_g \ln(r - r_g)$, ko gre $r \rightarrow r_g$. Tako dobimo asimptotično formulo, ki podaja približevanje r k r_g :

$$r - r_g = \text{konst } e^{-(ct/r_g)}. \quad (102.6)$$

V zadnji fazi se polmer sesedajočega se telesa približuje gravitacijskemu polmeru z eksponentno časovno odvisnostjo z zelo kratkim karakterističnim časom $\sim r_g/c$.

Čeprav gre hitrost sesedanja, ki jo opazujemo od zunaj, asimptotično proti nič, hitrost v padanja delcev, merjena v lastnem času, narašča in se približuje svetlobni hitrosti. Po definiciji (88.10) velja:

$$v^2 = -\frac{g_{11}}{g_{00}} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2.$$

Komponenti g_{11} in g_{00} vzamemo iz (100.14), dr/dt pa iz (102.5), pa dobimo

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1 - \frac{r_g}{r}}{1 - \frac{r_g}{r_0}}. \quad (102.7)$$

Z vidika zunanjega opazovalca traja približevanje k gravitacijskemu polmeru neskončno dolgo, merjeno z lastnim časom (torej s časom v opazovalnim sistemom, ki se sogiblje s telesom) pa končno dolgo. To je razvidno že iz zgornjega opisa, lahko pa to preverimo tudi z neposrednim izračunom lastnega časa τ , z invariantnim integralom

$$c\tau = \int ds = \int \left[c^2 g_{00} \frac{dt^2}{dr^2} + g_{11} \right]^{\frac{1}{2}} dr.$$

Vzamemo dr/dt za padajoči delec iz (102.5) in dobimo lastni čas za padec od r_0 do r , ki je

$$\tau - \tau_0 = \frac{1}{c} \int_{r_0}^r \left(\frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r_0} \right)^{-\frac{1}{2}} dr. \quad (102.8)$$

Ta integral konvergira, ko gre $r \rightarrow r_g$.

Telo se bo krčilo tudi po tem, ko bo doseglo gravitacijski polmer (merjeno z lastnim časom) in v končnem času bodo dosegli središče vsi delci; vsak trenutek, ko se del snovi sesede v središče, je prava singularnost prostorsko-časovne metrike. Tega procesa sesedanja telesa v notranjosti Schwarzschildove sfere pa mi kot zunanji opazovalec ne moremo videti. Trenutek, ko površina telesa preide Schwarzschildovo sfero, ustreza $t = \infty$; lahko bi rekli, da se za oddaljenega opazovalca celoten proces kolapsa v notranjosti Schwarzschildove sfere zgodi "po neskončnem času" – to je skrajni primer relativnosti časa. Pri tem ni nobenega logičnega protislovja. To je povsem v skladu z zgornjo ugotovitvijo o lastnosti opazovalnega

sistema, ki se krči: v tem sistemu noben signal ne izhaja iz Schwarzschildove sfere. Delci in svetlobni žarki lahko sfero sekajo (v sogibljevem opazovalnem sistemu) v eni sami smeri – proti notranjosti, ko pa so enkrat tam, ne morejo več ven. Takšen “enosmerni ventil” se imenuje *dogodkovno obzorje*.

Zunanji opazovalec bo poleg krčenja proti gravitacijskemu polmeru videl tudi “ustavljanje” telesa. Čas širjenja signalov, ki odidejo s telesa, gre proti neskončnosti: za svetlobni signal velja $c dt = dr/(1 - r_g/r)$, čas širjenja signala od r do $r_0 > r$ pa je podan z integralom

$$c\Delta t = \int_r^{r_0} \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}} = r_0 - r + r_g \ln \frac{r_0 - r_g}{r - r_g}, \quad (102.9)$$

ki [tako kot integral (102.5)], divergira, ko $r \rightarrow r_g$. Intervali lastnega časa na površini telesa so skrajšani v primerjavi z intervali časa t oddaljenega opazovalca, po razmerju

$$\sqrt{g_{00}} = \sqrt{1 - r_g/r};$$

to pomeni, da ko $r \rightarrow r_g$, so vsi procesi na telesu za zunanjega opazovalca videti “zamrznjeni”.

Frekvenca spektralne črte, ki jo oddaja telo, in ki jo zazna oddaljeni opazovalec, je zmanjšana, kar je posledica ne le gravitacijskega rdečega premika temveč tudi Dopplerjevega premika zaradi gibanja izvora, ki pada proti središču skupaj s površino krogle. Ko je polmer krogle že blizu r_g (tako da je hitrost padanja že blizu svetlobne), ta pojav zmanjša frekvenco svetlobe za faktor

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} / \left(1 + \frac{v}{c}\right) \approx \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Zaradi skupnega učinka obeh pojavov opazovana frekvenca zato pada proti nič, ko gre $r \rightarrow r_g$, kot

$$\omega = \text{konst} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right). \quad (102.10)$$

Z vidika oddaljenega opazovalca vodi gravitacijski kolaps k “zamrznjenemu” telesu, ki v okoliški prostor ne pošilja signalov, in ki z zunanjim svetom interagira le preko njegovega statičnega gravitacijskega polja. Takšno tvorbo imenujemo *črna luknja* ali *kolapsar*.

Za konec še ena opomba o metodologiji. Videli smo, da v središčnem polju v vakuumu “sistem zunanjega opazovalca”, ki je v neskončnosti inercialen, ni popoln: v njem ne moremo opisati svetovnic delcev, ki se gibljejo v notranjosti Schwarzschildove sfere. Metrika (102.3) velja tudi v notranjosti Schwarzschildove sfere, vendar tudi ta sistem v nekem smislu ni popoln. V tem sistemu si oglejmo radialno gibanje delca, ki se od središča oddaljuje. Ko $\tau \rightarrow \infty$ gre njegova svetovnica proti neskončnosti, ko pa $\tau \rightarrow -\infty$ se mora ta asimptotično približevati $r = r_g$, ker je v tej metriki znotraj Schwarzschildove sfere možno le gibanje proti središču. Po drugi strani lahko delec pride od $r = r_g$ do poljubne dane točke $r > r_g$ v končnem intervalu lastnega časa. Merjeno z lastnim časom se mora delec približati Schwarzschildovi sferi od znotraj preden se lahko začne gibati zunaj nje; vendar ta del zgodovine delca ne more biti opisan v tem opazovalnem sistemu.

Poudariti moramo, da je vzrok te nepopolnosti formalna obravnava metrike polja, za katero smatramo, da jo ustvarja točkasta masa. V pravem fizikalnem pojavu, na primer pri sesedanju razsežnega telesa, te nepopolnosti ni: rešitev, ki jo dobimo z lepljenjem metrike (102.3) na rešitev znotraj snovi, bo seveda popolna in bo opisovala celotno zgodovino vseh možnih gibanj delcev. (Svetovnice delcev, ki se gibljejo na območju $r > r_g$ v smeri proti

središču se nujno začnejo na površini sfere, še preden se ta skrči pod polmer Schwarzschildove sfere.)

NALOGE

NALOGA 1. Določi polmer krožne orbite delca, ki se giblje v polju črne luknje (S. A. Kaplan, 1949).

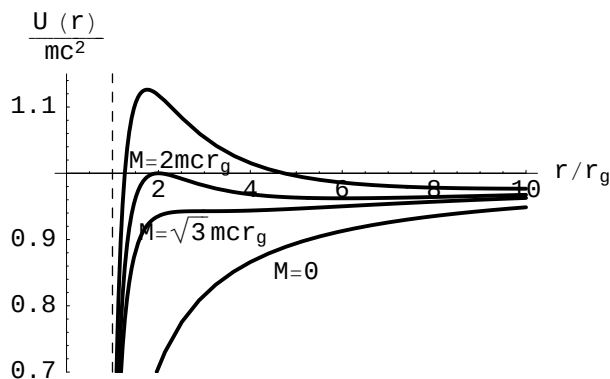
Rešitev: Časovna odvisnost $r = r(t)$ za delec, ki se giblje v Schwarzschildovem polju je podana z (101.4), kar lahko v diferencialni obliki zapišemo kot

$$\frac{1}{1 - r_g} \frac{dr}{rc dt} = \frac{1}{\mathcal{E}_0} [\mathcal{E}_0^2 - U^2(r)]^{1/2}, \quad (1)$$

pri čemer je

$$U(r) = mc^2 \left[\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(1 + \frac{M^2}{m^2 c^2 r^2}\right) \right]^{1/2}$$

(m je masa delca, $r_g = 2km'/c^2$ je gravitacijski polmer telesa v izhodišču, ki ima maso m'). Funkcija $U(r)$ igra vlogo “efektivne potencialne energije”. Pri tem imamo v mislih, da pogoj $\mathcal{E}_0 \geq U(r)$ določa dopustno območje gibanja (podobno kot v nerelativistični teoriji). Slika 18 prikazuje krivulje $U(r)$ za različne vrednosti M vrtilne količine delca.



Slika 18:

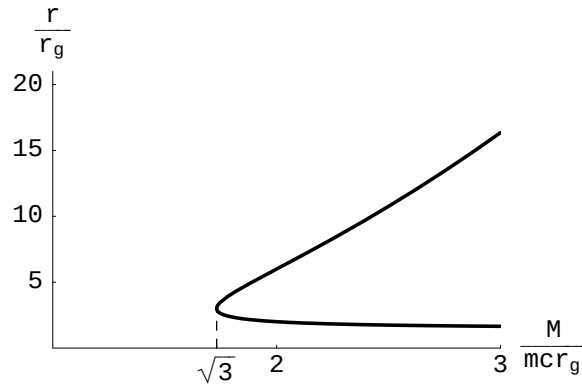
Krivinski polmeri orbit in ustrezne vrednosti $\mathcal{E}_0$ in M so določene z ekstremi funkcije $U(r)$, pri čemer minimum ustreza stabilni, maksimum pa nestabilni orbiti. Skupna rešitev enačb $U(r) = \mathcal{E}_0$, $U'(r) = 0$ nam da

$$\frac{r}{r_g} = \frac{M^2}{m^2 c^2 r_g^2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{3m^2 c^2 r_g^2}{M^2}} \right],$$

$$\mathcal{E}_0 = Mc \sqrt{\frac{2}{rr_g} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)},$$

kjer se zgornji predznak nanaša na stabilno, spodnji pa na nestabilno orbito. Stabilna orbita, ki je najbližja izhodišču, je opisana s parametri

$$r = 3r_g, \quad M = \sqrt{3}mcr_g, \quad \mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{8}{9}}mc^2.$$



Slika 19:

Najmanjši polmer nestabilne orbite je $3r_g/2$ in ga dosežemo v limiti $M \rightarrow \infty$, $\mathcal{E}_0 \rightarrow \infty$. Slika 19 prikazuje odvisnost r/r_g od M/mcr_g ; zgornja veja ustreza stabilni, spodnja pa nestabilni orbiti. *

NALOGA 2. V primeru gibanja v enakem polju kot v prvi nalogi določi presek za gravitacijsko ujetje (a) nerelativističnega, (b) ultrarelativističnega delca, ki prihaja iz neskončnosti (Ya. B. Zeldovič in I. D. Novikov, 1964).

Rešitev: (a) Pri nerelativistični hitrosti v_∞ (v neskončnosti) je energija delca $\mathcal{E}_0 \approx mc^2$. Iz slike 18 lahko razberemo, da črta $\mathcal{E}_0 = mc^2$ leži nad vsemi krivuljami potencialne energije z vrtilno količino manjšo $2mcr_g$, torej vsemi tistimi s parametrom trka ρ manjšim od $2cr_g/v_\infty$. Vsi delci s takšnimi vrednostmi ρ so gravitacijsko ujeti: dosežejo Schwarzschildovo kroglo (asimptotično, ko gre $t \rightarrow \infty$) in se ne vrnejo več v neskončnost. Presek za ujetje je

$$\sigma = 4\pi r_g^2 \left(\frac{c}{v_\infty} \right)^2.$$

(b) V enačbi (1) prve naloge dosežemo prehod k ultrarelativističnemu delcu (ali k svetlobnemu žarku) z limito $m \rightarrow 0$. Vpeljemo še parameter trka $\rho = cM/\mathcal{E}_0$ in dobimo:

$$\frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \frac{dr}{cdt} = \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} + \frac{\rho^2 r_g}{r^3}}.$$

Meje radialnega gibanja (obračališča) so določene z ničlami izraza pod korenem. Meje kot funkcija parametra ρ so narisane na sliki 20; območja možnega gibanja ustrezajo delu ravnine, ki ni črtano. Krivulja ima minimum v točki

$$\rho = \frac{3\sqrt{3}}{2}r_g, \quad r = \frac{3}{2}r_g.$$

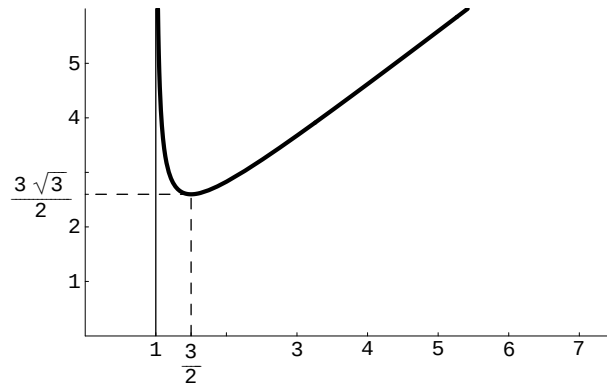
Pri manjših vrednostih parametra trka delec ne doseže obračališča, torej pride do Schwarzschildove sfere. Presek za ujetje je torej

$$\sigma = \frac{27}{4}\pi r_g^2.$$

§103 Gravitacijski kolaps krogle prahu

Obravnava poteka spreminjanja notranjega stanja sesedajočega se telesa (ki vključuje tudi njegovo skrčenje pod Schwarzschildov polmer) zahteva reševanje Einsteinovih enačb gravitaci-

*Za primerjavo naj spomnimo, da je v Newtonovem polju krožna orbita možna (in stabilna) pri poljubni oddaljenosti od središča (pri tem je polmer povezan z vrtilno količino po enačbi $r = M^2/km'm^2$).



Slika 20:

jskega polja v snovi. V središčno simetričnem primeru lahko enačbe polja rešimo splošno, če zanemarimo pritisk v snovi: $p = 0$ (R. Tolman, 1934). Čeravno ta približek v splošnem ni dopusten v realnih primerih, je vseeno splošna rešitev te naloge metodološko zelo zanimiva.

Ko smo pokazali v 97, lahko v prašni snovi (angl. *dustlike medium*) izberemo opazovalni sistem, ki je tako sinhron kot sogibljiv. * Čas in radialno koordinato v takšnem sistemu označimo z τ in R . Sferično simetrični diferencial ločne dolžine zapišemo v obliki †

$$ds^2 = d\tau^2 - e^{\lambda(\tau, R)} dR^2 - r^2(\tau, R)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (103.1)$$

Funkcija $r(\tau, R)$ je “polmer”, ki je definiran tako, da je $2\pi r$ obseg kroga s središčem v izhodišču. Oblika (103.1) enolično določa τ , omogoča pa še poljubno transformacijo radialne komponente oblike $R = R(R')$.

Po izračunu komponente Riccijevega tenzorja za to metriko dobimo naslednji sistem Einsteinovih enačb: ‡

$$-e^{-\lambda} r'^2 + 2r\ddot{r} + \dot{r}^2 + 1 = 0, \quad (103.2)$$

$$-\frac{e^{-\lambda}}{r}(2r'' - r'\lambda') + \frac{\dot{r}\dot{\lambda}}{r} + \ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} + \frac{2\ddot{r}}{r} = 0, \quad (103.3)$$

$$-\frac{e^{-\lambda}}{r^2}(2rr'' + r'^2 - rr'\lambda') + \frac{1}{r^2}(r\dot{r}\dot{\lambda} + \dot{r}^2 + 1) = 8\pi k\epsilon, \quad (103.4)$$

$$2\dot{r}' - \dot{\lambda}r' = 0, \quad (103.5)$$

kjer črtica označuje odvajanje po R , pika pa odvajanje po τ .

Enačbo (103.5) lahko takoj integriramo po času in dobimo

$$e^{\lambda} = \frac{r'^2}{1 + f(R)}, \quad (103.6)$$

*Snov se more gibati “brez vrtenja” (glej opombo na strani 288). V obravnavanem primeru je ta pogoj gotovo izpolnjen, saj se lahko zaradi krogelne simetrije snov giblje le v radialni smeri.

†V tem razdelku je $c = 1$.

‡Glej peto nalogo v § 100. Enačbe (103.2)-(103.5) dobimo, če v enačbah (2)-(5) iz naloge postavimo $\nu = 0$, $e^{\mu} = r^2$, $p = 0$. Opazimo, da druga izmed enačb (6) v isti nalogi postane $\nu' = 0$, torej $\nu = \nu(\tau)$, če je $p = 0$. Ostane nam še nekaj poljubne izbire v metriki (1) pri izbiri τ : to poljubnost lahko izkoristimo, da postavimo ν na nič, kar ponovno dokazuje možnost vpeljave sinhrono sogibljivega opazovalnega sistema.

kjer je $f(R)$ poljubna funkcija, ki jo omejuje le pogoj $1 + f > 0$. Ta izraz vstavimo v (103.2) in dobimo

$$2r\ddot{r} + \dot{r}^2 - f = 0$$

[če izraz vstavimo v (103.3), ne dobimo nič novega]. Prvi integral te enačbe je

$$\dot{r}^2 = f(R) + \frac{F(R)}{r}, \quad (103.7)$$

kjer je $F(R)$ druga poljubna funkcija. Zato je

$$\tau = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{f + \frac{F}{r}}}.$$

Funkcijo $r(\tau, R)$, ki jo dobimo po integraciji, lahko zapišemo v parametrični obliki

$$r = \frac{F}{2f}(\cosh \eta - 1), \quad \tau_0(R) - \tau = \frac{F}{2f^{3/2}}(\sinh \eta - \eta) \text{ za } f > 0, \quad (103.8)$$

$$r = \frac{F}{-2f}(1 - \cos \eta), \quad \tau_0(R) - \tau = \frac{F}{2(-f)^{3/2}}(\eta - \sin \eta) \text{ za } f < 0, \quad (103.9)$$

kjer je $\tau_0(R)$ ponovno poljubna funkcija. Če je $f = 0$, je

$$r = \left(\frac{9F}{4}\right)^{1/3} [\tau_0(R) - \tau]^{2/3}, \text{ za } f = 0. \quad (103.10)$$

V vseh primerih dobimo, če vstavimo (103.6) v (103.4) in izločimo f s pomočjo (103.7), naslednji izraz za gostoto snovi: *

$$8\pi k\epsilon = \frac{F'}{r'r^2}. \quad (103.11)$$

Enačbe (103.6)-(103.11) določajo iskano splošno rešitev. [†] Ugotovimo lahko, da je odvisna le od dveh "fizikalno različnih" poljubnih funkcij: čeprav se v rešitvi pojavljajo tri funkcije f , F in τ_0 , lahko koordinato R pretvorimo s poljubno transformacijo $R = R(R')$. To število ustreza dejstvu, da lahko povsem splošno središčno simetrično porazdelitev snovi podamo z dvema funkcijama (porazdelitev gostote in radialne hitrosti snovi), medtem ko prosto gravitacijsko polje s središčno simetrijo ne obstaja.

Ker se opazovalni sistem sogiblje s snovjo, vsakemu delcu ustreza določena vrednost R ; funkcija $r(\tau, R)$ za to vrednost R določa gibalni zakon za dani delec, medtem ko je $\dot{r}$ njegova radialna hitrost. Pomembna lastnost dobljene rešitve je ta, da lahko z izbiro poljubnih funkcij, ki v njej nastopajo, na intervalu od 0 do nekega R_0 popolnoma določimo obnašanje krogle s tem polmerom; obnašanje ni odvisno od vrednosti funkcij za $R > R_0$. Takoj dobimo rešitev

*Funkcije F , f , τ_0 morajo zadostiti le pogojem, ki zagotavljajo, da so e^λ , r in ϵ pozitivne količine. Poleg zgoraj omenjenega pogoja, da je $1 + f > 0$, od tod sledi tudi, da je $F > 0$. Predpostavili bomo še, da je $F' > 0$, $r' > 0$; s tem bomo izključili primere, ki vodijo k križanju krogelnih plasti snovi med njihovim radialnim gibanjem.

[†]Ne vključujejo pa posebnega primera, ko je $r = r(\tau)$ in ni odvisen od R , zato se enačba (103.5) poenostavi na identiteto; glej V. A. Ruban, *JETP*, **56**, 1914 (1969); *Soviet Phys. JETP*, **29**, 1027 (1969). Ta primer pa ne ustreza pogojem kolapsa končnega telesa.

naloge v notranjosti za poljubno končno kroglo. Celotna masa krogle je podana z integralom (glej (100.24))

$$m = 4\pi \int_0^{r(\tau, R_0)} \epsilon r^2 dr = 4\pi \int_r^{R_0} \epsilon r^2 r' dR.$$

Vstavimo (103.11) in opazimo, da je $F(0) = 0$ (ko je $R = 0$, mora veljati $r = 0$), in dobimo

$$m = \frac{F(R_0)}{2k}, \quad r_g = F(R_0) \quad (103.12)$$

(r_g je gravitacijski polmer krogle).

Če je $F = \text{konst} \neq 0$, iz (103.11) dobimo $\epsilon = 0$, tako da rešitev velja za prazen prostor, kar pomeni, da opisuje polje točkaste mase (ki se nahaja v središču in je singularnost metrike). Če postavimo $F = r_g$, $f = 0$ in $\tau_0 = R$, dobimo metriko (102.3). *

Enačbe (103.8)–(103.10) opisujejo tako krčenje kot razširjanje krogle (kar je odvisno od obsega vrednosti, ki jih zavzame parameter η); obe možnosti sta veljavni rešitvi enačb polja. Pomemben primer obnašanja nestabilnega masivnega telesa je krčenje – gravitacijski kolaps. Rešitve (103.8)–(103.10) so zapisane tako, da se telo seseda, ko τ narašča in gre proti τ_0 . Trenutek $\tau = \tau_0(R)$ ustreza prihodu v središče snovi, katere radialna koordinata je R (kjer mora veljati $\tau_0' > 0$).

Lastnosti metrike v notranjosti krogle v limitnem primeru, ko $\tau \rightarrow \tau_0(R)$, so enake za vse tri primere (103.8)–(103.10):

$$r \approx \left(\frac{9F}{4}\right)^{1/3} (\tau_0 - \tau)^{2/3}, \quad e^{\lambda/2} \approx \left(\frac{2F}{3}\right)^{1/3} \frac{\tau_0'}{\sqrt{1+f}} (\tau_0 - \tau)^{-1/3}. \quad (103.13)$$

To pomeni, da gredo vse radialne razdalje (v sogibljevem opazovalnem sistemu, ki ga tu uporabljamo) proti neskončnosti, tangentne razdalje pa gredo proti 0 (kot $\tau - \tau_0$). † Zato gostota snovi narašča preko vseh mej: ‡

$$8\pi k\epsilon \approx \frac{2F'}{3F\tau_0'(\tau_0 - \tau)}. \quad (103.14)$$

Ugotovili smo torej, da se celotna porazdelitev snovi seseda v središče, kar je v skladu z našimi opažanji v 102. §

V posebnem primeru, ko je $\tau_0(R) = \text{konst}$ (tedaj vsi delci dosežejo središče sočasno), ima matrika v notranjosti sesedajoče se krogle drugačen značaj. V tem primeru velja

$$r \approx \left(\frac{9F}{3}\right)^{1/3} (\tau_0 - \tau)^{2/3}, \quad e^{\lambda/2} \approx \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} \frac{F'}{2F^{2/3}\sqrt{1+f}} (\tau_0 - \tau)^{2/3}, \quad (103.15)$$

$$8\pi k\epsilon \approx \frac{4}{3(\tau_0 - \tau)^2}.$$

*Primer, ko je $F = 0$ (in iz (103.7) sledi $r = \sqrt{f}(\tau - \tau_0)$) ustreza odsotnosti polja; s primerno pretvorbo spremenljivk lahko metriko spravimo v Galilejevo obliko.

†Geometrija v “ravnini”, ki poteka skozi središče, je enaka geometriji na stožčasti rotacijski ploskvi, ki se s časom razteguje vzdolž tvorilk in krči vzdolž mejnih krožnic.

‡Dejstvo, da pride do gravitacijskega kolapsa ne glede na to, kakšno maso ima krogla, je pričakovana posledica tega, da smo zanemarili pritisk. Očitno je, da je za $\epsilon \rightarrow \infty$ privzetek, da je snov prašnata, s fizikalnega vidika nesprejemljiv; morali bi uporabiti ultrarelativistično enačbo $p = \epsilon/3$. Vseeno pa je jasno, da so splošne lastnosti limitnih zakonov stiskanja v veliki meri neodvisne od enačbe stanja snovi (glej E. M. Lifshitz in I. M. Khalatnikov, *JETP* **39**, 149, 1960; *Soviet Phys. JETP*, **12**, 108, 1961).

§Primer, ko je $\tau_0 = \text{konst}$ med drugim vključuje tudi sesedanje povsem homogene krogle – glej naloge.

torej ko gre $\tau \rightarrow \tau_0$, gredo vse razdalje, tako tangentne kot radialne, proti nič kot $\sim (\tau_0 - \tau)^{2/3}$: gostota snovi gre proti neskončnosti kot $(\tau_0 - \tau)^{-2}$ in v tej limiti postane porazdelitev homogena.

Naj opozorimo na to, da v vseh primerih trenutek prehoda površine sesedajoče se krogle preko Schwarzschildovega polmera $[r(\tau, R_0) = r_g]$ nima posebnega pomena za notranjo dinamiko (ki jo opisuje metrika v sogibljevem opazovalnem sistemu). V vsakem trenutku pa je določen del krogle že pod “dogodkovnim obzorjem”. Tako kot $F(R_0)$ določa gravitacijski polmer celotne krogle (enačba (103.12)), določa $F(R)$ za poljubno vrednost R gravitacijski polmer dela krogle znotraj površine krogle $R = \text{konst}$; ta del krogle je ob vsakem trenutku določen s pogojem $r(\tau, R) \leq F(R)$.

Na koncu bomo pokazali še, kako lahko s temi enačbami rešimo nalogo, ki smo jo opisali na koncu 102: konstruirali bi radi čimbolj popoln opazovalni sistem za polje točkaste mase. *

Konstrukcijo bomo začeli z metriko v vakuumu, ki lahko vsebuje tako območja prostora-časa, ki se krčijo, kot območja, ki se razširjajo. Enačba (103.8) je takšna rešitev, v njej pa moramo postaviti $F = \text{konst} = r_g$. Izberemo še

$$f = -\frac{1}{(R/r_g)^2 + 1}, \quad \tau_0 = \frac{\pi}{2} r_g (-f)^{-3/2},$$

in dobimo

$$\begin{aligned} \frac{r}{r_g} &= \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{r_g^2} + 1 \right) (1 - \cos \eta), \\ \frac{\tau}{r_g} &= \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{r_g^2} + 1 \right)^{3/2} (\pi - \eta + \sin \eta); \end{aligned} \quad (103.16)$$

kjer parameter η teče po vrednostih od 0 do π . Tedaj čas τ (pri danem R) monotonno pada, r pa narašča od nič, doseže maksimum, in nato ponovno pade na nič.

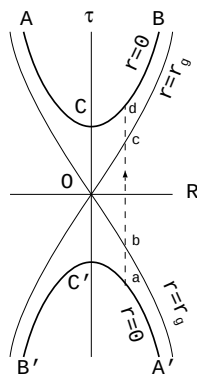
Na sliki 21 črte ACB in $A'C'B'$ ustrezajo točki $r = 0$ (oz. vrednostma parametra $\eta = 2\pi$ in $\eta = 0$). Krivulji AOA' in BOB' predstavljata Schwarzschildovo sfero $r = r_g$. Med $A'C'B'$ in $A'OB'$ je območje prostora-časa, v katerem je možno le gibanje stran od središča, med ACB in AOB pa območje, kjer je dopustno le gibanje proti središču.

Svetovnica delca, ki v tem opazovalnem sistemu miruje, je navpična črta ($R = \text{konst}$). Začne se pri $r = 0$ (točka a), Schwarzschildovo sfero seka v točki b , največjo oddaljenost $\left[r = r_g \left(\frac{R^2}{r_g^2} + 1 \right) \right]$ doseže ob času $\tau = 0$, nato pa delec začne padati proti Schwarzschildovi sferi, skozi katero gre v točki c , in ponovno pride k $r = 0$ (točka d) ob času

$$\tau = r_g \frac{\pi}{2} \left(\frac{R^2}{r_g^2} + 1 \right)^{3/2}. \quad (103.17)$$

Ta opazovalni sistem je popoln: oba konca svetovnice poljubnega delca, ki se giblje v polju, se nahajata v pravi singularnosti $r = 0$, ali pa gresta v neskončnost. Nepopolna metrika (102.3) opisuje le območje, ki je desno od krivulje AOA' (ali levo od BOB'), “razširljiv” opazovalni sistem pa opisuje območje desno od BOB' (ali levo od AOA'). Schwarzschildov opazovalni sistem z metriko (100.14) opisuje le območje desno od BOA' (ali levo od AOB').

*Takšen sistem je prvi našel M. Kruskal z uporabo drugih spremenljivk (M. Kruskal, *Phys. Rev.* **119**, 1743, 1960). Obliko rešitve, ki jo bomo opisali tukaj in v kateri je opazovalni sistem sinhron, je našel I. D. Novikov, 1963.



Slika 21:

NALOGA

Poišči rešitev v notranjosti za gravitacijsko sesedanje prašnate homogene krogle, v kateri snov na začetku miruje.

Rešitev: Vpeljemo

$$\tau = \text{konst}, \quad f = -\sin^2 R, \quad F = 2a_0 \sin^3 R,$$

in dobimo

$$r = a_0 \sin R (1 - \cos \eta), \quad \tau - \tau_0 = a_0 (\eta - \sin \eta) \quad (1)$$

(radialna koordinata R je brezdimenzijska in zavzame vrednosti od 0 do 2π). Gostota je tedaj

$$8\pi k\epsilon = \frac{6}{a_0^2 (1 - \cos \eta)^3}, \quad (2)$$

in je pri izbranem τ neodvisna od R , tako da je krogla homogena. Metriko (103.1) lahko zapišemo z r iz enačbe (1) kot

$$ds^2 = d\tau^2 - a^2(\tau)[dR^2 + \sin^2 R(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (3)$$

$$a = a_0(1 - \cos \eta).$$

Poudarimo naj, da je metrika enaka Friedmannovi rešitvi za metriko vesolja, ki je celo napolnjeno z homogeno prašnato snov (§ 112) – to je povsem pričakovano, saj ima krogla, ki jo izrežemo iz homogene porazdelitve snovi, središčno simetrijo. *

Na začetku postavljeni pogoj lahko izpolnimo z (1), če primerno izberemo konstanti a_0 in τ_0 . Zaradi prikladnosti spremenimo parameter ($\eta \rightarrow \pi - \eta$) in rešitev zapišemo v obliki

$$r = \frac{r_0 \sin R}{2 \sin R_0} (1 + \cos \eta), \quad \tau = \frac{r_0}{2 \sin R_0} (\eta + \sin \eta), \quad (4)$$

kjer je [po (103.12)] gravitacijski polmer krogle enak $r_g = r_0 \sin^2 R_0$. Na začetku ($\tau = 0, \eta = 0$) snov miruje ($\dot{r} = 0$), $2\pi r_0 = 2\pi r(0, R_0)$ pa je začetni obseg krogle. Do kolapsa snovi v središče pride ob času $\tau = \pi r_0 / 2 \sin R_0$.

Čas t v opazovalnem sistemu oddaljenega opazovalca (Schwarzschildov opazovalni sistem) je z lastnim časom τ na krogli povezan preko

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - r_g/r},$$

*Metrika (3) ustreza prostoru, ki ima povsod enako pozitivno ukrivljenost. Po analogiji dobimo, če postavimo $f = \sinh^2 R$, $F = 2a_0 \sinh^3 R$, rešitev, ki ustreza prostoru, ki je povsod enako negativno ukrivljen.

kjer imamo z r v mislih vrednost $r(\tau, R_0)$, ki ustreza površini krogle. Z integracijo te enačbe dobimo naslednji izraz za t kot funkcijo nekega parametra η :

$$\frac{t}{r_g} = \ln \frac{\cot R_0 + \tan \frac{\eta}{2}}{\cot R_0 - \tan \frac{\eta}{2}} + \cot R_0 \left[\eta + \frac{1}{2 \sin^2 R_0} (\eta + \sin \eta) \right] \quad (5)$$

(pri čemer čas $t = 0$ ustreza času $\tau = 0$). Prehod površine krogle onkraj Schwarzschildove sfere ($r(\tau, R_0) = r_g$) ustreza vrednosti parametra η , določeni z enačbo

$$\cos^2 \frac{\eta}{2} = \frac{r_g}{r_0} = \sin^2 R_0.$$

Ko se približujemo tej vrednosti, gre čas t proti neskončnosti, kar je v skladu z opombami v § 102. *

§104 Gravitacijski kolaps teles, ki niso okroglja, in vrtečih se teles

Vsi rezultati v predhodnih dveh razdelkih veljajo izključno za telesa, ki so povsem krogelno simetrična. S preprostimi argumenti lahko pokažemo, da kvalitativna slika gravitacijskega kolapsa velja tudi za telesa, ki od krogelne simetrije malo odstopajo (A. G. Doroshkevich, Ya. B. Zel'dovich in I.D. Novikov, 1965).

Najprej si bomo ogledali telesa, ki od krogelne simetrije odstopajo zaradi nesimetrične porazdelitve snovi, kot celota pa se ne vrtijo.

Očitno je, da če je masivno središčno simetrično telo gravitacijsko nestabilno, mora to veljati tudi v primeru majhnega odstopanja od simetrije, zato se bodo tudi takšna telesa sesedla. Šibko asimetrijo lahko obravnavamo kot majhno motnjo in opazujemo, kaj se z njo dogaja (v sogiblјivem opazovalnem sistemu) med sesedanjem telesa. Motnje z naraščajočo gostoto telesa naraščajo. Vendar če je motnja na začetku sesedanja zadosti majhna, bo majhna tudi ob tistem času, ko bo telo doseglo gravitacijski polmer; v 103 smo pokazali, da ta trenutek nima posebnega pomena za notranjo dinamiko sesedajočega se telesa, gostota telesa pa je seveda še vedno končna. †

Ker so motnje v notranjosti telesa majhne, je tudi motnja zunanjega središčno simetričnega gravitacijskega polja, ki ga telo ustvarja, majhna. To pomeni, da površina "dogodkovnega obzorja", Schwarzschildova sfera, ostane skoraj nespremenjena in nič ne preprečuje sesedajočemu se telesu, da bi jo prečkal (v sogiblјivem opazovalnem sistemu).

Zunanji opazovalec ne more dobiti nobene informacije o nadaljnji rasti motnje v notranjosti telesa, ker noben signal ne more zapustiti območja znotraj dogodkovnega obzorja; celoten potek je za oddaljenega opazovalca "neskončno upočasnen". Od tod pa sledi, da mora glede na zunanji opazovalni sistem gravitacijsko polje sesedajočega se telesa postajati stacionarno, ko se telo asimptotično približuje gravitacijskemu polmeru. Karakteristični čas za to je zelo kratek ($\sim r_g/c$); predpostavimo lahko, da se v tem času v zunanjem prostoru nahajajo le motnje, ki so nastale predhodno v središčno simetričnem polju. Vse motnje pa se morajo s časom porazgubiti v prostoru v obliki gravitacijskih valov, ki gredo v neskončnost (ali pa preko dogodkovnega obzorja).

* Funkcija $r(\tau, R_0)$, določena z enačbo (4) je seveda enaka funkciji, ki jo izračunamo z uporabo zunanje metrike in je podana z integralom (102.8). Isto velja tudi za funkcijo $t(r)$, določeno z enačbama (4) in (5); enaka je funkciji, podani z integralom (102.5).

† Časovni razvoj motenj v nestacionarnih, neomejenih homogenih porazdelitvah snovi bomo obdelali v § 115 (dobljene enačbe bodo veljavne tako za širjenje kot za krčenje). Nehomogenosti nemotene porazdelitve ali neskončni obseg telesa ne bodo vplivali na zaključke, do katerih bomo tam prišli.

V zunanjem gravitacijskem polju porajajoče se črne luknje tudi ne more biti časovno neodvisnih statičnih motenj. Do takšnega zaključka pridemo z analizo konstantnih motenj Schwarzschildove sfere v vakuumu. Analiza pokaže, da v primeru statične motnje vsaka motnja (ki v neskončnosti pada proti nič) narašča prek vseh meja v bližini Schwarzschildove sfere primera brez motnje; * vendar, kot smo že dejali, v našem primeru ni razloga, da bi pričakovali velike motnje zunanjega polja.

Odklone porazdelitve snovi telesa od krogelne simetrije opišemo s kvadrupolnim in višjimi multipolnimi momenti porazdelitve; vsak od njih prispeva k zunanjemu gravitacijskemu polju. Naša trditev je, da se vse takšne motnje zunanjega polja zadušijo v končnih stadijih (z vidika zunanjega opazovalca) kolapsa. † Nastajajoče gravitacijsko polje črne luknje je ponovno središčno simetrično Schwarzschildovo polje, ki ga določa le celotna masa telesa.

Vprašanje končne usode telesa po kolapsu pod polmer dogodkovnega obzorja (ki ni opazljivo iz zunanjega opazovalnega sistema) ni povsem jasno. Verjetno lahko tudi v tem primeru trdimo, da se kolaps konča v pravi singularnosti prostorsko časovne metrike, vendar je ta singularnost povsem drugačne vrste kot v središčno simetričnem primeru. To vprašanje pa do danes še ni povsem razrešeno.

Oglejmo si primer, v katerem šibka motnja krogelne simetrije ni povezana s porazdelitvijo snovi, temveč z vrtenjem telesa kot celote; predpostavka majhne motnje tu pomeni, da mora vrtenje biti zadosti počasno. Že na začetku lahko trdimo, da zaradi ohranitve skupne vrtilne količine telesa M polje črne luknje ne more biti odvisno le od mase telesa. Temu ustreza dejstvo, da med stacionarnimi (vendar ne statičnimi) časovno neodvisnimi motnjami središčno simetričnega gravitacijskega polja obstaja eno, ki ne narašča prek vseh meja, ko $r \rightarrow r_g$. Ta motnja je natanko tista, ki ustreza vrtenju telesa, in jo opišemo tako, da k Schwarzschildovemu metričnemu tenzorju g_{ik} (v koordinatah $x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \phi$) dodamo majhno izvendiagonalno komponento ‡

$$g_{03} = \frac{2kM}{r} \sin^2 \theta \quad (104.1)$$

(glej nalogo v 105). Ta izraz velja (v zunanjem prostoru) tudi ko se telo približuje gravitacijskemu polmeru, zato bo gravitacijsko polje počasi vrteče se črne luknje (v prvem približku po majhni vrtilni količini M) enako središčno simetričnemu Schwarzschildovemu polju z majhnim popravkom (104.1). To polje ni več statično, temveč le stacionarno.

Če je gravitacijski kolaps možen za majhne odklone od krogelne simetrije, potem je mogoč tudi kolaps enake vrste (s skrčitvijo telesa onkraj dogodkovnega obzorja) tudi na nekem končno velikem območju odmikov od krogelne simetrije; pogoji, ki določajo to območje, še niso poznani. Neodvisno od teh pogojev lahko trdimo, da so z vidika zunanjega opazovalca lastnosti dobljenega nebesnega telesa (rotacijskega kolapsarja) neodvisne od vseh lastnosti začetnega telesa, razen njegove celotne mase m in vrtilne količine M . § Če se telo kot

*Glej T. Regge in J. A. Wheeler, *Phys. Rev.* **108**, 1063 (1957). Poudarimo, da je tu govora o motnjah, ki izvirajo iz telesa samega. Robni pogoj v neskončnosti izključuje primere, pri katerih bi statična motnja nastala zaradi zunanjih vzrokov: v tem primeru vi majhne motnje preprosto deformirale Schwarzschildovo kroglo, brez da bi spremenile njene kvalitativne lastnosti, pa tudi prave prostorsko-časovne singularnosti ne morejo povzročiti na njej.

†Zakon, ki opisuje dušenje, je zapisan v R. H. Price, *Phys. Rev. D*, **5**, 2419, 2439 (1972). Začetne 2^l polne statične motnje zunanjega gravitacijskega polja med kolapsom padajo kot $1/t^{2l+2}$.

‡V tem razdelku velja dogovor, da je $c = 1$.

§Da ne bo sporazuma, moramo bralca spomniti, da smo iz obravnave izključili telesa, ki niso naboji, ki ni kompenziran.

celota ne vrtili ($M = 0$), potem bo zunanje gravitacijsko polje kolapsarja središčno simetrično Schwarzschildovo polje. *

Gravitacijsko polje vrteče se črne luknje podaja naslednja osno simetrična stacionarna Kerrova metriki: †

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g r}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2}{\rho^2} \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{2r_g r a}{\rho^2} \sin^2 \theta d\phi dt, \quad (104.2)$$

kjer smo vpeljali oznaki

$$\Delta = r^2 - r_g r + a^2, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (104.3)$$

polmer r_g pa je ponovno enak $r_g = 2mk$. Metrika je odvisna od dveh konstantnih parametrov, m in a , katerih pomen je razviden iz mejne oblike metriki pri velikih razdaljah r . Členi reda do $\sim 1/r$ so

$$g_{00} \approx 1 - \frac{r_g}{r}, \quad g_{03} \approx \frac{r_g a}{r} \sin^2 \theta;$$

prvi izraz primerjamo z (100.18), drugega pa z (104.1), in ugotovimo, da je m masa telesa, parameter a pa je z vrtilno količino povezan z zvezo

$$M = ma \quad (104.4)$$

($M = mac$ v običajnih enotah). Za $a = 0$ postane Kerrova metrika enaka Schwarzschildovi v običajni obliki (100.14). ‡ Opozorimo naj na to, da je forma (104.2) eksplicitno simetrična na obrat časa: ta transformacija ($t \rightarrow -t$) spremeni tudi smer vrtenja, torej predznak vrtilne količine ($a \rightarrow -a$), tako da forma ds^2 ostane nespremenjena.

Determinanta metričnega tenzorja (104.2) je

$$-g = \rho^4 \sin^2 \theta. \quad (104.5)$$

Komponente kovariantnega tenzorja g^{ik} bomo zapisali tako, da bomo z njimi izrazili kvadrat operatorja četvernega gradienta:

$$g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{1}{\Delta} \left(r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2}{\rho^2} \sin^2 \theta\right) \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \frac{\Delta}{\rho^2} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{1}{\Delta \sin^2 \theta} \left(1 - \frac{r_g r}{\rho^2}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^2 + \frac{2r_g r a}{\rho^2} \frac{\partial}{\Delta} \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (104.6)$$

*Ta izjava ima močno podporo v Israelovem izreku: izmed vseh statičnih rešitev Einsteinovih enačb, ki so v neskončnosti Galilejeve in imajo sklenjene enovejne prostorske površine $g_{00} = \text{konst}$, $t = \text{konst}$, je Schwarzschildova rešitev edina, ki ima obzorje ($g_{00} = 0$), na katerem ni singularnosti prostorsko-časovne metriki (dokaz izreka je v W. Israel, *Phys. Rev.* **164**, 1776, 1967).

†To rešitev Einsteinove enačbe je leta 1963 odkril R. Kerr v drugačni obliki, na zapis v (104.2) pa sta jo poenostavila R. H. Boyer in R. W. Lindquist, 1967. V literaturi ni nobene konstruktivne analitične izpeljave te metriki, ki bi bila zadovoljiva z vidika fizike, in celo neposredni preizkus te rešitve Einsteinovih enačb zahteva zelo težavne izračune. Trditev, da je Kerrova metrika edino polje vrtečega se kolapsarja potrjuje izrek, ki je podoben Israelovemu (glej B. Carter, *Phys. Rev. Lett.* **26**, 331, 1971).

‡Do členov prvega reda po a se metrika (104.2) v primeru, ko je $a \ll 1$, od Schwarzschildove razlikuje le po členu $(2r_g a/r) \sin^2 \theta d\phi dt$, kar je v skladu z našimi zgoraj zapisanimi opombami o rahlih odklonih od krogelne simetrije.

Ko je $m = 0$, torej v odsotnosti gravitirajoče mase, metrika (104.2) postane Galilejeva. Izraz

$$ds^2 = dt^2 - \frac{\rho^2}{r^2 + a^2} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (104.7)$$

je enak Galilejevi metriki

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

zapisani v prostorskih sploščenih sferoidnih koordinatah; pretvorbo v kartezične dosežemo z enačbami:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \phi, \\ y &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta; \end{aligned}$$

ploskve $r = \text{konst}$ so sploščeni rotacijski elipsoidi:

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1.$$

Metrika (104.2) ima navidezno singularnost, tako kot ima Schwarzschildova metrika (100.14) navidezno singularnost pri $r = r_g$. Medtem ko gresta v Schwarzschildovem primeru sočasno g_{00} proti nič, g_{11} pa proti neskončnosti na ploskvi $r = r_g$, sta v Kerrovi metriki ti ploskvi ločeni. Enačba $g_{00} = 0$ velja, ko je $\rho^2 = r_g r$; večji izmed obeh korenov te enačbe je

$$r_0 = \frac{r_g}{2} + \sqrt{\left(\frac{r_g}{2}\right)^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (g_{00} = 0). \quad (104.8)$$

Količina g_{11} gre proti neskončnosti, ko je $\Delta = 0$; večji izmed obeh korenov te enačbe je

$$r_{\text{hor}} = \frac{r_g}{2} + \sqrt{\left(\frac{r_g}{2}\right)^2 - a^2} \quad (g_{11} = \infty). \quad (104.9)$$

Površini $r = r_0$ in $r = r_{\text{hor}}$, katerih fizikalni pomen je razložen spodaj, bomo v nadaljevanju na kratko označevali z S_0 in S_{hor} . Ploskev S_{hor} je krogla, S_0 pa je sploščeno rotacijsko telo; S_{hor} se nahaja znotraj S_0 , obe ploskvi pa se dotikata v polih ($\theta = 0$ in $\theta = \pi$).

Kot je razvidno iz (104.8) in (104.9), ploskvi S_0 in S_{hor} obstajata le, če je $a \leq r_g/2$. Ko je $a > r_g/2$, se značaj metrike (104.2) močno spremeni in ima fizikalno nesprejemljive lastnosti, ki kršijo načelo vzročnosti. *

Dejstvo, da Kerrova metrika nima pomena za $a > r_g/2$, pomeni, da vrednosti

$$a_{\text{max}} = \frac{r_g}{2}, \quad M_{\text{max}} = \frac{mr_g}{2}, \quad (104.10)$$

podajata zgornjo mejo dopustnih vrtilnih količin kolapsarja. Tej meji se lahko približamo poljubno blizu, enakost $a = a_{\text{max}}$ sama pa je nedovoljena. Ustrezni mejni vrednosti polmerov površin S_0 in S_{hor} sta

$$r_0 = \frac{r_g}{2}(1 + \sin \theta), \quad r_{\text{hor}} = \frac{r_g}{2}. \quad (104.11)$$

*Kršitev je razvidna iz obstoja sklenjenih časovnih svetovnic: te omogočajo, da najprej potujemo v preteklost, nato pa v prihodnost. Takoj naj poudarimo, da bi do enake kršitve prišlo, če bi Kerrovo metriko nadaljevali znotraj S_{hor} , tudi če je $a < r_g/2$, kar kaže na fizikalno neveljavnost te metrike znotraj S_{hor} (k temu se bomo vrnili kasneje). Iz istega razloga ploskve, definirane z obema manjšima korenoma kvadratnih enačb $g_{00} = 0$ in $1/g_{11} = 0$, ki ležijo znotraj S_{hor} , niso fizikalno zanimive; glej B. Carter, *Phys. Rev.* **174**, 1559 (1968).

Pokazali bomo, da je ploskev S_{hor} dogodkovno obzorje, ki jo delci in svetlobni žarki lahko prečkajo v eni sami smeri, in sicer proti notranjosti.

Najprej bomo pokazali, da povsem splošno velja lastnost enosmerne prepustnosti svetovnic gibajočih se delcev za poljubno ničelno hiperploskev (to je takšna hiperploskev, katere normala v vsaki točki je ničelni vektor). Naj bo hiperploskev določena z enačbo $f(x^0, x^1, x^2, x^3) = \text{konst.}$ Normala na hiperploskev je v smeri četverca gradienta $n^i = \partial f / \partial x^i$, tako da za ničelno hiperploskev velja $n_i n^i = 0$. Z drugimi besedami, smer normale leži v ploskvi sami: na hiperploskvi velja $df = n_i dx^i = 0$, ta enačba pa je izpolnjena, če sta četverca dx^i in n^i enaka. Iz lastnosti $n_i n^i = 0$ sledi tudi, da je diferencial ločne dolžine na hiperploskvi v smeri normale enak $ds = 0$. To pa pomeni, da je v tej smeri hiperploskev tangentna (v dani točki) na svetlobni stožec, ki ga lahko v tej točki konstruiramo. Zato svetlobni stožci v vsaki točki ničelne hiperploskve (na primer v smeri prihodnosti) v celoti ležijo na eni strani hiperploskve, in so na hiperploskev tangentni vzdolž ene izmed tvorilk stožca. To pa pomeni natanko to, da lahko svetovnice delcev ali svetlobnih žarkov (ki so usmerjene v prihodnost) sekajo hiperploskev v eni sami smeri.

Ta lastnosti ničelnih hiperploskev je običajno fizikalno trivialna: enosmerna prepustnost teh ploskev preprosto izraža to, da se je nemogoče gibati z nadsvetlobno hitrostjo (najbolj preprosto tovrstni primer je hiperploskev $x = t$ v ploskem prostoru-času). Fizikalno pa ni trivialen primer, ko ničelne hiperploskve ne segajo v neskončnost, tako da so njihovi izseki $t = \text{konst}$ sklenjene prostorske ploskve; te ploskve so dogodkovna obzorja v enakem pomenu besede, kot je Schwarzschildova sfera dogodkovno obzorje v središčno simetričnem gravitacijskem polju.

Kaj je ploskev S_{hor} v Kerrovem polju? Pogoj $n_i n^i = 0$ za hiperploskev oblike $f(r, \theta) = \text{konst}$ v Kerrovem polju se zapiše

$$g^{11} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 + g^{22} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 = \frac{1}{\rho^2} \left[\Delta \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 \right] = 0 \quad (104.12)$$

[g^{ik} vzamemo iz enačbe (104.6)]. Ta enačba ni izpolnjena na S_0 , pač pa velja na S_{hor} (kjer je $\partial f / \partial \theta = 0$ in $\Delta = 0$).

Nadaljevanje Kerrove metrike v notranjost onkraj obzorja (kot smo storili v 102 in 103) za Schwarzschildovo metriko) fizikalno ni smiselna. Takšno nadaljevanje bi bilo odvisno le od dveh parametrov (m in a) tako kot polje zunaj S_{hor} , zaradi česar je takoj razvidno, da ne more biti povezano s fizikalnim vprašanje usode sesedajočega se telesa, po tem ko to prečka obzorje. V sogibljevem opazovalnem sistemu učinki zaradi odstopanja od krogelne simetrije nikakor niso zadušeni, temveč se prav nasprotno povečujejo, medtem ko se telo krči. Zato ni nobenega razloga, da bi pričakovali, da je lahko polje onkraj obzorja povsem določeno le z maso in vrtilno količino telesa. *

Oglejmo si lastnosti ploskve S_0 , ter prostora med njo in obzorjem (to območje Kerrovega polja imenujemo *ergosfera*).

Osnovna lastnost ergosfere je ta, da v njej delci ne morejo mirovati glede na opazovalni sistem daljnega opazovalca: ko $r, \theta, \phi = \text{konst}$, velja $ds^2 < 0$, diferencial ni časoven, kot bi moral biti za časovnico delca; spremenljivka t izgubi svoj časovni značaj. Zato togega opazovalnega sistema ne moremo iz neskončnosti podaljšati v ergosfero; ploskvi S_0 bi lahko rekli tudi meja stacionarnosti.

*Z vidika matematike je to povezano s kršitvijo načela vzročnosti (o čemer je že bilo govora), ko podaljšamo Kerrovo metriko v notranjost S_{hor} .

Način gibanja delca v ergosferi se bistveno razlikuje od gibanja delca znotraj obzorja v Schwarzschildovem polju. V Schwarzschildovem polju delci ne morejo mirovati glede na zunanji opazovalni sistem in zato ne more veljati $t = \text{konst}$; vsi delci se morajo gibati proti središču. V ergosferi Kerrovega polja pa ne more veljati $\phi = \text{konst}$ (delci se morajo nujno vrteti okoli simetrijske osi polja), medtem ko enačba $r = \text{konst}$ lahko velja. Poleg tega lahko delci (in svetlobni žarki) potujejo tako proti večjim kot proti manjšim r in lahko iz ergosfere odletijo v zunanji prostor. Prav tako lahko delci iz zunanjega prostora pridejo v ergosfero: čas, da delec (ali svetlobni žarek) doseže površino S_0 , če ga merimo z uro oddaljenega opazovalca, je končen na celotni površini S_0 , razen na polih, kjer se S_0 dotika S_{hor} ; čas, da dosežemo ti točki, je neskončen, ravno tako kot za vse ostale točke na S_{hor} . *

Ker se ne moremo izogniti rotacijskemu gibanju delcev v ergosferi, je naravna oblika zapisa metrike na tem območju

$$ds^2 = \left(g_{00} - \frac{g_{03}^2}{g_{33}} \right) dt^2 + g_{11} dr^2 + g_{22} d\theta^2 + g_{33} \left(d\phi + \frac{g_{03}}{g_{33}} dt \right)^2. \quad (104.13)$$

Koeficient člena z dt^2 ,

$$g_{00} - \frac{g_{03}^2}{g_{33}} = \frac{\Delta}{r^2 + a^2 + r_g r a^2 \sin^2 \theta \rho^2},$$

je pozitiven povsod zunaj S_{hor} (in ni enak nič na S_0); diferencial ds je časovne vrste, če je $r = \text{konst}$, $\theta = \text{konst}$ in $d\phi = -(g_{03}/g_{33}) dt$. Količina

$$-\frac{g_{03}}{g_{33}} = \frac{r_g ar}{\rho^2(r^2 + a^2) + r_g r a^2 \sin^2 \theta} \quad (104.14)$$

ima vlogo “posplošene kotne hitrosti vrtenja ergosfere” glede na zunanji opazovalni sistem (smer vrtenja je enaka smeri vrtenja telesa v središču). †

Energija delca, definirana z $-\partial S/\partial \tau$, odvodom akcije po lastnem času delca, sinhroniziranem vzdolž trajektorije, je vedno pozitivna (glej 88). Kot smo pokazali v 88, se med gibanjem delca v polju, ki ni odvisno od časa t , energija $\mathcal{E}_0$, definirana z $-\partial S/\partial t$, ohranja; ta količina je enaka kovariantni komponenti četverca gibalne količine $p_0 = mu_0 = mg_{0i} dx^i$ (kjer je m masa delca). Dejstvo, da spremenljivka t (čas merjen z urami oddaljenih opazovalcev) nima časovnega značaja v notranjosti ergosfere vodi k zanimivemu rezultatu: na tem območju velja $g_{00} < 0$ in količina

$$\mathcal{E}_0 = m(g_{00}u^0 + g_{03}u^3) = m \left(g_{00} \frac{dt}{ds} + g_{03} \frac{d\phi}{ds} \right)$$

je lahko negativna. Ker v zunanjem prostoru, kjer je t čas, energija $\mathcal{E}_0$ ne more biti negativna, delec z $\mathcal{E}_0 < 0$ ne more pasti v ergosfero od zunaj. Takšen delec pa bi lahko nastal ob razpadu

*Čas, v katerem dosežemo določeno točko na S_0 , je lahko tudi neskončen v posebnih primerih, ko sta energija in vrtilna količina delca takšna, da postane radialna hitrost enaka nič v izbrani točki na S_0 .

†Poudariti moramo, da intervali lastnega časa za delce, ki se gibljejo vzdolž roba ergosfere, ne postanejo enaki nič sočasno z g_{00} . To pomeni, da S_0 ni ploskev “neskončnega rdečega premika”; frekvence svetlobnih signalov, ki so poslani z gibajočih se izvirov (izviru tu ne morejo mirovati) in ki jih opazujemo daleč stran, ne težijo proti nič. Spomnimo se, da v središčno simetričnem polju ne more biti mirujočih niti gibajočih se izvirov na Schwarzschildovi krogli (ker na ničelni ploskvi ne moremo imeti časovnih svetovnic). Do “neskončnega rdečega premika” tam pride zato, ker gredo z $r \rightarrow r_g$ proti nič diferenciali lastnega časa $d\tau = \sqrt{g_{00}} dt$ (za izbran dt), merjeni z urami, ki mirujejo glede na opazovalni sistem.

telesa, ki vstopa v ergosfero, na dva dela, pri čemer se eden ujame v orbito z “negativno energijo”. Takšen del ne more več zapustiti ergosfere in s časom pade onkraj obzorja. Drugi del pa se lahko vrne v zunanji prostor; ker je $\mathcal{E}_0$ ohranjena aditivna količina, mora biti energija tega dela večja od energije začetnega telesa, in tako lahko iz vrteče se črne luknje pridobivamo energijo (R. Penrose, 1969).

Pred koncem naj omenimo še to, da čeprav ploskev S_0 ni singularnost prostorsko časovne metrike, je tam singularna čisto prostorska metrika [v opazovalnem sistemu (104.2)]. Zunaj S_0 , kjer ima spremenljivka t časovni značaj, tenzor prostorske metrike izračunamo z (84.7), diferencial prostorske ločne dolžine pa je

$$dl^2 = \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\Delta \sin^2 \theta}{1 - rr_g/\rho^2} d\phi^2. \quad (104.15)$$

V bližini S_0 gredo vzporednice ($\theta = \text{konst}$, $r = \text{konst}$) v neskončnost po pravilu $2\pi a \sin^2 \theta / \sqrt{g_{00}}$. Razlike v urah [glej (88.5)] gredo prav tako prek vseh mej, če so sinhronizirane po tej sklenjeni konturi.

NALOGE

NALOGA 1. Loči spremenljivke v Hamilton-Jacobijevi enačbi za delec, ki se giblje v Kerrovem polju (B. Carter, 1968).

Rešitev: V Hamilton-Jacobijevi enačbi

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2 = 0$$

(m je masa delca, ki je ne smemo zamešati z maso telesa v središču) z g^{ik} iz (104.6) sta čas t in kot ϕ ciklični spremenljivki; ti zato v akciji S nastopata kot $-\mathcal{E}_0 t + L\phi$, kjer je $\mathcal{E}_0$ energija (ki se ohranja), L pa je komponenta vrtilne količine vzdolž simetrijske osi polja. Izkaže se, da lahko ločimo tudi spremenljivki θ in r . Akcijo S zapišemo kot

$$S = -\mathcal{E}_0 t + L\phi + S_r(r) + S_\theta(\theta), \quad (1)$$

in Hamilton-Jacobijevo enačbo poenostavimo na dve navadni diferencialni enačbi (glej *Mehanika*, § 48):

$$\begin{aligned} \left(\frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 + \left(a\mathcal{E}_0 \sin \theta \frac{L}{\sin \theta} \right)^2 + a^2 m^2 \cos^2 \theta &= K, \\ \left(\frac{dS_r}{dr} \right)^2 - \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)\mathcal{E}_0 - aL]^2 + m^2 r^2 &= -K, \end{aligned} \quad (2)$$

kjer je K (ločitveni parameter) nova poljubna konstanta. Funkciji S_θ in S_r nato določimo z integriranjem.

Četverec gibalne količine delca je

$$p^i = m \frac{dx^i}{ds} = g^{ik} p_k = -g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x_k}.$$

Desno stran te enačbe izračunamo z uporabo (1) in (2). Dobimo naslednje enačbe:

$$m \frac{dt}{ds} = -\frac{r_g r a}{\rho^2 \Delta} L + \frac{\mathcal{E}_0}{\Delta} \left(r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2}{\rho^2} \sin^2 \theta \right), \quad (3)$$

$$m \frac{d\phi}{ds} = \frac{L}{\Delta \sin^2 \theta} \left(1 - \frac{r_g r}{\rho^2} \right) + \frac{r_g r a}{\rho^2 \Delta} \mathcal{E}_0, \quad (4)$$

$$m^2 \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 = \frac{1}{\rho^4} [(r^2 + a^2) \mathcal{E}_0 - aL]^2 - \frac{\Delta}{\rho^4} (K + m^2 r^2), \quad (5)$$

$$m^2 \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = \frac{1}{\rho^4} (K - a^2 m^2 \cos^2 \theta) - \frac{1}{\rho^4} \left(a \mathcal{E}_0 \sin \theta - \frac{L}{\sin \theta} \right)^2. \quad (6)$$

Te integrali so prvi integrali gibalnih enačb (enačbe geodetik). Enačbo trajektorije in časovno odvisnost koordinat vzdolž trajektorije lahko dobimo iz (3)-(6) ali pa neposredno iz enačb

$$\partial S / \partial \mathcal{E}_0 = \text{konst}, \quad \partial S / \partial L = \text{konst}, \quad \partial S / \partial K = \text{konst}.$$

V primeru svetlobnih žarkov moramo postaviti $m = 0$ na desnih straneh enačb (3)-(6) in pisati ω_0 namesto $\mathcal{E}_0$ (glej § 101), na levih straneh pa moramo odvode $m d/ds$ z odvodi $d/d\lambda$ po parametru λ , ki se spreminja vzdolž žarka (glej opombo na koncu § 87).

Enačbe (4)-(6) dopuščajo povsem radialno gibanje le vzdolž vrtilne osi telesa, kar je razvidno že iz simetrijskih vzrokov. Podobno ugotovimo, da je gibanje v “ravnini” možno le v ekvatorialni ravnini. V tem primeru lahko postavimo $\theta = \pi/2$, K izrazimo z $\mathcal{E}_0$ in L z uporabo pogoja $d\theta/ds = 0$, in dobimo gibalne enačbe oblike

$$m \frac{dt}{ds} = -\frac{r_g a}{r \Delta} L + \frac{\mathcal{E}_0}{\Delta} \left(r^2 + a^2 + \frac{r_g a^2}{r} \right), \quad (7)$$

$$m \frac{d\phi}{ds} = \frac{M}{\Delta} \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) + \frac{r_g a}{r \Delta} \mathcal{E}_0, \quad (8)$$

$$m^2 \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 = \frac{1}{r^4} [(r^2 + a^2) \mathcal{E}_0 - aL]^2 - \frac{\Delta}{r^4} [(a \mathcal{E}_0 - L)^2 + m^2 r^2]. \quad (9)$$

NALOGA Določi polmer kroga, ki je najbližje središču, in je stabilna orbita delca, ki se giblje v ekvatorialni ravnini v limitnem ($a \rightarrow r_g/2$) Kerrovem polju (R. Ruffini in J. A. Wheeler, 1969).

Rešitev: Postopek je podoben tistemu iz prve naloge v § 102. Vpeljemo “efektivno potencialno energijo” $U(r)$, določeno z

$$[(r^2 + a^2)U(r) - aL]^2 - \Delta[(aU(r) - L)^2 + r^2 m^2] = 0$$

[za $\mathcal{E}_0 = U$ je desna stran enačbe (9) enaka nič]. Polmere stabilnih orbit določimo iz minimumov funkcije $U(r)$: hkrati moramo rešiti enačbi $U(r) = \mathcal{E}_0$, $U'(r) = 0$ ob pogoju $U''(r) > 0$. Orbita, ki je najbližje središču, ustreza rešitvi $U''(r_{\min}) = 0$; za $r < r_{\min}$ funkcija $U(r)$ nima minimuma. Kot rezultat dobimo naslednje vrednosti parametrov gibanja:

- (a) Ko je $L < 0$ (delec se giblje v nasprotni smeri, kot se vrti kolapsar)

$$\frac{r_{\min}}{r_g} = \frac{g}{2}, \quad \frac{\mathcal{E}_0}{m} = \frac{5}{3\sqrt{3}}, \quad \frac{L}{mr_g} = \frac{11}{3\sqrt{3}}.$$

- (b) Ko je L (delec se giblje v isti smeri kot kolapsar), gre polmer $r_{\min}$ proti polmeru obzorja, ko gre $a \rightarrow r_g$. Postavimo $a = (r_g/2)(1 + \delta)$ in za $\delta \rightarrow 0$ dobimo

$$\frac{r_{\text{hor}}}{r_g} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2\delta}), \quad \frac{r_{\text{hor}}}{r_g} = \frac{1}{2}(1 + (4\delta)^{1/3}).$$

Tedaj je

$$\frac{\mathcal{E}_0}{m} = \frac{L}{mr_g} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1 + (4\delta)^{1/3}].$$

Poudariti moramo dejstvo, da je $r_{\min}/r_{\text{hor}}$ ves čas večje od 1, kar pomeni, da orbita nikoli ne gre onkraj obzorja. To je pričakovano: obzorje je ničelna hiperploskev in časovne svetovnice delcev, ki se gibajo, ne morejo ležati na njej.

§105 Gravitacijska polja pri velikih razdaljah od teles

Obravnavali bomo stacionarno gravitacijsko polje pri velikih razdaljah od teles, ki polje ustvarjajo, in določili bomo prve člene v razvoju polja po potencah $1/r$.

Daleč od teles je polje šibko. To pomeni, da je prostorsko časovna metrika skoraj Galilejeva, zato lahko poiščemo opazovalni sistem, v katerem so komponente metričnega tenzorja skoraj enake Galilejevim vrednostim:

$$g_{00}^{(0)} = 1, \quad g_{0\alpha}^{(0)} = 0, \quad g_{\alpha\beta}^{(0)} = -\delta_{\alpha\beta}. \quad (105.1)$$

Tenzor g_{ik} zapišemo v obliki

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}, \quad (105.2)$$

kjer so h_{ik} majhni popravki zaradi gravitacijskega polja.

Pri računanju s tenzorjem h_{ik} se bomo držali dogovora, da indekse dvigujemo in spuščamo z uporabo "nemotene" metrike: $h_i^k = g^{(0)kl} h_{lk}$, itd. Ločiti moramo med h^{ik} in popravki kovariantnih komponent metričnega tenzorja g^{ik} . Slednje določimo z rešitvijo enačbe

$$g_{il} g^{lk} = (g_{il}^{(0)} + h_{il}) g^{lk} = \delta_i^k.$$

Do členov drugega reda dobimo

$$g^{ik} = g^{ik(0)} - h^{ik} + h_i^j h^{jk}. \quad (105.3)$$

Do enake natančnosti je determinanta metričnega tenzorja enaka

$$g = g^{(0)} \left(1 + h + \frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{2} h_k^i h_i^k \right), \quad (105.4)$$

kjer je $h \equiv h_i^i$.

Takoj moramo poudariti, da zahteva, da je h_{ik} majhen, nikakor ne določi opazovalnega sistema enolično. Če je ta pogoj zadoščen v nekem sistemu, potem bo zadoščen tudi po poljubni transformaciji $x'^i = x^i + \xi^i$, kjer so ξ^i majhne količine. Po enačbi (94.3) se pri tem tenzor h_{ik} spremeni:

$$h'_{ik} = h_{ik} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x^i}, \quad (105.5)$$

kjer je $\xi^i = g_{ik}^{(0)} \xi^k$ [ker je $g_{ik}^{(0)}$ konstanten, se v tem primeru kovariantni odvodi iz (94.3) poenostavijo v navadne odvode].

V prvem približku, torej do členov reda $1/r$, dobimo majhne popravke k Galilejevim vrednostim z ustreznimi členi v razvoju središčno simetrične Schwarzschildove metrike. Zaradi zgoraj opisane nedoločenosti v izbiri opazovalnega sistema (ki je Galilejev v neskončnosti), je dejanska oblika komponent h_{ik} odvisna od definicije radialne koordinate r . Če Schwarzschildovo metriko zapišemo v obliki (100.14), so prvi členi v razvoju za velike r podani z izrazom (100.18). Krogelne prostorske koordinate spremenimo v kartezične (pri tem pišemo $dr = n_\alpha dx^\alpha$, kjer je $\mathbf{n}$ enotski vektor v smeri $\mathbf{r}$) in dobimo naslednje vrednosti:

$$h_{00}^{(1)} = -\frac{r_g}{r}, \quad h_{\alpha\beta}^{(1)} = -\frac{r_g}{r} n_\alpha n_\beta, \quad h_{0\alpha}^{(1)} = 0, \quad (105.6)$$

kjer je $r_g = 2km/c^2$.

Členi drugega reda, ki so sorazmerni z $1/r^2$, so dveh vrst. Nekateri členi so rezultat nelinearnosti Einsteinovih enačb, ki delujejo na člene prvega reda. Ker so slednji odvisni le od mase (in od nobenih drugih lastnosti telesa), bodo ti členi drugega reda odvisni le od mase. Očitno jih zato lahko dobimo iz razvoja Schwarzschildove metrike. Tako dobimo

$$h_{00}^{(2)} = 0, \quad h_{\alpha\beta}^{(2)} = - \left(\frac{rg}{r} \right)^2 n_\alpha n_\beta. \quad (105.7)$$

Ostale člene drugega reda dobimo kot ustrezne rešitve lineariziranih enačb polja. Enačbe bomo linearizirali na bolj splošen način, kot bi tu potrebovali, saj bomo dobljene enačbe potrebovali tudi kasneje; zato na začetku ne bomo upoštevali, da je polje stacionarno.

Pri majhnih h_{ik} so majhne tudi količine Γ_{kl}^i , saj so to odvodi komponent h_{ik} . Zanemarimo potence višje od prve in v izrazu za krivinski tenzor (92.1) obdržimo samo člene med prvima oklepajema:

$$R_{iklm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m} \right). \quad (105.8)$$

Za Riccijev tenzor pri isti natančnosti velja

$$R_{ik} = g^{lm} R_{limk} \approx g^{lm(0)} R_{limk},$$

ali

$$R_{ik} = \frac{1}{2} \left(-g^{(lm)0} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m} + \frac{\partial^2 h_{ik}^l}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_{ik}^l}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^i \partial x^k} \right). \quad (105.9)$$

Izraz (105.9) lahko poenostavimo, pri čemer si pomagamo s poljubnostjo izbire opazovalnega sistema. Za količine h_{ik} lahko zahtevamo štiri dodatne pogoje (štiri je število poljubnih funkcij ξ^i):

$$\frac{\partial \psi_i^k}{\partial x^k} = 0, \quad \psi_i^k = h_i^k - \delta_i^k h. \quad (105.10)$$

Zadnji trije členi v (105.9) se okrajšajo, preostane le

$$R_{ik} = -\frac{1}{2} g^{lm(0)} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m}. \quad (105.11)$$

V stacionarnem primeru, ki nas tu zanima, komponente h_{ik} niso odvisne od časa in izraz (105.11) se poenostavi na $R_{ik} = \frac{1}{2} \Delta h_{ik}$, kjer je Δ Laplaceov operator v treh prostorskih koordinatah. Einsteinove enačbe v vakuumu se zato poenostavijo na Laplaceovo enačbo

$$\Delta h^{ik} = 0 \quad (105.12)$$

z dodatnimi pogoji (105.10), ki se zapišejo kot

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} (h_\alpha^\beta - \frac{1}{2} h \delta_\alpha^\beta) = 0, \quad (105.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} h_0^\beta = 0. \quad (105.14)$$

Omeniti moramo, da ti pogoji še vedno ne določijo opazovalnega sistema enolično. Hitro lahko preverimo, da če h_{ik} izpolni enačbe (105.13) in (105.14), potem bodo pogoji izpolnjeni tudi za h_{ik} iz (105.5), če so le ξ^i takšni, da velja

$$\Delta \xi^i = 0. \quad (105.15)$$

Komponento h_{00} dobimo kot skalarno rešitev tridimenzionalnega Laplaceovega operatorja. Vemo, da ima ustrezna rešitev, sorazmerna z $1/r^2$, obliko $\mathbf{a} \cdot \nabla(1/r)$, kjer je $\mathbf{a}$ konstanten vektor. Tovrstni člen v h_{00} pa lahko vedno izločimo s preprostim premikom izhodišča koordinatnega sistema v členu prvega reda po $1/r$. Prisotnost takšnega člena zato pomeni le, da smo si koordinatni sistem slabo izbrali, torej ta člen ni zanimiv.

Komponente $h_{0\alpha}$ dobimo kot vektorsko rešitev Laplaceve enačbe, in so zato oblike

$$h_{0\alpha} = \lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{1}{r}, \quad (105.16)$$

kjer je $\lambda_{\alpha\beta}$ konstanten tenzor. Pogoj (105.14) se glasi

$$\lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{1}{r} = 0, \quad (105.17)$$

od koder sledi, da je $\lambda_{\alpha\beta}$ oblike $a_{\alpha\beta} + \lambda \delta_{\alpha\beta}$, kjer je $a_{\alpha\beta}$ antisimetrični tenzor. Rešitev oblike $\lambda \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{1}{r}$ lahko izločimo s transformacijo (105.5) z $\xi^0 = \lambda/r$, $\xi^\alpha = 0$ [ta ustreza pogoju (105.15)]. Zato je edina rešitev, ki ima pravi pomen,

$$h_{0\alpha} = a_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{1}{r}. \quad (105.18)$$

Končno lahko na podoben, a bolj kompliciran način pokažemo, da lahko s primerno transformacijo prostorskih koordinat vedno izločimo količine $h_{\alpha\beta}$, ki jih dobimo kot tenzorsko rešitev (simetrično v indeksih α in β) Laplaceve enačbe.

Tenzor $a_{\alpha\beta}$ je povezan s tenzorjem celotne vrtilne količine $M_{\alpha\beta}$, končni izraz za $h_{0\alpha}$ pa je

$$h_{0\alpha}^{(2)} = \frac{2k}{c^3} M_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{1}{r} = -\frac{2k}{c^3} M_{\alpha\beta} \frac{n_\beta}{r^2}. \quad (105.19)$$

To bomo dokazali, če izračunamo integral (96.17).

Vrtilna količina $M_{\alpha\beta}$ je povezana le z $h_{0\alpha}$, zato lahko pri računanju predpostavimo, da so ostale komponente h_{ik} enake nič. Do členov drugega reda po $h_{0\alpha}$, iz (96.2) in (96.3) sledi (tu upoštevamo, da je $g^{\alpha 0} = -h^{\alpha 0} = h_{\alpha 0}$, medtem ko se $-g$ od ena razlikuje le za člene drugega reda):

$$h^{\alpha 0\beta} = \frac{c^4}{16\pi k} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} (g^{\alpha 0} g^{\beta\gamma} - g^{\gamma 0} g^{\alpha\beta}) = -\frac{c^4}{16\pi k} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} (h_{\alpha 0} \delta_{\beta\gamma} - h_{\gamma 0} \delta_{\alpha\beta}).$$

Ko vstavimo (105.19), se drugi člen pod znakom za odvajanje okrajša, prvi pa nam da

$$h^{\alpha 0\beta} = -\frac{c}{8\pi} M_{\alpha\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{1}{r} = -\frac{c}{8\pi} M_{\alpha\gamma} \frac{3n_\beta n_\gamma - \delta_{\beta\gamma}}{r^2}.$$

S tem izrazom izračunamo integral (96.16) po površini krogle s polmerom r ($df_\gamma = n_\gamma r^2 d\Omega$):

$$\frac{1}{c} \int (x^\alpha h^{\beta 0\gamma} - x^\beta h^{\alpha 0\gamma}) df_\gamma = -\frac{1}{4\pi} \int (n_\alpha n_\gamma M_{\beta\gamma} - n_\beta n_\gamma M_{\alpha\gamma}) d\Omega = -\frac{1}{3} (\delta_{\alpha\gamma} M_{\beta\gamma} - \delta_{\beta\gamma} M_{\alpha\gamma}) = \frac{2}{3} M_{\alpha\beta}.$$

S podobnim izračunom dobimo

$$\frac{1}{c} \int \gamma^{\alpha 0\beta 0} df_\gamma = -\frac{c^3}{16\pi k} \int (h_{\alpha 0} df_\beta - h_{\beta 0} df_\alpha) = \frac{1}{3} M_{\alpha\beta}.$$

Obe količini seštejemo in dobimo iskano vrednost $M_{\alpha\beta}$.

Poudariti moramo, da je v splošnem, ko polje v bližini telesa morda ni šibko, $M_{\alpha\beta}$ skupna vrtilna količina telesa in njegovega gravitacijskega polja. Samo kadar je polje šibko pri vseh razdaljah, lahko njegov prispevek k vrtilni količini zanemarimo.

Enačbe (105.6), (105.7) in (105.19) so rešitev naše naloge do členov reda $1/r^2$. Kovariantne komponente metričnega tenzorja so

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}^{(1)} + h_{ik}^{(2)}. \quad (105.20)$$

Iz (105.3) dobimo še kontravariantne komponente (do istega reda natančnosti):

$$g^{ik} = g^{ik(0)} - h^{ik(1)} - h^{ik(2)} + h_l^{i(1)} h^{lk(1)}. \quad (105.21)$$

Enačbo (105.19) lahko zapišemo tudi v vektorski obliki kot

$$\mathbf{g} = \frac{2k}{c^3 r^2} \mathbf{n} \times \mathbf{M}, \quad (105.22)$$

kjer je $\mathbf{M}$ vektor skupne vrtilne količine telesa. V prvi nalogi v razdelku 88 smo pokazali, da v stacionarnem gravitacijskem polju deluje na telo "Coriolisova sila", ki je takšna, kot bi delovala na telo v vrtečem se opazovalnem sistemu s kotno hitrostjo

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{c}{2} \sqrt{g_{00}} \nabla \times \mathbf{g}.$$

Zato lahko rečemo, da v polju vrtečega se telesa deluje Coriolisova sila na oddaljen delec z močjo, ki ustreza kotni hitrosti

$$\boldsymbol{\Omega} \approx \frac{c}{2} \nabla \times \mathbf{g} = \frac{k}{c^2 r^3} [\mathbf{M} - 3\mathbf{n}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})]. \quad (105.23)$$

Na koncu bomo z izrazom (105.6) izračunali še celotno energijo gravitirajočega telesa z uporabo integrala (96.16). Ustrezne komponente tenzorja h^{ikl} izračunamo z (96.2) in (96.3), in do členov reda $1/r^2$ dobimo

$$\begin{aligned} h^{\alpha 0\beta} &= 0, \\ h^{00\alpha} &= \frac{c^4}{16\pi k} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (g^{00} g^{\alpha\beta}) = \frac{mc^2}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(-\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r} + \frac{x^\alpha x^\beta}{r^3} \right) = \frac{mc^2}{4\pi} n^\alpha r^2. \end{aligned}$$

V (96.16) integriramo po krogli s polmerom r in končno dobimo

$$P^\alpha = 0, \quad P^0 = mc, \quad (105.24)$$

kar je pričakovani rezultat. Rezultat izraža ekvivalentnost "gravitacijske" in "inerijske" mase ("gravitacijska" masa je tista masa, ki določa gravitacijsko polje, ki ga proizvaja telo, torej tista, ki se pojavlja v metričnem tenzorju v gravitacijskem polju ali pa v Newtonovem zakonu; "inerijska" masa je masa, ki določa razmerje med energijo in gibalno količino telesa; poseben primer je mirovna energija telesa, ki je enaka tej masi, pomnoženi z c^2).

V primeru konstantnega gravitacijskega polja je možno izpeljati preprost izraz za celotno energijo telesa in polja v obliki integrala, izračunanega po prostoru, kjer se nahaja snov. Začnemo z naslednjim izrazom, ki velja, kadar so vse količine neodvisne od x^0 :

$$R_0^0 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{-g} g^{i0} \Gamma_{0i}^\alpha). \quad (105.25)$$

Količino $R_0^0 \sqrt{-g}$ integriramo po (tridimenzionalnem) prostoru in uporabimo Gaussovo pravilo. Dobimo

$$\int R_0^0 \sqrt{-g} dV = \oint \sqrt{-g} g^{i0} \Gamma_{0i}^\alpha df_\alpha.$$

Z uporabo dovolj oddaljene ploskve pri integriranju in izrazom (105.6) za g_{ik} dobimo po preprostih izračunih

$$\int R_0^0 \sqrt{-g} dV = \frac{4\pi k}{c^2} m = \frac{4\pi k}{c^3} P^0.$$

Opazimo tudi, da je ena izmed enačb polja

$$R_0^0 = \frac{8\pi k}{c^3} (T_0^0 - \frac{1}{2} T) = \frac{4\pi k}{c^4} (T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3), \quad (105.26)$$

in dobimo iskano enačbo

$$P^0 = mc = \frac{1}{c} \int (T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3) \sqrt{-g} dV. \quad (105.27)$$

Tako lahko izrazimo celotno energijo snovi in konstantnega gravitacijskega polja (torej celotno maso telesa) z napetostnim tenzorjem snovi same (R. Tolman, 1930). Spomnimo se lahko, da smo v primeru središčno simetričnega polja že zapisali podoben izraz za to količino – izraz (100.24).

§106 Enačbe gibanje sistema teles v drugem približku

Kot bomo videli kasneje (110), sistem teles, ki se gibljejo, seva gravitacijske valove in zato izgublja energijo. Te izgube se v enačbah pojavijo šele pri petem približku po $1/c$. V prvih štirih redih približka je energija sistema konstantna. To pomeni, da lahko sistem gravitirajočih teles opišemo z Lagrangeovo funkcijo, ki bo pravilna do členov reda $1/c^4$ v odsotnosti elektromagnetnega polja, za katerega v splošnem obstaja le Lagrangeva funkcija do drugega reda (65). Tu bomo izpeljali Lagrangeovo funkcijo za sistem teles do členov drugega reda. Dobili bomo torej gibalne enačbe sistema v naslednjem približku po Newtonovem.

Zanemarili bomo dimenzije in notranjo sestavo teles; smatrali jih bomo kot "točkasta". Z drugimi besedami, omejili se bomo na ničelni približek pri razvoju po potencah razmerja med velikostjo a teles in njihovimi medsebojnimi razdaljami l .

Reševanje zadane naloge bomo začeli z določanjem (v istem približku) šibkega gravitacijskega polja, ki ga ustvarjajo telesa, na razdaljah, ki so velike v primerjavi z njihovimi dimenzijami, vendar hkrati majhne v primerjavi z valovno dolžino gravitacijskih valov, ki jih sevajo telesa ($a \ll r \ll \lambda \sim lc/v$).

Do členov reda $1/c^2$ je polje daleč od teles podano z izrazom, ki smo ga izpeljali v prejšnjem razdelku, in ki je bil tam označen z $h_{ik}^{(1)}$; tukaj bomo te izraze uporabili v obliki (105.6). V 105 smo na tihem privzeli, da polje proizvaja eno samo telo, ki se nahaja v koordinatnem izhodišču. Ker je polje $h_{ik}^{(1)}$ rešitev lineariziranih Einsteinovih enačb, velja zanj načelo superpozicije. Zato dobimo polje daleč od sistema telesa tako, da preprosto seštejemo polja vsakega izmed teles; polje zapišemo v obliki

$$h_\alpha^\beta = -\frac{2}{c^2} \phi \delta_\alpha^\beta, \quad (106.1)$$

$$h_0^\alpha = 0, \quad h_0^0 = \frac{2}{c^2} \phi, \quad (106.2)$$

kjer je

$$\phi(\mathbf{r}) = -k \sum \frac{m_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}$$

Newtonov gravitacijski potencial sistema točkastih delcev ($\mathbf{r}_a$ je krajevni vektor telesa z maso m_a). Izraz za razmik z metričnim tenzorjem (106.1)-(106.2) je

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2}{c^2}\phi\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2}{c^2}\phi\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (106.3)$$

Opazimo, da se členi prvega reda, ki vsebujejo ϕ , pojavljajo ne le v g_{00} , temveč tudi v $g_{\alpha\beta}$; že v 87 smo povedali, da v gibalni enačbi za delec popravki v $g_{\alpha\beta}$ vodijo h količinam, ki so višjega reda kot členi, ki izvirajo iz g_{00} ; zaradi tega lahko s pomočjo primerjave z Newtonovimi gibalnimi enačbami določimo le g_{00} .

Kot bomo ugotovili v nadaljevanju, lahko iskane gibalne enačbe dobimo, če poznamo prostorske komponente $h_{\alpha\beta}$ do natančnosti ($\sim 1/c^2$), s katero so te podane v (106.1); mešane komponente (ki jih ni v $1/c^2$ približku) so potrebne do členov reda $1/c^3$, časovna komponenta h_{00} pa do členov reda $1/c^4$. Te člene bomo določili tako, da se bomo ponovno vrnili k splošnim enačbam za gravitacijsko polje in si ogledali člene ustreznega reda v teh enačbah.

Ker smo zanemarili dejstvo, da so telesa makroskopska, moramo napetostni tenzor snovi zapisati v obliki (33.4), (33.5). V krivočrtnih koordinatah ta izraz zapišemo kot

$$T^{ik} = \sum_a \frac{m_a c}{\sqrt{-g}} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{dt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \quad (106.4)$$

[faktor $1/\sqrt{-g}$ se pojavi iz podobnega razloga, kot v enačbi (90.4)]; seštevamo po vseh telesih, ki tvorijo sistem.

Komponenta

$$T_{00} = \sum_a \frac{m_a c^3}{\sqrt{-g}} g_{00}^2 \frac{dt}{ds} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$$

je v prvem približku (za Galilejev g_{ik}) enaka $\sum_a m_a c^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$; v naslednjem približku vstavimo g_{ik} iz (106.3) in po preprostem izračunu dobimo:

$$T_{00} = \sum_a m_a c^2 \left(1 + \frac{5\phi_a}{c^2} + \frac{v_a^2}{2c^2}\right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad (106.5)$$

kjer je $\mathbf{v}$ običajna tridimenzionalna hitrost ($v^\alpha = dx^\alpha/dt$), ϕ_a pa je potencial polja v točki $\mathbf{r}_a$. (Zaenkrat naj nas ne moti dejstvo, da ϕ_a vsebuje neskončno velik del – potencial lastnega polja delca m_a ; o tem bomo več spregovorili v nadaljevanju.)

Pri komponentah napetostnega tenzorja $T_{\alpha\beta}$ in $T_{0\alpha}$ v tem približku zadostuje, če obdržimo le prve člene v razvoju izraza (106.4):

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= \sum_a m_a v_{a\alpha} v_{a\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \\ T_{0\alpha} &= - \sum_a m_a c v_{a\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a). \end{aligned} \quad (106.6)$$

V naslednjem koraku moramo izračunati komponente tenzorja R_{ik} . To storimo z uporabo enačbe $R_{ik} = g^{lm} R_{limk}$, kjer je R_{limk} podan z izrazom (92.1). Pri tem moramo imeti v

mislih, da količine $h_{\alpha\beta}$ in h_{00} ne vsebujejo členov reda nižjega od $1/c^2$, $h_{0\alpha}$ pa nima členov reda nižjega od $1/c^3$; odvajanje po $x^0 = ct$ poveča red količin za eno enoto.

Najpomembnejši členi v R_{00} so reda $1/c^2$; poleg teh členov moramo obdržati še tiste iz razvoja, ki so naslednjega višjega reda $1/c^4$. Preprost izračun nas pripelje do

$$R_{00} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial h_0^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2c} \frac{\partial h_\alpha^\alpha}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \Delta h_{00} + \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\alpha} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\beta} \left(2 \frac{\partial h_\beta^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial h_\alpha^\alpha}{\partial x^\beta} \right).$$

Pri teh izračunih še nismo uporabili nobenega dodatnega pogoja za količine h_{ik} . To svobodo izkoristimo in zahtevamo

$$\frac{\partial h_0^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2c} \frac{\partial h_\alpha^\alpha}{\partial t} = 0, \quad (106.7)$$

zaradi česar bodo iz izraza za R_{00} odpadle vse komponente $h_{0\alpha}$. V preostalih členih vstavimo

$$h_\alpha^\beta = -\frac{2}{c^2} \phi \delta_\alpha^\beta, \quad h_{00} = \frac{2}{c^2} \phi + O\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

in do zelene natančnosti dobimo

$$R_{00} = \frac{1}{2} \Delta h_{00} + \frac{2}{c^4} \phi \Delta \phi - \frac{2}{c^4} (\nabla \phi)^2, \quad (106.8)$$

kjer smo se preselili v tridimenzionalen zapis. Pri računanju komponent $R_{0\alpha}$ zadostuje, če ohranimo le člene prvega reda, ki da od nič različen prispevek $-1/c^3$. Podobno kot zgoraj dobimo

$$R_{0\alpha} = \frac{1}{2c} \frac{\partial^2 h_\alpha^\beta}{\partial t \partial x^\beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_0^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \frac{1}{2c} \frac{\partial^2 h_\beta^\beta}{\partial t \partial x^\alpha} + \frac{1}{2} \Delta h_{0\alpha}$$

oziroma, upoštevajoč pogoj (106.7):

$$R_{0\alpha} = \frac{1}{2} \Delta h_{0\alpha} + \frac{1}{2c^3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x^\alpha}. \quad (106.9)$$

Z uporabo izrazov (106.5)-(106.9) sedaj zapišimo Einsteinove enačbe

$$R_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4} \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right). \quad (106.10)$$

Časovna komponenta enačbe (106.10) nam da

$$\Delta h_{00} + \frac{4}{c^4} \phi \Delta \phi - \frac{4}{c^4} (\nabla \phi)^2 = \frac{8\pi k}{c^4} \sum_a m_a c^2 \left(1 + \frac{5\phi_a}{c^2} + \frac{3v_a^2}{2c^2} \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a);$$

z uporabo identitete

$$4(\nabla \phi)^2 = 2\Delta(\phi^2) - 4\phi \Delta \phi$$

in enačbe za Newtonov potencial

$$\Delta \phi = 4\pi k \sum_a m_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad (106.11)$$

to enačbo zapišemo v obliki

$$\Delta \left(h_{00} - \frac{2}{c^4} \phi^2 \right) = \frac{8\pi k}{c^2} \sum_a m_a \left(1 + \frac{\phi'_a}{c^2} + \frac{3v_a^2}{2c^2} \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a). \quad (106.12)$$

Po opravljenih izračunih smo na desni strani (106.12) nadomestili ϕ_a z

$$\phi'_a = -k \sum_b' \frac{m_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|},$$

torej s potencialom (v točki $\mathbf{r}_a$) polja, ki ga povzročajo vsa telesa razen telesa m_a . Neskončni lastni potencial (angl. *self-potential*) teles v naši metodi, kjer telesa smatramo kot točkasta, smo odpravili; s tem smo "renormalizirali" mase teles, zaradi česar so te enake svojim praviim vrednostim, v katerih je upoštevan tudi prispevek polja, ki ga ustvarjajo telesa sama.

Enačbo (106.12) lahko hitro rešimo z uporabo znane enačbe (36.9)

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}).$$

Dobimo

$$h_{00} = \frac{2\phi}{c^2} + \frac{2\phi^2}{c^4} - \frac{2k}{c^4} \sum_a \frac{m_a \phi'_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} - \frac{3k}{c^4} \sum_a \frac{m_a v_a^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}. \quad (106.13)$$

Mešane komponente enačbe (106.10) dajo

$$\Delta h_{0\alpha} = -\frac{16\pi k}{c^3} \sum_a m_a v_{a\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) - \frac{1}{c^3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x^\alpha}. \quad (106.14)$$

Rešitev te linearne enačbe je

$$h_{0\alpha} = \frac{4k}{c^3} \sum_a \frac{m_a v_{a\alpha}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} - \frac{1}{c^3} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^\alpha},$$

kjer je f rešitev pomožne enačbe

$$\Delta f = \phi = - \sum \frac{k m_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}.$$

Z uporabo zveze $\Delta r = 2/r$ dobimo

$$f = -\frac{k}{2} \sum_a m_a |\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|,$$

in po preprostem izračuni sledi končni rezultat:

$$h_{0\alpha} = \frac{k}{2c^3} \sum_a \frac{m_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} [7v_{a\alpha} + (\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n}_a) n_{a\alpha}], \quad (106.15)$$

kjer je $\mathbf{n}_a$ enotski vektor v smeri vektorja $\mathbf{r} - \mathbf{r}_a$.

Izrazi (106.1), (106.13) in (106.15) zadostujejo, da izračunamo Lagrangevo funkcijo do členov drugega reda.

Lagrangeva funkcija za eno samo telo v gravitacijskem polju, ki ga proizvajajo druga telesa in ki ga smatramo kot vnaprej podanega, je

$$L_a = -m_a c \frac{ds}{dt} = -m_a c^2 \left(1 + h_{00} + 2h_{0\alpha} \frac{v_a^\alpha}{c} - \frac{v_a^2}{c^2} + h_{\alpha\beta} \frac{v_a^\alpha v_a^\beta}{c^2} \right)^{1/2}.$$

Kvadratni koren razvijemo in zavržemo nepomembno konstanto $-m_a c^2$. Dobljen izraz do zahtevane natančnosti zapišemo v novi obliki:

$$L_a = \frac{m_a v_a^2}{2} + \frac{m_a v_a^4}{8c^2} - m_a c^2 \left(\frac{h_{00}}{2} + h_{0\alpha} \frac{v_a^\alpha}{c} + \frac{1}{2c^2} h_{\alpha\beta} v_a^\alpha v_a^\beta - \frac{h_{00}^2}{8} + \frac{h_{00}}{4c^2} v_a^2 \right). \quad (106.16)$$

enačbi moramo upoštevati vrednosti h_{ik} v točki $\mathbf{r}_a$; ponovno moramo zavreči člene, ki postanejo neskončni, kar je enakovredno “renormalizaciji” mase m_a , ki se pojavlja kot koeficient v L_a .

Nadaljnji potek izračunov je kot sledi. Celotna Lagrangeva funkcija sistema seveda ni enaka vsoti Lagrangevih funkcij L_a za posamezna telesa, temveč mora biti sestavljena tako, da vodi k pravim vrednostim sil $\mathbf{f}_a$, ki delujejo na vsako izmed teles pri danem gibanju preostalih teles. Sile $\mathbf{f}_a$ izračunamo z odvajanjem Lagrangeve funkcije L_a :

$$\mathbf{f}_a = \left(\frac{\partial L_a}{\partial \mathbf{r}} \right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_a}$$

(tu moramo odvajati po tekoči koordinati $\mathbf{r}$ “točke polja” v izrazih za h_{ik}). Sedaj ni težko sestaviti takšno Lagrangevo funkcijo L , iz katere bomo dobili sile $\mathbf{f}_a$ iz parcialnih odvodov $\partial L / \partial \mathbf{r}_a$.

Preproste vmesne izračune bomo izpustili, raje bomo kar takoj navedli končni rezultat za Lagrangevo funkcijo:

$$\begin{aligned} L = & \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} \left(1 + 3 \sum_b' \frac{k m_b}{c^2 r_{ab}} \right) + \sum_a \frac{m_a v_a^4}{8c^2} + \sum_a \sum_b' \frac{k m_a m_b}{2 r_{ab}} - \\ & - \sum_a \sum_b' \frac{k m_a m_b}{4c^2 r_{ab}} [7 \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}_b + (\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n}_{ab})(\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_{ab})] - \sum_a \sum_b' \sum_c' \frac{k^2 m_a m_b m_c}{2c^2 r_{ab} r_{ac}}, \end{aligned} \quad (106.17)$$

kjer je $r_{ab} = |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|$, $\mathbf{n}_{ab}$ pa je enotski vektor v smeri $\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$, s črtico ob znaku za seštevanje pa zahtevamo, da so izpuščeni členi z $b = a$ ali $c = a$.

Poglavje 13

Gravitacijski valovi

§107 Šibki gravitacijski valovi

Podobno kot v elektrodinamiki tudi v relativistični teoriji gravitacije končna hitrost širjenja interakcije omogoča obstoj prostih gravitacijskih polj, ki niso vezana na telesa – to so gravitacijski valovi.

Oglejmo si šibko gravitacijsko polje v vakuumu. Kot v 105 vpeljemo tenzor h_{ik} , ki opisuje šibko motnjo Galilejeve metrike:

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}. \quad (107.1)$$

Do členov prvega reda po h_{ik} je kontravariantni metrični tenzor enak

$$g^{ik} = g^{ik(0)} - h^{ik}, \quad (107.2)$$

determinanta tenzorja g_{ik} pa je

$$g = g^{(0)}(1 + h), \quad (107.3)$$

kjer je $h \equiv h^i_i$; vse operacije dvigovanja in spuščanja indeksov tenzorja opravimo z nemoteno metriko $g^{(0)}$.

Kot smo pokazali v 105, pogoj, da je h_{ik} majhen, še vedno dopušča poljubno transformacijo opazovalnega sistema oblike $x'^i = x^i + \xi^i$, pri čemer je ξ^i majhen; po transformaciji je

$$h'_{ik} = h_{ik} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x^i}. \quad (107.4)$$

Uporabimo to možnost poljubne umeritve tenzorja h_{ik} in zahtevajmo dodatni pogoj

$$\frac{\partial \psi_i^k}{\partial x^k} = 0, \quad \psi_i^k = h_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k h, \quad (107.5)$$

zaradi katerega dobi Riccijev tenzor preprosto obliko (105.11):

$$R_{ik} = \frac{1}{2} \square h_{ik}, \quad (107.6)$$

kjer smo z $\square$ označili d'Alembertov operator

$$\square = -g^{lm(0)} \partial^2 / \partial x^l \partial x^m = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

S pogojem (107.5) še vedno nismo povsem določili opazovalnega sistema; če nek h_{ik} zadosti pogoju, potem mu bo zadostil tudi h'_{ik} iz (107.4), če so le ξ^i rešitev enačb

$$\square \xi^i = 0. \quad (107.7)$$

Enačbo (107.6) izenačimo z nič in tako dobimo enačbe gravitacijskega polja v vakuumu oblike

$$\square h_i^k = 0. \quad (107.8)$$

To je običajna valovna enačba. Gravitacijska polja se v vakuumu širijo s svetlobno hitrostjo, tako kot elektromagnetna polja.

Oglejmo si raven gravitacijski val. V takšnem valu se polje spreminja v eni sami smeri v prostoru; naj bo ta smer so $x^1 = x$. Enačba (107.8) postane

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) h_i^k = 0, \quad (107.9)$$

rešitev pa je poljubna funkcija z argumentom $t \pm x/c$ (47).

Oglejmo si val, ki se širi v pozitivni smeri vzdolž osi x . V tem primeru so vse količine h_i^k funkcije argumenta $t - x/c$. Dodatni pogoj (107.5) so sedaj glasi $\dot{\psi}_i^1 - \dot{\psi}_i^0 = 0$, kjer smo s piko označili odvajanje po t . Enačbo lahko integriramo preprosto tako, da kar odvržemo znak za odvajanje – integracijsko konstanto lahko postavimo na nič, saj nas zanima le spremenljivi prispevek k polju (podobno kot v primeru elektromagnetnega valovanja). Med preostalimi komponentami ψ_i^k veljajo zveze

$$\psi_1^1 = \psi_1^0, \quad \psi_2^1 = \psi_2^0, \quad \psi_3^1 = \psi_3^0, \quad \psi_0^1 = \psi_0^0. \quad (107.10)$$

Kot smo že omenili, pogoj (107.5) opazovalnega sistema še ne določi enolično. Še vedno je dovoljena transformacija koordinat oblike $x'^i = x^i + \xi^i(t - x/c)$. S takšnimi transformacijami lahko izničimo štiri količine: $\psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0$ in $\psi_2^2 + \psi_3^3$; iz enačb (107.10) tedaj sledi, da so enake nič tudi komponente $\psi_1^1, \psi_2^1, \psi_3^1$ in ψ_0^0 . Preostale količine ψ_2^3 in $\psi_2^2 - \psi_3^3$ ne moremo postaviti na nič z nobeno izbiro opazovalnega sistema, ker se te komponente ne spremenijo ob transformaciji $\xi_i = \xi_i(t - x/c)$ (kar je razvidno iz (107.4)). Opazimo, da je $\psi = \psi_i^i$ enak nič, zato je $\psi_i^k = h_i^k$.

Raven gravitacijski val je torej določen z dvema količinama, h_{23} in $h_{22} - h_{33}$. Drugače povedano, gravitacijski valovi so prečni valovi, katerih polarizacija je določena s simetričnim tenzorjem drugega ranga v ravnini yz , katerega vsota diagonalnih elementov, $h_{22} + h_{33}$, je enaka nič.

Obstajata dve neodvisni polarizaciji, pri katerih je ena izmed količin h_{23} ali $\frac{1}{2}(h_{22} - h_{33})$ različna od nič. Ti polarizaciji se ločita ena od druge za vrtež za $\pi/4$ v ravnini yz .

Izračunajmo napetostni psevdotenzor ravnega gravitacijskega vala. Komponente t^{ik} so količine drugega reda; izračunali jih bomo tako, da bomo zanemarili člene še višjih redov. Ker se zaradi $h = 0$ determinanta g razlikuje od $g^{(0)} = -1$ le v členih drugega reda, lahko v splošni enačbi (96.9) pišemo $\mathcal{G}_{,l}^{ik} \approx g_{,l}^{ik} = -h_{,l}^{ik}$. V primeru ravnega vala so vsi ostali od nič različni členi v t^{ik} vsebovani v členu

$$\frac{1}{2} g^{il} g^{km} g_{np} g_{qr} g_{,l}^{nr} g_{,m}^{pq} = \frac{1}{2} h_q^{n,i} h_n^{q,k}$$

v zavitih oklepajih enačbe (96.9) (kar lahko hitro pokažemo, če postavimo eno izmed osi Galilejevega opazovalnega sistema v smeri širjenja valovanja). Zato je

$$t^{ik} = \frac{c^4}{32\pi k} h_q^{n,i} h_n^{q,k}. \quad (107.11)$$

Pretok energije v valu je podan z $-cgt^{0\alpha} \approx ct^{0\alpha}$. Pri ravnem valovanju, ki potuje v smeri osi x^1 in pri katerem sta od nič različni količini h_{23} in $h_{22} = -h_{33}$ odvisni le od razlike $t - c/x$, tudi pretok energije poteka v smeri osi x^1 in je enak

$$ct^{01} = \frac{c^3}{16\pi k} \left[h_{23}^2 + \frac{1}{4}(h_{22} - h_{33})^2 \right]. \quad (107.12)$$

Kot začetni pogoj za poljubno polje gravitacijskega vala moramo izbrati štiri poljubne funkcije koordinat: ker je polje prečno, obstajata le dve neodvisni komponenti $h_{\alpha\beta}$, poleg tega pa moramo izbrati tudi njuna začetna časovna odvoda. Čeprav smo do števila štiri prišli ob predpostavki šibkega gravitacijskega polja, ta rezultat ni povezan s predpostavko samo, zato mora veljati za katerokoli prosto gravitacijsko polje, torej za poljubno polje, ki ni povezano z gravitirajočimi masami.

§108 Gravitacijski valovi v ukrivljenem četvernem prostoru

Podobno kot smo širjenje gravitacijskih valov obravnavali “na ozadju” ravnega četvernega prostora, lahko preučimo tudi majhne motnje poljubne (negalilejeve) “nemotene” metrike $g_{ik}^{(0)}$. Zaradi poznejše uporabe bomo potrebne enačbe zapisali v bolj splošni obliki.

Naj bo g_{ik} ponovno oblike (107.1). Poiskati moramo popravek prvega reda Christoffelovih simbolov, izražen s količinami h_{ik} :

$$\Gamma_{kl}^{i(1)} = \frac{1}{2}(h_{k;l}^i + h_{l;k}^i - h_{kl}^{;i}), \quad (108.1)$$

kar lahko preverimo z neposrednim izračunom (tako tukaj, kot tudi v nadaljevanju, izvajamo operacije dvigovanja in spuščanja indeksov ter kovariantno odvajanje z uporabo negalilejeve metrike $g_{ik}^{(0)}$). Popravki k krivinskemu tenzorju so

$$R_{klm}^{i(1)} = \frac{1}{2}(h_{k;m;l}^i + h_{m;k;l}^i - h_{km}^{;l;l} - h_{k;l;m}^i - h_{l;k;m}^i + h_{kl}^{;i;m}). \quad (108.2)$$

Od tod dobimo popravke Riccijevega tenzorja:

$$R^{(1)}_{ik} = R^{l(1)}_{ilk} = \frac{1}{2}(h_{i;k;l}^l + h_{k;i;l}^l - h_{ik}^{;l;l} - h_{;i;k}^l). \quad (108.3)$$

Popravki mešanih komponent Riccijevega tenzorja sledijo iz zveze

$$R^{k(0)}_i - R^{k(1)}_i = (R^{(0)}_{il} + R^{(1)}_{il})(g^{kl(0)} - h^{kl}),$$

tako da je

$$R^{k(1)}_i = g^{kl(0)} R^{(1)}_{il} - h^{kl} R^{(0)}_{il}. \quad (108.4)$$

Točna metrika v vakuumu mora zadovoljiti točne Einsteinove enačbe $R_{ik} = 0$. Ker je nemotena metrika $g_{ik}^{(0)}$ rešitev enačb $R_{ik}^{(0)} = 0$, mora za motnjo veljati $R_{ik}^{(1)} = 0$, ali

$$h_{i;k;l}^l + h_{k;i;l}^l - h_{ik;l}^l - h_{i;k}^l = 0. \quad (108.5)$$

V splošnem primeru poljubnega gravitacijskega valovanja poenostavitev te enačbe v obliko, podobno enačbi (107.8), ni mogoča. To pa lahko storimo v pomembnem primeru valov z visoko frekvenco, ko sta valovna dolžina λ in perioda nihanja λ/c majhni v primerjavo s karakteristično dolžino L in časom L/c , ki določata kako hitro se “polje v ozadju” spreminja. Vsak odvod komponente h_{ik} poveča red te količine za faktor L/λ v primerjavi z odvodi nemotene metrike $g_{ik}^{(0)}$. Če se omejimo na natančnost do drugega reda [torej na člene reda $(L/\lambda)^2$ in (L/λ)], lahko zamenjamo vrstni red odvajanja; razlika

$$h_{i;k;l}^l - h_{i;l;k}^l \approx h_m^l R^{m(0)}_{ikl} - h_i^m R^{l(0)}_{mkl}$$

je namreč reda $(L/\lambda)^0$, medtem ko izraza $h_{i;k;l}^l$ in $h_{i;l;k}^l$ oba vsebujeta člene obeh višjih redov. Zahtevamo dodatni pogoj za količine h_{ik}

$$\psi_{i;k}^k = 0, \quad (108.6)$$

ki je analogen pogoju (107.5), in dobimo enačbo

$$h_{ik;l}^l = 0, \quad (108.7)$$

ki je posplošitev valovne enačbe (107.8).

Iz razlogov, navedenih v 107, pogoj (108.6) ne določi koordinat enolično. Še vedno jih lahko transformiramo kot $x'^i = x^i + \xi^i$, kjer morajo majhne količine ξ^i rešiti enačbo $\xi^{i;k}_{;k} = 0$. S temi transformacijami lahko za količine h_{ik} zahtevamo pogoj $h \equiv h_i^i = 0$. Tedaj je $\psi_i^k = h_i^k$, zato veljajo pogoji

$$h_{i;k}^k = 0, \quad h = 0. \quad (108.8)$$

Množico dopustnih transformacij smo tako skrčili na tiste, za katere velja $\xi^i_{;i} = 0$.

Pseudotenzor t^{ik} poleg nemotenega dela $t^{ik(0)}$ vsebuje tudi člene višjih redov po h_{ik} . Izraz, podoben enačbi (107.11), dobimo, če si ogledamo količine t^{ik} , povprečene po območjih četvernega prostora, katerih dimenzije so velike v primerjavi z λ , vendar majhne v primerjavi z L . Takšno povprečevanje (ki ga bomo označili z oglatimi oklepaji $\langle \dots \rangle$) ne vpliva na $g_{ik}^{(0)}$, izniči pa vse količine, ki so linearne po hitro nihajočih količinah h_{ik} . Izmed kvadratnih členov ohranimo le tiste, ki so višjega (drugega) reda po $1/\lambda$; to so tisti členi, ki so kvadratni po odvodih $h_{ik,l} \equiv \partial h_{ik} / \partial x^l$.

V okviru zadane natančnosti lahko v t^{ik} izpustimo vse člene, ki jih lahko zapišemo kot četverne divergence. Integrali takšnih količin po območju četvernega prostora (torej po območju povprečevanja) lahko namreč pretvorimo s pomočjo Gaussovega izreka, zaradi česa se njihov velikostni red po $1/\lambda$ zmanjša za eno enoto. Odpadejo tudi tisti členi, ki so enaki nič zaradi (108.7) in (108.8) po integraciji po delih. Zato integriramo per partes in izpustimo integrale četvernih divergenc. Dobimo

$$\begin{aligned} \langle h^{ln}_{;p} h^p_{l,n} \rangle &= -\langle h^{ln} h^p_{l,p,n} \rangle = 0, \\ \langle h^{il}_{;n} h^k_{l,n} \rangle &= -\langle h^{il} h^k_{l,n} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Ugotovimo, da je edini preostali člen drugega reda enak

$$\langle t^{ik(2)} \rangle = \frac{c^4}{32\pi k} \langle h_q^{n,i} h_n^{q,k} \rangle. \quad (108.9)$$

Vidimo, da v okviru iste natančnosti velja $\langle t_i^{i(2)} \rangle = 0$.

Gravitacijski val ima določeno energijo, zato je tudi sam vir nekega dodatnega gravitacijskega polja. Tako kot energija je tudi to polje učinek drugega reda po h_{ik} . V primeru visoko frekvenčnih gravitacijskih valov pa je ta učinek občuten: ker je psevdotenzor t^{ik} kvadraten v odvodih količin h_{ik} , imamo opravka z velikimi faktorji λ^{-2} . V takšnem primeru lahko rečemo, da val sam proizvaja “polje v ozadju”, po katerem se širi. To polje lahko obravnavamo, če opravimo zgoraj opisano povprečevanje po območjih četvernega prostora, ki so veliko večja od λ . Takšno povprečevanje zgleda kratkovalovne “gube” in ostane le počasi spreminjajoča se metrika v ozadju (R. A. Isaacson, 1968).

Enačbo te metrike dobimo, če najprej razvijemo R_{ik} , pri čemer ne ohranimo le linearnih, temveč tudi kvadratne člene po h_{ik} : $R_{ik} = R_{ik}^{(0)} + R_{ik}^{(1)} + R_{ik}^{(2)}$. Kot smo že omenili, povprečevanje ne vpliva na člene prvega reda. Zato imajo povprečene enačbe polja $\langle R_{ik} \rangle = 0$ obliko

$$R_{ik}^{(0)} = -\langle R_{ik}^{(2)} \rangle, \quad (108.10)$$

kjer moramo v $R_{ik}^{(2)}$ ohraniti le člene drugega reda po $1/\lambda$. Te preprosto dobimo iz (96.7). Kvadratni členi po h_{ik} , ki stojijo na desni strani te enačbe in imajo obliko četverne divergence, po povprečenju postanejo enaki nič (v okviru zadane natančnosti), ostane le

$$\langle (R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R)^{(2)} \rangle = -\frac{8\pi k}{c^4} \langle t^{ik(2)} \rangle,$$

ali, ker je pri isti natančnosti $\langle t^{ik(2)} \rangle = 0$,

$$\langle R_{ik}^{(2)} \rangle = -\frac{8\pi k}{c^4} \langle t_{ik}^{(2)} \rangle.$$

Kočno dobimo s pomočjo (108.9) enačbo (108.10) v obliki

$$R_{ik}^{(0)} = \frac{1}{4} \langle h_{q,i} h_{n,k}^q \rangle. \quad (108.11)$$

Če “ozadje” nastane izključno zaradi valov samih, moramo enačbi (108.11) in (108.8) rešiti hkrati. Približek vrednosti na obeh straneh enačbe (108.11) kaže, da je krivinski polmer metrike v ozadju, ki je reda L , povezan z valovno dolžino λ in z velikostnim redom ustreznega polja h z zvezo $L^{-2} \sim h^2/\lambda^2$, oziroma $\lambda/L \sim h$.

§109 Močni gravitacijski valovi

V tem razdelku si bomo ogledali rešitev Einsteinovih enačb, ki je posplošitev šibkih ravnih gravitacijskih valov v ravnem četvernem prostoru (I. Robinson in H. Bondi, 1957).

Poiskali bomo rešitev, pri kateri bodo v ustreznem opazovalnem sistemu vse komponente metričnega tenzorja funkcije ene same spremenljivke, ki jo bomo imenovali x^0 (kar še ne pomeni nujno, da bo to spremenljivka časovnega tipa). Ta pogoj še vedno dopušča koordinatne transformacije oblike

$$x^\alpha \rightarrow x^\alpha + \phi^\alpha(x^0), \quad (109.1)$$

$$x^0 \rightarrow \phi^0(x^0), \quad (109.2)$$

kjer so ϕ^0, ϕ^α poljubne funkcije.

Značaj rešitve je bistveno odvisen od tega, ali lahko vse komponente $g_{0\alpha}$ izničimo z uporabo treh transformacij (109.1). To lahko storimo, če je determinanta $|g_{\alpha\beta}|$ različna od nič. Ob transformaciji (109.1) velja $g_{0\alpha} \rightarrow g_{0\alpha} + g_{\alpha\beta} \dot{\phi}^\beta$ (kjer pika označuje odvajanje po x^0); če je $|g_{\alpha\beta}| \neq 0$, potem sistem enačb

$$g_{0\alpha} + g_{\alpha\beta} \dot{\phi}^\beta = 0 \quad (109.3)$$

določa funkcije $\phi^\beta(x^0)$, s katerimi lahko dosežemo primerno transformacijo. Ta primer bomo obravnavali v 117, tu pa nas bo zanimala rešitev, za katero velja

$$|g_{\alpha\beta}| = 0.$$

V tem primeru ni opazovalnega sistema, kjer bi bile vse komponente $g_{0\alpha} = 0$. Vseeno pa lahko s štirimi transformacijami (109.1)-(109.2) dosežemo, da velja

$$g_{01} = 1, \quad g_{00} = g_{02} = g_{03} = 0. \quad (109.4)$$

Spremenljivka x^0 ima v tem primeru "svetlobni" značaj: za $dx^\alpha = 0$ in $dx^0 \neq 0$, je razmik $ds = 0$; na takšen način izbrano spremenljivko x^0 bomo označili z $x^0 = \eta$. Pod pogoji (109.4) lahko diferencial razmika zapišemo v obliki

$$ds^2 = 2 dx^1 d\eta + g_{ab}(dx^a + g^a dx^1)(dx^b + g^b dx^1). \quad (109.5)$$

V tem razdelku imajo indeksi $a, b, c, \dots$ vrednosti 2 in 3; $g_{ab}(\eta)$ lahko smatramo za dvodimenzionalni tenzor. Z izračunom količin R_{ab} dobimo naslednje enačbe polja:

$$R_{ab} = -\frac{1}{2}g_{ab}\dot{g}^c g_{bd}\dot{g}^d = 0.$$

Od tod sledi $g_{ac}\dot{g}^c = 0$, ali $\dot{g}^c = 0$, torej $g^c = \text{konst.}$ S transformacijo $x^a + g^a x^1 \rightarrow x^a$ lahko metriko preoblikujemo:

$$ds^2 = 2 dx^1 d\eta + g_{ab}(\eta) dx^a dx^b. \quad (109.6)$$

Determinanta $-g$ tega metričnega tenzorja je enaka determinanti $|g_{ab}|$, edina od nič različna Christoffelova simbola pa sta

$$\Gamma_{b0}^a = \frac{1}{2}\kappa_b^a, \quad \Gamma_{ab}^1 = -\frac{1}{2}\kappa_{ab},$$

kjer smo vpeljali dvodimenzionalni tenzor $\kappa_{ab} = \dot{g}_{ab}$, $\kappa_a^b = g^{bc}\kappa_{ac}$. Vse komponente Riccijevega tenzorja razen R_{00} so identično enake nič. Zato velja enačba

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\dot{\kappa}_a^a - \frac{1}{4}\kappa_a^b \kappa_b^a = 0. \quad (109.7)$$

Tri funkcije $g_{22}(\eta), g_{23}(\eta), g_{33}(\eta)$ morajo torej zadostiti eni sami enačbi, zato lahko dve izmed njih poljubno izberemo. Enačbo (109.7) je primerno zapisati drugače. Pri tem bomo g_{ab} zapisali kot

$$g_{ab} = -\chi^2 \gamma_{ab}, \quad |\gamma_{ab}| = 1. \quad (109.8)$$

Potem je determinanta $-g = |g_{ab}| = \chi^4$, ko to vstavimo v (109.7), pa po preprostih transformacijah dobimo

$$\ddot{\chi} + \frac{1}{8}(\dot{\gamma}_{ac}\gamma^{bc})(\dot{\gamma}_{bd}\gamma^{ad})\chi = 0 \quad (109.9)$$

(γ^{ab} je dvodimenzionalen tenzor, ki je recipročen tenzorju γ_{ab}). Če si izberemo poljubne funkcije $\gamma_{ab}(\eta)$ (ki so med seboj povezane s pogojem $|\gamma_{ab}| = 1$), ta enačba določa funkcijo $\chi(\eta)$.

Tako pridemo do rešitve, ki vsebuje dve poljubni funkciji. Hitro vidimo, da je to splošitev primera šibkega gravitacijskega vala, ki se širi v eni smeri, ki smo ga obravnavali v 107. Takšen primer dobimo s transformacijo

$$\eta = \frac{t+x}{\sqrt{2}}, \quad x^1 = \frac{t-x}{\sqrt{2}} \quad (109.10)$$

in z nastavkom $\gamma_{ab} = \delta_{ab} + h_{ab}(\eta)$ (kjer so h_{ab} majhne količine, za katere velja pogoj $h_{22} + h_{33} = 0$), ter $\chi = 1$; konstantna vrednost količine χ je rešitev enačbe (109.9), če zanemarimo majhne člene drugega reda.

Naj se šibek gravitacijski val končne razsežnosti ("valovni paket") giblje mimo neke točke x . Pred prehodom je $h_{ab} = 0$, $\chi = 1$; po prehodu imamo ponovno $h_{ab} = 0$, $\partial^2 \chi / \partial^2 t = 0$, vendar če upoštevamo člene drugega reda v (109.9), dobimo od nič različno negativno vrednost za odvod $\partial \chi / \partial t$:

$$\partial \chi / \partial t \approx -\frac{1}{8} \int \left(\frac{\partial h_{ab}}{\partial t} \right)^2 dt < 0$$

(integriramo po časovnem intervalu, v katerem valovni paket potuje mimo točke x). Zato je po prehodu vala $\chi = 1 - \text{konst} \cdot t$, in po končnem časovnem intervalu χ spremeni predznak. Če ima χ vrednosti nič, to pomeni, da ima determinanta metrike g vrednost nič in oprava imamo s singularnostjo metrike. Ta singularnost pa ni fizikalnega značaja; povezana je z nezadovoljivo izbiro opazovalnega sistema, ki ga "pokvari" mimoidoči gravitacijski val. Singularnosti se lahko znebimo z ustrezno transformacijo in po mimohodu gravitacijskega vala postane četverni prostor ponovno raven.

To lahko dokažemo neposredno. Če spremenljivko η merimo od njene vrednosti, ki ustreza singularnosti, $\chi = \eta$, tako da velja

$$ds^2 = 2 d\eta dx^1 - \eta^2 [(dx^2)^2 + (dx^3)^2].$$

Po transformaciji

$$\eta x^2 = y, \quad \eta x^3 = z, \quad x^1 = \xi - \frac{y^2 + z^2}{2\eta},$$

dobimo

$$ds^2 = 2 d\eta d\xi - dy^2 - dz^2,$$

po substituciji $\eta = (t+x)/\sqrt{2}$, $\xi = (t-x)/\sqrt{2}$ pa končno dobimo metriko Galilejeve oblike.

Ta lastnost gravitacijskih valov (nastanek navidezne singularnosti), seveda ni povezana s šibkostjo gravitacijskega vala; velja tudi za splošno rešitev enačbe (109.7); prav tako kot pri pravkar obravnavanem primeru je v bližini singularnosti $\chi \sim \eta$, torej $-g \sim \eta^4$.

§110 Sevanje gravitacijskih valov

Oglejmo si šibko gravitacijsko polje, ki ga povzročajo poljubna telesa, ki se gibljejo s hitrostmi, ki so majhne v primerjavi s svetlobno.

Zaradi prisotnosti snovi se bodo enačbe gravitacijskega polja razlikovale od preproste valovne enačbe oblike $\square h_i^k = 0$ (107.8) v tem, da bodo imele na desni strani člene, ki izvirajo iz napetostnega tenzorja snovi. Enačbe zapišemo v obliki

$$\frac{1}{2}\square\psi_i^k = \frac{8\pi k}{c^4}\tau_i^k, \quad (110.1)$$

kamor smo namesto h_i^k vstavili bolj primerne količine

$$\psi_i^k = h_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k h,$$

in kjer z τ_i^k označujemo pomožne količine, ki jih dobimo ob prehodu iz točnih enačb gravitacije v primer šibkega polja. Hitro lahko preverimo, da dobimo komponente τ_0^0 in τ_α^0 neposredno iz ustreznih komponent T_i^k , če obdržimo le člene, ki so tistega velikostnega reda, ki nas zanima; komponente τ_β^α vsebujejo poleg členov iz T_β^α tudi člene drugega reda iz $R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R$.

Količine ψ_i^k ustrezajo pogoju (107.5) $\partial\psi_i^k/\partial x^k = 0$. Iz (110.1) sledi, da ekvivalentna enačba velja tudi za τ_i^k :

$$\frac{\partial\tau_i^k}{\partial x^k} = 0. \quad (110.2)$$

Ta enačba tu nadomešča splošni zakon $T_{i;k}^k = 0$.

Z dobljenimi enačbami bomo izračunali energijo, ki jo izsevajo gibajoča se telesa v obliki gravitacijskih valov. Na poti do rešitve moremo določiti gravitacijsko polje v "valovnem območju", torej pri razdaljah, ki so velike v primerjavi z valovno dolžino izsevanih valov.

Vsi izračuni so načeloma povsem analogni tistim, ki smo jih izpeljali za elektromagnetno polje. Enačba (110.1) za šibko gravitacijsko polje je enake oblike kot enačba za zakasnjene potenciale (62). Zato lahko takoj zapišemo njeno splošno rešitev oblike

$$\psi_i^k = -\frac{4k}{c^4} \int \left(\tau_i^k\right)_{t-\frac{R}{c}} \frac{dV}{R}. \quad (110.3)$$

Ker so hitrosti vseh teles v sistemu majhne, lahko polje pri veliki oddaljenosti od sistema zapišemo kot (glej 66 in 67)

$$\psi_i^k = -\frac{4k}{c^4 R_0} \int \left(\tau_i^k\right)_{t-\frac{R_0}{c}} dV, \quad (110.4)$$

kjer je R_0 razdalja od izhodišča, ki ga lahko postavimo kjerkoli v notranjosti sistema. V nadaljevanju bomo zaradi krajšega pisanja izpuščali indeks $t - (R_0/c)$ v integrandu.

Integral bomo izračunali s pomočjo enačbe (110.2). Če izpustimo indeks pri τ_i^k in ločimo prostorske in časovno komponento, lahko (110.2) zapišemo v obliki

$$\frac{\partial\tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial\tau_{\alpha 0}}{\partial x^0} = 0, \quad \frac{\partial\tau_{0\gamma}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial\tau_{00}}{\partial x^0} = 0. \quad (110.5)$$

Prvo enačbo pomnožimo z x^β in jo integriramo po celotnem prostoru,

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int \tau_{\alpha 0} x^\beta dV = \int \frac{\partial\tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma} x^\beta dV = \int \frac{\partial(\tau_{\alpha\gamma} x^\beta)}{\partial x^\gamma} dV - \int \tau_{\alpha\beta} dV.$$

Ker je v neskončnosti $\tau_{ik} = 0$, bo prvi integral na desni po pretvorbi z Gaussovim izrekom postal enak nič. Če vzamemo polovico vsote preostale enačbe in iste enačbe z zamenjanima indeksoma, dobimo

$$\int \tau_{\alpha\beta} dV = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^0} \int (\tau_{\alpha 0} x^\beta + \tau_{\beta 0} x^\alpha) dV.$$

Nato pomnožimo drugo enačbo (110.5) z $x^\alpha x^\beta$ in jo integriramo po celotnem prostoru. S podobno pretvorbo dobimo

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int \tau_{00} x^\alpha x^\beta dV = - \int (\tau_{\alpha 0} x^\beta + \tau_{\beta 0} x^\alpha) dV.$$

S primerjavo obeh rezultatov dobimo

$$\int \tau_{\alpha\beta} dV = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \int \tau_{00} dx^\alpha dx^\beta dV. \quad (110.6)$$

Integrale vse komponent $\tau_{\alpha\beta}$ lahko torej izrazimo z integrali, ki vsebujejo le komponento τ_{00} . Ta komponenta pa je, kot smo že ugotovili, kar enaka ustrezni komponenti T_{00} napetostnega tenzorja in jo lahko z zadostno natančnostjo [glej (99.1)] zapišemo kot

$$\tau_{00} = \mu c^2. \quad (110.7)$$

To vstavimo v (110.6) in, upoštevajoč $t = x^0/c$, dobimo izraz za (110.4):

$$\psi_{\alpha\beta} = -\frac{2k}{c^4 R_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \mu x^\alpha x^\beta dV. \quad (110.8)$$

Pri velikih razdaljah od teles lahko valove smatramo za ravne (na zadosti majhnih območjih prostora). Zato lahko pretok izsevane energije iz sistema, na primer v smeri osi x^1 , izračunamo z enačbo (107.12). V tej enačbi nastopata komponenti $h_{23} = \psi_{23}$ in $h_{22} - h_{33} = \psi_{22} - \psi_{33}$. Z (110.8) jih lahko zapišemo kot

$$h_{23} = -\frac{2k}{3c^4 R_0} \ddot{D}_{23}, \quad h_{22} - h_{33} = -\frac{2k}{3c^4 R_0} (\ddot{D}_{22} - \ddot{D}_{33}) \quad (110.9)$$

(pike tu označujejo odvode po času), kjer smo vpeljali masni kvadrupolni tenzor (99.8):

$$D_{\alpha\beta} = \int \mu (3x^\alpha x^\beta - \delta_{\alpha\beta} r^2) dV. \quad (110.10)$$

Tako končno dobimo pretok energije vzdolž osi x^1 oblike

$$ct^{10} = \frac{k}{36\pi c^5 R_0^2} \left[\left(\frac{\ddot{D}_{22} - \ddot{D}_{33}}{2} \right)^2 + \ddot{D}_{23}^2 \right]. \quad (110.11)$$

Pretok energije v diferencialen prostorski kot v dani smeri dobimo, če ta izraz pomnožimo z R_0^2 do.

Dva člena v tem izrazu ustrezata sevanju valov z dvema različnima polarizacijama. Zapisali bi ju radi v invariantni obliki, ki je neodvisna od izbire smeri sevanja, zato vpeljemo tridimenzionalen enotski polarizacijski tenzor $e_{\alpha\beta}$ ravnega gravitacijskega vala, ki določa od

nič različne komponente $h_{\alpha\beta}$ (v umeritvi, v kateri je $h_{0\alpha} = h_{00} = h = 0$). Polarizacijski tenzor je simetričen in zanj veljajo pogoji

$$e_{\alpha\alpha} = 0, \quad e_{\alpha\beta}n_{\beta} = 0, \quad e_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta} = 1, \quad (110.12)$$

kjer je $\mathbf{n}$ enotski vektor v smeri širjenja vala.

S tem tenzorjem lahko zapišemo jakost sevanja z dano polarizacijo v prostorski kot do v obliki

$$dI = \frac{k}{72\pi c^5} (\ddot{D}_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta})^2 \text{ do.} \quad (110.13)$$

Ta izraz je implicitno odvisen od smeri $\mathbf{n}$ zaradi pogoja o prečnosti: $e_{\alpha\beta}n_{\beta} = 0$. Celotno kotno porazdelitev vseh polarizacij dobimo, če seštejemo (110.13) po polarizacijah, ali (kar je temu enakovredno) če izračunamo povprečje po polarizaciji in pomnožimo z 2 (to je število neodvisnih polarizacij). Povprečje izračunamo po enačbi

$$\begin{aligned} \overline{e_{\alpha\beta}e_{\gamma\delta}} = & \frac{1}{4} \left(n_{\alpha}n_{\beta}n_{\gamma}n_{\delta} + (n_{\alpha}n_{\beta}\delta_{\gamma\delta} + n_{\gamma}n_{\delta}\delta_{\alpha\beta}) - \right. \\ & - (n_{\alpha}n_{\gamma}\delta_{\beta\delta} + n_{\beta}n_{\gamma}\delta_{\alpha\delta} + n_{\alpha}n_{\delta}\delta_{\beta\gamma} + n_{\beta}n_{\delta}\delta_{\alpha\gamma}) - \\ & \left. - \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + (\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\beta\gamma}\delta_{\alpha\delta}) \right) \end{aligned} \quad (110.14)$$

(izraz na desni je tenzor, sestavljen iz enotskega tenzorja in iz komponent vektorja $\mathbf{n}$; ima zahtevano simetrijo po indeksih, po skritvi po parih indeksov α, γ in β, δ postane enak ena, po skalarnem množenju z $\mathbf{n}$ pa je enak nič).

Rezultat je

$$dI = \frac{k}{36\pi c^5} \left[\frac{1}{4} (\ddot{D}_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta})^2 + \frac{1}{2} \ddot{D}_{\alpha\beta}^2 - \ddot{D}_{\alpha\beta} \ddot{D}_{\alpha\gamma} n_{\beta} n_{\gamma} \right] \text{ do.} \quad (110.15)$$

Celotno sevanje v vseh smereh, torej energijske izgube sistema na enoto časa ($-d\mathcal{E}/dt$), dobimo, če izračunamo povprečje količine dI/do in rezultat pomnožimo z 4π . Povprečje lahko preprosto izračunamo z uporabo enačb, zapisanih v opombi na strani *. Dobimo

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{k}{45c^5} \ddot{D}_{\alpha\beta}^2. \quad (110.16)$$

Opazimo, da je sevanje gravitacijskih valov pojav petega reda po $1/c$. Zaradi tega in zaradi majhne vrednosti gravitacijske konstante k , je ta pojav običajno izjemno šibek.

Poglavje 14

Relativistična kozmologija

§111 Izotropen prostor

Splošna teorija relativnosti omogoča nove pristope k reševanju nalog, povezanih z lastnostmi vesolja v kozmološkem obsegu. Nove presenetljive možnosti so povezane z negalilejevim značajem prostora-časa (kar je prvi opazil Einstein leta 1917).

Preden se lotimo sistematične gradnje relativističnih kozmoloških modelov, potrebujemo še pojasnilo o osnovnih enačbah polja, iz katerih bomo nato izhajali.

Zahteve, opisane v 94 o pogojih, ki določajo akcijo gravitacijskega polja, bodo še vedno zadoščene, če dodamo konstanten člen k skalarju G , torej zapišemo

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \int (G + 2\Lambda)\sqrt{-g} \, d\Omega,$$

kjer je Λ nova konstanta (z dimenzijo cm^{-2}). Zaradi te spremembe dobimo v Einsteinovih enačbah dodaten člen Λg_{ik} :

$$R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4}T_{ik} + \Lambda g_{ik}.$$

Če “kozмолоški konstanti” Λ pripišemo majhno vrednost, prisotnost tega člena ne bo občutno vplivala na gravitacijske valove na zadosti majhnih območjih četrnega prostora, bo pa vodila k novim vrstam “kozmoloških rešitev”, s katerim bi lahko opisali vesolje kot celoto. * Vendarle danes še vedno ni tehtnih in prepričljivih razlogov, ne empiričnih niti teoretičnih, ki bi terjale takšno spremembo oblike osnovnih enačb teorije. Poudariti moramo, da govorimo o spremembah, ki imajo globok fizikalen pomen: če v Lagrangevo gostoto dodamo konstantni člen, ki je na splošno neodvisen od stanja polja, to pomeni, da smo četvernemu prostoru pripisali ukrivljenost, ki je niti načeloma ne moremo izničiti, in ki ni povezana niti s snovjo, niti z gravitacijskimi valovi. Zato je obravnava v tem razdelku osnovana na Einsteinovih enačbah klasične oblike brez “kozmoloske konstante”.

Vemo, da so zvezde v prostoru porazdeljene zelo neenakomerno; zgoščene so v ločene sisteme zvezd (galaksije). Ko pa proučujemo vesolje v “velikem obsegu”, moramo zane-mariti “krajevne” nehomogenosti zaradi zgostitve snovi v obliki zvezd in sistemov zvezd.

*Tako lahko imamo v tem primeru stacionarne rešitve, ki jih ni v primeru $\Lambda = 0$. Natanko iz tega razloga je Einstein vpeljal “kozmolosko konstanto”, še preden je Friedmann odkril rešitve enačb polja, ki niso stacionarne – glej nadaljevanje.

Zato moramo gostoto mase smatrati kot povprečno gostoto po območjih prostora, katerih razsežnost je večja v primerjavi z razdaljami med galaksijami.

Rešitve Einsteinovih enačb, ki si jih bomo ogledali kasneje (v 111-114), imenovane tudi izotropen kozmološki model (A. A. Friedmann, 1922), temeljijo na podmeni homogenosti in izotropnosti porazdelitve snovi v vesolju. Obstoječi astronomski podatki s takšnim privzetkom niso v nasprotju *, zato danes verjamemo, da je izotropen model v splošnem zadovoljiv opis ne le vesolja v preteklosti, temveč tudi večjega dela razvoja vesolja v prihodnosti. Videli bomo, da je bistvena lastnost tega modela, da ni stacionaren. Nobenega dvoma ni, da je ta lastnost ("širjenje vesolja") pravilna razlaga pojava rdečega premika, ki je osrednje vprašanje kozmologije (114).

Homogenost in izotropnost prostora pomenita, da lahko izberemo takšen svetovni čas, da bo ob vsakem trenutku metrika prostora enaka v vseh točkah in v vseh smereh.

Najprej si oglejmo metriko izotropnega prostora na splošno in za zdaj zanemarimo kakršnokoli časovno odvisnost. Kot prej označimo tridimenzionalni prostorski metrični tenzor z $\gamma_{\alpha\beta}$, kar pomeni, da diferencial prostorske ločne dolžine zapišemo kot

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (111.1)$$

Ukrivljenost prostora povsem določa prostorski tridimenzionalen krivinski tenzor, ki ga bomo označili z $P_{\beta\gamma\delta}^\alpha$, da ga bomo lažje ločili od štiridimenzionalnega tenzorja R_{klm}^i . V izotropnem prostoru mora biti tenzor $P_{\beta\gamma\delta}^\alpha$ očitno izrazljiv samo z metričnim tenzorjem. Iz simetrijskih lastnosti tenzorja $P_{\beta\gamma\delta}^\alpha$ razberemo, da mora tenzor imeti obliko

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda(\gamma_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta} - \gamma_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma}), \quad (111.2)$$

kjer je λ neka konstanta. Riccijev tenzor $P_{\alpha\beta} = P_{\alpha\gamma\beta}^\gamma$ je torej enak

$$P_{\alpha\beta} = 2\lambda\gamma_{\alpha\beta}, \quad (111.3)$$

skalarna ukrivljenost pa je

$$P = 6\lambda. \quad (111.4)$$

Ukrivljenost izotropnega prostora torej določa ena sama konstanta. Zato so možni le trije različni primeri prostorske metrike: (1) prostor s konstantno pozitivno ukrivljenostjo ($\lambda > 0$), (2) prostor s konstantno negativno ukrivljenostjo ($\lambda < 0$) in (3) prostor z ukrivljenostjo nič ($\lambda = 0$). Slednji prostor je raven, torej evklidski prostor.

Pri proučevanju metrike je koristno začeti z geometrijsko analogijo: geometrijo izotropnega tridimenzionalnega prostora lahko obravnavamo kot geometrijo izotropne hiperploskve v namišljenem štiridimenzionalnem prostoru. Takšen prostor je hiperkrogla; tridimenzionalen prostor, ki ustreza hiperkrogli, je tisti s konstantno pozitivno ukrivljenostjo. Enačba hiperkrogle s polmerom a v štiridimenzionalnem prostoru x_1, x_2, x_3, x_4 se zapiše

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2,$$

diferencial ločne dolžine na njej pa lahko zapišemo kot

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2.$$

*V mislih imamo podatke o porazdelitvi galaksij v prostoru in o izotropnosti kozmološkega mikrovalovnega ozadja (angl. *cosmic microwave background*, tudi *background radio radiation*).

Spremenljivke x_1, x_2, x_3 naj bomo tri prostorske koordinate, namišljeno koordinato x_4 pa odpravimo s pomočjo prve enačbe. Tako dobimo diferencial ločne dolžine v prostoru:

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}. \quad (111.5)$$

S tem izrazom lahko preprosto izračunamo konstantno λ iz (111.2). Ker vnaprej vemo, da ima $P_{\alpha\beta}$ obliko (111.3) povsod po prostoru, zadostuje, če ga izračunamo v bližini izhodišča, kjer velja

$$\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{x_\alpha x_\beta}{a^2}.$$

Ker so prvi odvodi količin $\gamma_{\alpha\beta}$, in torej tudi količin $\lambda_{\beta\gamma}^\alpha$, v izhodišču enaki nič, je račun z uporabo splošne enačbe (92.8) zelo preprost in dobimo rezultat

$$\lambda = \frac{1}{a^2}. \quad (111.6)$$

Količino a lahko imenujemo “krivinski polmer” prostora. Namesto koordinat x_1, x_2, x_3 lahko vpeljemo “sferične” koordinate r, θ, ϕ . Diferencial ločne dolžine zapišemo kot

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + r^2(\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2). \quad (111.7)$$

Izhodišče koordinatnega sistema si lahko izberemo v poljubni točki v prostoru. Obseg kroga v teh koordinatah je enak $2\pi r$, površina krogle pa $4\pi r^2$. “Polmer” kroga (ali krogle) je

$$\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2/a^2}} = a \sinh^{-1}(r/a),$$

in je večji od r . Zato je razmerje med obsegom in polmerom v tem prostoru manjše od 2π .

Drugo primerno obliko dl^2 v “štiridimenzionalnih krogelnih koordinatah” dobimo, če namesto koordinate r vpeljemo “kot” χ z $r = a \sin \chi$. Tedaj je *

$$dl^2 = a^2[d\chi^2 + \sin^2 \chi(\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2)]. \quad (111.8)$$

Koordinata χ določa razdaljo od izhodišča, ki je enaka $a\chi$. Površina krogle v teh koordinatah je $4\pi a^2 \sin^2 \chi$. Ko se gibljemo stran od izhodišča, površina sfere narašča, doseže svojo največjo vrednost $4\pi a^2$ pri razdalji $\pi a/2$. Nato ponovno upada in se skrči v točko na “nasprotnem polu” prostora pri razdalji πa , ki je največja razdalja, ki lahko obstaja v takšnem prostoru [vse to je razvidno iz (111.7), če upoštevamo, da koordinata r ne more biti večja od a].

Prostornina prostora s pozitivno ukrivljenostjo je

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi a^3 \sin^2 \chi \sin \theta d\chi d\theta d\phi,$$

* “Kartezične” koordinate x_1, x_2, x_3, x_4 so povezane s štiridimenzionalnimi krogelnimi koordinatami a, θ, ϕ, χ z zvezami:

$$\begin{aligned} x_1 &= a \sin \chi \sin \theta \cos \phi, & x_2 &= a \sin \chi \sin \theta \sin \phi, \\ x_3 &= a \sin \chi \cos \theta, & x_4 &= a \cos \chi. \end{aligned}$$

oziroma

$$V = 2\pi^2 a^3. \quad (111.9)$$

Prostor s pozitivno ukrivljenostjo je torej zaprt “sam vase”. Njegova prostornina je končna, čeprav nima robov.

Zanimiva ugotovitev je, da mora biti v zaprtem prostoru celotni naboj enak nič. Vsaka zaprta ploskev v končnem prostoru omejuje na vsaki strani končno območje prostora. Zato je pretok električnega polja skozi to ploskev po eni strani enak celotnemu naboju v notranjosti ploskve, po drugi strani pa celotnemu naboju zunaj te ploskve, vendar z nasprotnim predznakom. Zato je vsota nabojev na obeh straneh ploskve enaka nič.

Podobno sledi iz izraza (96.16) za četverec gibalne količine v obliki ploskovnega integrala, da je četverec celotne gibalne količine prostora P^i enak nič. Zato definicija četverca celotne gibalne količine izgubi pomen, saj ustrezni ohranitveni zakon postane trivialna identiteta $0 = 0$.

Sedaj si bomo ogledali geometrijo prostora s konstantno negativno ukrivljenostjo. Iz (111.6) sledi, da je konstanta λ negativna, če je a imaginaren. Zato lahko vse enačbe prostora z negativno ukrivljenostjo dobimo iz prejšnjih enačb, če a nadomestimo z ia . Z drugimi besedami, geometrija prostora z negativno ukrivljenostjo je z vidika matematike geometrija štiridimenzionalne psevdokroglice z imaginarnim polmerom.

Konstanta λ je sedaj

$$\lambda = -\frac{1}{a^2}, \quad (111.10)$$

diferencial prostorske ločne dolžine v prostoru z negativno ukrivljenostjo pa ima v koordinatah r, θ, ϕ obliko

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{a^2}} + r^2(\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2), \quad (111.11)$$

kjer ima lahko koordinata r vrednosti med 0 in ∞ . Razmerje med obsegom in polmerom kroga je večje od 2π . Izraz za dl^2 , ki ustreza (111.8), dobimo, če vpeljemo koordinato χ z $r = a \sinh \chi$ (χ gre od 0 do ∞). Potem je

$$dl^2 = a^2 \{ d\chi^2 + \sinh^2 \chi (\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) \}. \quad (111.12)$$

Površina kroglice je sedaj enaka $4\pi a^2 \sinh^2 \chi$ in ko se oddaljujemo od izhodišča (χ pri tem narašča), gre preko vseh meja. Prostornina prostora z negativno ukrivljenostjo je očitno neskončna.

§112 Zaprt izotropen model

Za obravnavo prostorsko-časovne metrike izotropnega modela si moramo najprej izbrati opazovalni sistem. Najbolj primeren je “sogibljiv” (angl. *co-moving*) opazovalni sistem, ki se v vsaki točki prostora giblje skupaj s snovjo v tej točki. Z drugimi besedami, opazovalni sistem je kar snovi, ki zapolnjuje prostor; hitrost snovi v tem sistemu je po definiciji povsod enaka nič. Očitno je takšen opazovalni sistem smiseln za izotropen model – pri vseh drugih sistemih bi smer hitrosti snovi vodila k navidezni neenakovrednosti različnih smeri v prostoru. Časovna koordinata mora biti izbrana tako, kot smo opisali v prejšnjem razdelku: ob vsakem trenutku mora biti metrika enaka povsod v prostoru.

Zaradi popolne enakovrednosti vseh smeri, morajo biti komponente metričnega tenzorja $g_{0\alpha}$ enake nič v izbranem opazovalnem sistemu. Tri komponente $g_{0\alpha}$ bi lahko smatrali kot komponente tridimenzionalnega vektorja, kar bi vodilo k neenakovrednosti različnih smeri, če te komponente ne bi bile enake nič. Zato mora ds^2 imeti obliko $ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 - dl^2$. Komponenta g_{00} je funkcija, ki je odvisna samo od spremenljivke x^0 . Zato si lahko vedno izberemo takšno časovno koordinato, da bo $g_{00} = 1$. Označimo jo z ct in dobimo

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2. \quad (112.1)$$

Čas t je sinhroni lastni čas v vsaki točki prostora.

Najprej obravnavajmo prostor s pozitivno ukrivljenostjo; od tu dalje bomo zaradi krajšega pisanja ustrezni rešitvi Einsteinovih enačb gravitacije reki “*zaprti model*” (angl. *closed model*). Za dl uporabimo izraz (111.8), v katerem je “krivinski polmer” a v splošnem funkcija časa. Zato zapišemo ds^2 v obliki

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \{ d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\phi^2) \}. \quad (112.2)$$

Funkcijo $a(t)$ določajo enačbe gravitacijskega polja. Pri reševanju teh enačb je prikladno namesto časa vpeljati količino η , definirano z zvezo

$$c dt = a d\eta. \quad (112.3)$$

S tem lahko ds^2 zapišemo kot

$$ds^2 = a^2(\eta) \{ d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\phi^2) \}. \quad (112.4)$$

Na poti do enačb polja moramo najprej izračunati komponente tenzorja R_{ik} (koordinate x^0, x^1, x^2, x^3 so η, χ, θ, ϕ). Komponente metričnega tenzorja so

$$g_{00} = a^2, \quad g_{11} = -a^2, \quad g_{22} = -a^2 \sin^2 \chi, \quad g_{33} = -a^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta.$$

Z njimi izračunamo količine Γ_{kl}^i :

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{a'}{a}, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^0 = -\frac{a'}{a^3} g_{\alpha\beta}, \quad \Gamma_{0\beta}^\alpha = \frac{a'}{a} \delta_\beta^\alpha, \quad \Gamma_{\alpha 0}^0 = \Gamma_{00}^\alpha = 0,$$

kjer s črtico označujemo odvod po η . (Komponent $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ ni potrebno eksplicitno izračunati.) S temi vrednostmi dobimo iz splošne enačbe (92.8)

$$R_0^0 = \frac{3}{a^4} (a'^2 - aa'').$$

S pomočjo podobnega simetrijskega razmišljanja, ko smo ga uporabili prej za komponente $g_{0\alpha}$, lahko tudi tukaj dokažemo, da je $R_{0\alpha} = 0$. Pri računanju komponente R_α^β upoštevamo, da če v njih ločimo člene, ki vsebujejo le $g_{\alpha\beta}$ (torej samo $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$), morajo ti členi biti enaki komponentam tridimenzionalnega vektorja $-P_\beta^\alpha$, katerega vrednosti poznamo že iz (111.3) in (111.6):

$$R_\alpha^\beta = -P_\alpha^\beta + \dots = -\frac{2}{a^2} \delta_\alpha^\beta + \dots,$$

kjer točke predstavljaj člene, v katerih poleg $g_{\alpha\beta}$ nastopa tudi g_{00} . Izračunamo še te, in dobimo

$$R_\alpha^\beta = -\frac{1}{a^4} (2a^2 + a'^2 + aa'') \delta_\alpha^\beta,$$

tako da je

$$R = R_0^0 + R_\alpha^\alpha = -\frac{6}{a^3}(a + a'').$$

Ker v našem opazovalnem sistemu snov miruje, je $u^\alpha = 0, u^0 = 1/a$, in iz (94.9) sledi $T_0^0 = \epsilon$, kjer je ϵ gostota energije snovi. Te izraze vstavimo v enačbo

$$R_0^0 - \frac{1}{2}R = \frac{8\pi k}{c^4}T_0^0,$$

in dobimo:

$$\frac{8\pi k}{c^4}\epsilon = \frac{3}{a^4}(a^2 + a'^2). \quad (112.5)$$

Tako ϵ kot a sta tu neznani funkciji, zato potrebujemo še eno enačbo. Namesto prostorskih komponent enačb polja si bomo izbrali enačbo $T_{0;i}^i = 0$, ki je ena izmed štirih enačb (94.7), ki so (kot vemo) vsebovane v enačbah gravitacije. To enačbo lahko izpeljemo tudi neposredno s pomočjo prijemov iz termodinamike.

S tem, ko v enačbah polja uporabimo izraz (94.9) za napetostni tenzor, zanemarimo vse procese, pri katerih prihaja do disipacije energije in ki vodijo k naraščanju entropije. Ta približek je tu povsem upravičen, saj so dodatni členi, ki bi jih morali zaradi takšnih procesov dodati k T^k_i , zanemarljivo majhni v primerjavi z gostoto energije ϵ , ki vključuje tudi mirovno energijo delcev snovi.

Zato smemo pri izpeljavi enačb polja skupno entropijo smatrati kot konstanto. Sedaj uporabimo dobro poznano relacijo iz termodinamike $d\mathcal{E} = T dS - p dV$, kjer so $\mathcal{E}$, S in V energija, entropija ter prostornina sistema, p in T pa sta pritisk in temperatura. Pri konstantni entropiji velja kar $d\mathcal{E} = -p dV$. Vpeljemo gostoto energije $\epsilon = \mathcal{E}/V$ in dobimo

$$d\epsilon = -(\epsilon + p)\frac{dV}{V}.$$

Prostornina V je po (111.9) sorazmerna s tretjo potenco krivinskega polmera a . Zato je $dV/V = 3 da/a = 3 d(\ln a)$. Sledi

$$-\frac{d\epsilon}{\epsilon + p} = 3 d(\ln a),$$

z integracijo pa dobimo

$$3 \ln a = - \int \frac{d\epsilon}{p + \epsilon} + \text{konst} \quad (112.6)$$

(spodnja meja integrala je konstantna).

Če je zveza med ϵ in p ("enačba stanja" snovi) poznana, lahko iz (112.6) dobimo ϵ kot funkcijo spremenljivke a . Nato lahko iz (112.5) določimo η z izrazom

$$\eta = \pm \int \frac{da}{a \sqrt{\frac{8\pi k}{3c^4}\epsilon a^2 - 1}}. \quad (112.7)$$

Enačbi (112.6) in (112.7) sta splošna rešitev za metriko zaprtega izotropnega modela.

Če je snov v prostoru porazdeljena v obliki diskretnih makroskopskih teles, potem lahko pri računanju nastalega gravitacijskega polja ta telesa smatramo kot točkaste snovne delce z določenimi masami in ne upoštevamo njihove notranje strukture. Če so hitrosti teles relativno

majhne (v primerjavi z c), lahko zapišemo $\epsilon = \mu c^2$, kjer je μ vsota mas teles, ki se nahajajo v eni enoti prostornine. Iz istega razloga je pritisk "plina", ki ga tvorijo telesa, izjemno majhen v primerjavi z ϵ in ga smemo zanemariti (iz zgoraj povedanega sledi, da pritisk v notranjosti teles za naše namene ni pomemben). Sevanja v prostoru ni veliko, zato smemo energijo in pritisk sevanja prav tako zanemariti.

Če torej želimo opisati trenutno stanje vesolja v okviru tega modela, moramo uporabiti enačbo stanja za "prašno" (angl. *dustlike*) snov,

$$\epsilon = \mu c^2, \quad p = 0.$$

Z integracijo (112.6) dobimo $\mu a^3 = \text{konst.}$ To enačbo bi lahko zapisali takoj, saj preprosto izraža dejstvo, da je vsota M mas vseh teles v celotnem prostoru konstantna, kar za prašno snov gotovo velja. * Ker je prostornina v zaprtem modelu enaka $V = 2\pi^2 a^3$, je $\text{konst} = M/2\pi^2$. Velja torej

$$\mu a^3 = \text{konst} = \frac{M}{2\pi^2}. \quad (112.8)$$

Če enačbo (112.8) vstavimo v (112.7) in izračunamo integral, dobimo

$$a = a_0(1 - \cos \eta), \quad (112.9)$$

kjer je konstanta

$$a_0 = \frac{2kM}{3\pi c^2}.$$

Zvezo med t in η končno dobimo iz (112.3):

$$t = \frac{a_0}{c}(\eta - \sin \eta). \quad (112.10)$$

Enačbi (112.9) in (112.10) določata funkcijo $a(t)$ v parametrični obliki. Funkcija $a(t)$ narašča od nič pri $t = 0$ ($\eta = 0$) do svoje največje vrednosti $a = 2a_0$, ki jo dosežemo pri $t = \pi a_0/c$ ($\eta = \pi$), nato pa ponovno pada proti vrednosti nič, ki jo doseže ob $t = 2\pi a_0/c$ ($\eta = 2\pi$).

Če je $\eta \ll 1$, približno velja $a = a_0 \eta^2/2$, $t = a_0 \eta^3/6c$, tako da je

$$a \approx \left(\frac{9a_0 c^2}{2} \right)^{1/3} t^{2/3}. \quad (112.11)$$

Gostota snovi je

$$\mu = \frac{1}{6\pi k t^2} = \frac{8 \times 10^5}{t^2}. \quad (112.12)$$

(kjer je numerična vrednost podana za gostoto, izraženo v enotah gcm^{-3} , in čas, izražen v sekundah). Poudarimo naj, da je v tej limiti funkcija $\mu(t)$ univerzalna v tem smislu, da ni odvisna od parametra a_0 .

Ko gre $a \rightarrow 0$, gre gostota μ proti neskončnosti. Ko pa $\mu \rightarrow \infty$, postane tudi pritisk visok, zato moramo pri obravnavi metrike v tem področju uporabiti nasprotni primer največjega

*Da ne bo nejasnosti (do katerih bi lahko prišlo, če upoštevamo ugotovitev iz § 111, da je četverec gibalne količine celotnega zaprtega vesolja enak nič), moramo poudariti, da je M vsota mas teles, če vsako telo obravnavamo ločeno od ostalih in ne upoštevamo medsebojnih gravitacijskih interakcij.

možnega pritiska (pri dani gostoti energije ϵ). To pomeni, da moramo uporabiti enačbo stanja

$$p = \frac{\epsilon}{3}$$

(glej opombo na strani 245). Iz enačbe (112.6) tedaj dobimo

$$\epsilon a^4 = \text{konst} \equiv \frac{3c^4 a_1^2}{8\pi k} \quad (112.13)$$

(a_1 je nova konstanta), iz enačb (112.7) in (112.3) pa sledita še zvezi

$$a = a_1 \sin \eta, \quad t = \frac{a_1}{c}(1 - \cos \eta). \quad (112.14)$$

Ker je to rešitev smiselno obravnavati le pri zelo visokih vrednostih ϵ (torej pri majhnem a), smemo privzeti, da je $\eta \ll 1$. Tedaj je $a \approx a_1 \eta$, $t \approx a_1 \eta^2 / 2c$, in je

$$a = \sqrt{2a_1 c t}. \quad (112.15)$$

Tedaj je

$$\frac{\epsilon}{c^2} = \frac{3}{32\pi k t^2} = \frac{4.5 \times 10^5}{t^2} \quad (112.16)$$

(enačba ponovno ni odvisna od parametrov).

Torej gre tudi v tem primeru a proti 0, ko gre t proti nič, tako da je vrednost $t = 0$ singularna točka prostorsko-časovne metrike izotropnega modela (v zaprtem modelu ta ugotovitev velja tudi v drugi točki, v kateri je $a = 0$). Iz (112.15) vidimo, da postane ob zamenjavi predznaka t količina $a(t)$ imaginarna, njen kvadrat pa negativen. Vse štiri komponente g_{ik} v (112.2) bi tedaj bile pozitivne in tudi determinanta g bi bila pozitivna. Takšna metrika nima fizikalnega pomena. To pomeni, da ni fizikalno smiselno metriko analitično podaljšati onkraj singularnosti.

§113 Odprt izotropen model

Rešitev, ki ustreza izotropnemu prostoru z negativno ukrivljenostjo ("*odprt model*"), dobimo po postopku, ki je podoben tistemu iz predhodnega razdelka. Namesto (112.2) imamo sedaj

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \{ d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \}. \quad (113.1)$$

Ponovno namesto t vpeljemo spremenljivko η , definirano z $c dt = a d\eta$; dobimo

$$ds^2 = a^2(\eta) \{ d\eta^2 - d\chi^2 - \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \}. \quad (113.2)$$

Ta izraz lahko formalno dobimo iz (112.4), če η , χ in a nadomestimo z $i\eta$, $i\chi$ in ia . Zato lahko tudi enačbe polja dobimo neposredno z enako substitucijo iz enačb (112.5) in (112.6). Enačba (112.6) ostane enaka:

$$3 \ln a = - \int \frac{d\epsilon \epsilon + p}{+} \text{konst}, \quad (113.3)$$

namesto (112.5) pa dobimo

$$\frac{8\pi k}{c^2} \epsilon = \frac{3}{a^4} (a'^2 - a^2). \quad (113.4)$$

Podobno dobimo namesto (112.7) enačbo

$$\eta = \pm \int \frac{da}{a \sqrt{\frac{8\pi k}{3c^4} \epsilon a^2 + 1}}. \quad (113.5)$$

Za snov v obliki prahu se rešitev glasi *

$$a = a_0 (\cosh \eta - 1), \quad t = \frac{a_0}{c} (\sinh \eta - \eta), \quad (113.6)$$

$$\mu a^3 = \frac{3c^2}{4\pi k} a_0. \quad (113.7)$$

Enačbi (113.6) določata funkcijo $a(t)$ v parametrični obliki. V nasprotju z zaprtim modelom se tu krivinski polmer spreminja monotonno, in sicer narašča od nič pri $t = 0$ ($\eta = 0$) k neskončnosti, ko gre $t \rightarrow \infty$ ($\eta \rightarrow \infty$). Zato gostota snovi pada monotonno od neskončne vrednosti pri $t = 0$ (če je $\eta \ll 1$, je monotonno padanje približno podano z isto enačbo (112.12) kot v zaprtim modelu).

Pri velikih gostotah rešitev (113.6)-(113.7) ne velja, zato moramo ponovno uporabiti izraz $p = \epsilon/3$. Ponovno dobimo enačbo

$$\epsilon a^4 = \text{konst} \equiv \frac{3c^4 a_1^2}{8\pi k}, \quad (113.8)$$

funkcija $a(t)$ pa je podana z

$$a = a_1 \sinh \eta, \quad t = \frac{a_1}{c} (\cosh \eta - 1),$$

kar nam pri $\eta \ll 1$ da

$$a = \sqrt{2a_1 ct} \quad (113.9)$$

[za $\epsilon(t)$ velja ista enačba (112.16) kot prej]. Tudi v odprtem modelu ima metrika torej singularnost (vendar ima v nasprotju z zaprtim modelom le eno samo).

Obstaja še limitni primer obravnavanih rešitev, ki ustreza neskončnemu polmer ukrivljenosti vesolja, torej modelu z ravno (evklidsko) metriko. Interval ds^2 lahko v takšnem prostoru-času zapišemo kot

$$ds^2 = c^2 dt^2 - b^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (113.10)$$

*Omenimo naj, da lahko s transformacijo

$$r = Ae^\eta \sinh \chi, \quad c\tau = Ae^\eta \cosh \chi, \\ Ae^\eta = \sqrt{c^2 \tau^2 - r^2}, \quad \tanh \chi = \frac{r}{c\tau},$$

izraz (113.2) prevedemo na "konformno-galilejsko" obliko

$$ds^2 = f(r, \tau)[c^2 d\tau^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)].$$

Če postavimo $A = a_0/2$, kot v primeru (113.6), dobimo

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a_0}{2\sqrt{c^2 \tau^2 - r^2}}\right)^4 [c^2 d\tau^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$$

(V. A. Fock, 1955). Za velike vrednosti $\sqrt{c^2 \tau^2 - r^2}$ (ki ustrezajo $\eta \gg 1$), postane ta metrika galilejska, kar je pričakovano, saj gre krivinski polmer proti neskončnosti.

V koordinatah r, θ, ϕ, τ snov ne miruje in porazdelitev ni homogena; izkaže se, da je porazdelitev in gibanje snovi središčno simetrično okoli poljubne točke v prostoru, ki si jo izberemo kot izhodišče za koordinate r, θ, ϕ .

(za prostorske koordinate smo si izbrali kartezične koordinate x, y, z). Časovno odvisni faktor pred diferencialom prostorske dolžine ne spremeni dejstva, da je prostorska metrika evklidska, saj je ob istem času t ta faktor konstanten in ga lahko z ustrezno koordinatno transformacijo postavimo na ena. Izračun, ki je podoben tistemu iz prejšnjega odstavka, vodi k naslednjim enačbam:

$$\frac{8\pi k}{c^2}\epsilon = \frac{3}{b^2} \left(\frac{db}{dt} \right)^2, \quad 3 \ln b = - \int \frac{d\epsilon}{p + \epsilon} + \text{konst.}$$

Če je pritisk nizek, dobimo

$$\mu b^3 = \text{konst}, \quad b = \text{konst } t^{2/3}. \quad (113.11)$$

Pri majhnem t moramo ponovno upoštevati izraz $p = \epsilon/3$. Tako dobimo

$$\epsilon b^4 = \text{konst}, \quad b = \text{konst} \sqrt{t}. \quad (113.12)$$

Tudi v tem primeru ima metriko singularno točko ob času $t = 0$.

Poudarimo naj, da vse izotropne rešitve obstajajo le, če je gostota snovi od nič različna; v praznem prostoru Einsteinove enačbe takšnih rešitev nimajo. * Omenimo naj še, da so z matematičnega vidika te rešitve posebni primeri bolj splošne množice rešitev, ki vsebujejo tri fizikalno različne poljubne funkcije prostorskih koordinat (glej nalogo).

§114 Rdeči premik

Poglavitna lastnost dobljenih rešitev je, da niso stacionarne. metrike; polmer ukrivljenosti prostora je odvisen od časa. Sprememba krivinskega polmera vodi k spremembi vseh razdalj med telesi v prostoru, kar je razvidno že iz zapisa metrike, saj je prostorska razdalja dl sorazmerna z a . Ko se a povečuje, se telesa v prostoru "oddaljujejo" eno od drugega (v odprtem modelu a narašča pri $\eta > 0$, v zaprtem modelu pa na intervalu $0 < \eta < \pi$).

Opazovalcu na enem izmed teles se bo zdelo, kot da se vsa ostala telesa gibljejo v radialni smeri stran od opazovalca. Hitrost tega "oddaljevanja" ob času t je sorazmerna z oddaljenostjo med telesi.

To teoretično napoved moramo primerjati s temeljnim astronomskim dejstvom – rdečim premikom spektralnih črt galaksij. Če premike razložimo z Dopplerjevim pojavom, lahko sklenemo, da se galaksije oddaljujejo, kar pomeni da se vesolje danes širi. †

Oglejmo si širjenje svetlobnega žarka v izotropnem prostoru. Pri tem je primerno upoštevati dejstvo, da vzdolž svetovnice svetlobnega signala velja $ds = 0$. Točko, iz katere je svetloba izsevana, si izberemo kot izhodišče koordinatnega sistema χ, θ, ϕ . Zaradi simetrije je

*Za $\epsilon = 0$ dobimo iz (113.5) $a = a_0 e^\eta = ct$ [enačbi (112.7) pa nimata pomena, saj sta korena imaginarna]. Metriko

$$ds^2 = c^2 dt^2 - c^2 t^2 \{ d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \}$$

lahko s substitucijo $r = ct \sinh \chi$, $\tau = t \cosh \chi$ pretvorimo v obliko

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

kar pa je metrika galilejskega prostora-časa.

†Sklep, da se telesa oddaljujejo, ko $a(t)$ narašča, je možen le, če je interakcijska energija snovi majhna v primerjavi s kinetično energijo, ki jo ima snov zaradi oddaljevanja; ta pogoj je za zadosti oddaljene galaksije vedno izpolnjen. V nasprotnem primeru so medsebojne oddaljenosti določene v največji meri z njihovo medsebojno interakcijo; zaradi tega razširjanja vesolje nima vpliva ne velikost nebul samih, še manj pa na velikost zvezd.

očitno, da se bo svetloba širila radialno, torej vzdolž črte s konstantnima θ in ϕ . Zaradi tega v (112.4) ali (113.2) postavimo $d\theta = d\phi = 0$, in sledi $ds^2 = a^2(d\eta^2 - d\chi^2)$. Če to izenačimo z nič, dobimo $d\eta = \pm d\chi$, po integraciji pa dobimo

$$\chi = \pm\eta + \text{konst.} \quad (114.1)$$

Za žarke, ki potujejo stran od koordinatnega izhodišča, si moramo izbrati pozitiven predznak, za žarke, ki se izhodišču približujejo, pa negativen predznak. V tej obliki enačba (114.1) velja tako za odprt kot za zaprt model. S pomočjo enačb iz predhodnega razdelka, lahko zapišemo razdaljo, ki jo žarek prepotuje, kot funkcijo časa.

V odprtem modelu svetlobni žarek, ki je odposlan iz neke točke, potuje vedno dlje od te točke. V zaprtem modelu lahko svetlobni žarek, ki je odposlan iz začetne točke, pripotuje v “konjugirani pol” prostora (kar ustreza spremembi χ od 0 do π), nato pa se prične približevati izhodiščni točki. Potovanje žarka “okoli prostora” in njegov povratek v začetno točko ustrežata spremembi χ od 0 do 2π . Iz (114.1) je razvidno, da se ob tem tudi η spremeni za 2π , kar pa je nemogoče (izjema je tisti primer, ko svetloba odpotuje ob trenutku, ko je $\eta = 0$). Zato se svetlobni žarek ne more vrniti v začetno točko po krožni poti “okoli vesolja”.

Svetlobni žarek, ki se približuje točki opazovanja (v koordinatnem izhodišču), ustreza negativni predznak η v enačbi (114.1). Če žarek prispe v to točko ob $t = t(\eta_0)$, mora tedaj za $\eta = \eta_0$ veljati $\chi = 0$, zato je gibalna enačba takšnega žarka

$$\chi = \eta_0 - \eta. \quad (114.2)$$

Od tod je razvidno, da lahko opazovalca v točki $\chi = 0$ dosežejo ob času $\tau(\eta_0)$ le tisti žarki, ki so odpotovali iz točk, ki so “oddaljene” največ za $\chi = \eta_0$.

Ta ugotovitev, ki velja tako za odprti kot za zaprti model, je ključna. Pomeni namreč, da ob poljubnem trenutku $t(\eta)$ in v poljubni točki v prostoru ne moremo opazovati celotnega vesolja, temveč le tisti del, ki ustreza pogoju $\chi \leq \eta$. Matematično povedano je “vidno območje” prostora presek štiridimenzionalnega prostora s svetlobnim stožcem. Izkaže se, da je ta presek končen tako za odprt kot za zaprt model (količina, ki je v odprtem modelu neskončna, je presek vesolja s hiperploskvijo $t = \text{konst}$, ki ustreza prostoru, kjer vse točke opazujemo ob enem in istem času). Zaradi tega je razlika med odprtim in zaprtim modelom manj dramatična, kot bi na začetku morda pričakovali.

Bolj kot je opazovano območje ob danem času oddaljeno od opazovalca, bolj oddaljenemu (zgodnejšemu) času ustreza. Oglejmo si okroglo ploskev, ki je geometrijsko nahajališče vseh točk, iz katerih je svetloba odpotovala ob času $t(\eta - \chi)$, in ki jih opazujemo ob času $t(\eta)$. Površina te ploskve je $4\pi a^2(\eta - \chi) \sin^2 \chi$ (v zaprtem modelu) ali $4\pi a^2(\eta - \chi) \sinh^2 \chi$ (v odprtem modelu). Ko se ploskev oddaljuje od opazovalca, se površina “vidne krogle” povečuje od nič (za $\chi = 0$), doseže maksimum, nato pa ponovno upada in doseže vrednost nič pri $\chi = \eta$ (kjer je $a(\eta - \chi) = a(0) = a$). To pomeni, da presek vesolja s svetlobnim stožcem ni le omejen, temveč tudi zaprt. Zdi se, ko da je sklenjen v točki, ki je “konjugirana” opazovalcu; vidimo jo lahko v poljubni smeri v prostoru. V tej točki je $\epsilon \rightarrow \infty$, zato lahko vsaj načeloma opazujemo vse razvojne stopnje snovi.

Celotna količina snovi, ki jo lahko vidimo, je v odprtem modelu enaka

$$M_{\text{obs}} = 4\pi \int_0^\eta \mu a^3 \sinh^2 \chi \cdot d\chi.$$

Vstavimo μa^3 iz (113.7) in dobimo

$$M_{\text{obs}} = \frac{3c^2 a_0}{2k} (\sinh \eta \cosh \eta - \eta). \quad (114.3)$$

Ta količina narašča preko vseh meja, ko gre $\eta \rightarrow \infty$. V zaprtem modelu je naraščanje M_{obs} omejeno s celotno maso M ; na podoben način tu dobimo

$$M_{\text{obs}} = \frac{M}{\pi} (\eta - \sin \eta \cos \eta). \quad (114.4)$$

Ko gre η od 0 do π , ta količina naraste od 0 do M ; nadaljnje naraščanje M_{obs} , ki ga ta enačba napoveduje za $\eta > \pi$, ni resnično, saj ustreza dejstvu, da bi v vesolju, ki se “krči”, oddaljena telesa videli dvakrat (zaradi svetlobe, ki “obkroži vesolje” v obeh smereh).

Sedaj si oglejmo, kako se spremeni frekvenca svetlobe, ko ta potuje po izotropnem vesolju. Najprej pokažimo naslednje dejstvo. Naj se v neki točki v prostoru zgodi dva dogodka, ki sta oddaljena za časovni interval $dt = (1/c)a(\eta) d\eta$. Če ob teh dogodkih odpošljemo svetlobna signala, ki jo opazujemo v neki drugi točki v prostoru, potem bo med trenutkoma, ob katerih zaznamo signala, minil časovni interval, ki ustreza isti spremembi $d\eta$ količine η kot v začetni točki. To sledi iz enačbe (114.1), po kateri je sprememba količine η med potovanjem svetlobnega žarka od ene točke do druge odvisna le od razlike koordinate χ med tema točkama. Ker pa se med potovanjem krivinski polmer a spremeni, sta časovni interval t med trenutkom, ko odpošljemo prvi, in trenutkom, ko odpošljemo drugi signal, in časovni interval med trenutkom, ko sprejmemo prvi, in trenutkom, ko sprejmemo drugi signal, različna; razmerje med intervaloma je enako razmerju ustreznih vrednosti a .

Od tod med drugi sledi tudi to, da se periode svetlobnega valovanja, merjene v svetovnem času t , prav tako spreminjajo vzdolž žarka, in sicer so sorazmerne z a . Zato med potovanjem žarka vzdolž poti velja

$$\omega a = \text{konst.} \quad (114.5)$$

Predstavljajmo si, da ob času $t(\eta)$ opazujemo svetlobo, ki jo je oddal vir, katerega oddaljenost ustreza dani vrednosti koordinate χ . Po enačbi (114.1) je trenutek, ob katerem je bila svetloba oddana, enak $t(\eta - \chi)$. Če je ω_0 frekvenca svetlobe ob času, ko je bila ta oddana, potem iz (114.5) sledi, da je opazovana frekvenca ω enaka

$$\omega = \omega_0 \frac{a(\eta - \chi)}{a(\eta)}. \quad (114.6)$$

Ker funkcija $a(\eta)$ monotonno narašča, velja $\omega < \omega_0$, torej frekvenca svetlobe upada. To pomeni, da so v spektru svetlobe, ki prihaja proti nam, črte zamaknjene proti rdečem v primerjavi s spektrom iste snovi, ki bi jo opazovali ob običajnih pogojih. Pojav “rdečega premika” je v bistvu Dopplerjev efekt zaradi medsebojnega “oddaljevanja” galaksij.

Velikost rdečega premika, ki jo merimo na primer kot razmerje ω/ω_0 med zamaknjeno in nezamaknjeno frekvenco, je (ob danem času opazovanja) odvisna od oddaljenosti, na kateri se nahaja izvor [v enačbo (114.6) moramo vstaviti koordinato χ svetlobnega vira]. Pri zadosti majhnih oddaljenostih lahko razvijemo $a(\eta - \chi)$ v potenčno vrsto po χ in obdržimo prva dva člena:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 - \chi \frac{a'(\eta)}{a(\eta)}$$

(črtica označuje odvod po η). Omenimo lahko, da je zmnožek $\chi a(\eta)$ kar enak razdalji l od opazovanega izvora. Diferencial “radialne” dolžine je enak $dl = a d\chi$; pri integraciji tega izraza se pojavi vprašanje, kako lahko razdaljo določimo s fizikalnim opazovanjem. Pri določanju te razdalje moramo vzeti vrednosti a v različnih točkah vzdolž integracijske poti ob različnih časovnih trenutkih (integracija z $\eta = \text{konst}$ bi ustrezala sočasnemu opazovanju vseh točk na poti, kar je fizikalno nemogoče). Vendarle smemo pri “majhnih” razdaljah zanemariti spremembo a vzdolž integracijske poti, zato lahko preprosto zapišemo $l = a\chi$ in pri tem vzamemo vrednost a , ki velja ob času opazovanja.

Kot končni rezultat dobimo za relativni frekvenčni premik z naslednjo enačbo:

$$z = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -\frac{H}{c}l, \quad (114.7)$$

kjer smo uvedli zapis

$$H = c \frac{a'(\eta)}{a^2(\eta)} = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \quad (114.8)$$

za “*Hubblevo konstanto*”. Ob danem trenutku opazovanja je ta količina neodvisna od l . Zato je relativni premik spektralnih črt sorazmeren z razdaljo od svetlobnega izvora.

Če si rdeči premik interpretiramo kot Dopplerjev efekt, lahko določimo ustrezno hitrost v oddaljevanja galaksije od opazovalca. Zapišemo $z = v/c$ in s primerjavo z (114.7) dobimo

$$v = Hl \quad (114.9)$$

(to enačbo lahko dobimo tudi neposredno, če izračunamo odvod $v = d(a\chi)/dt$).

Astronomske meritve potrjujejo zakon (114.7), vendar je določanje vrednosti Hubbleve konstante oteženo zaradi nedoločenosti pri merjenju kozmoloških razdalj do oddaljenih galaksij. Zadnje meritve so

$$\begin{aligned} H &\approx 0.8 \times 10^{-10} \text{ yr}^{-1} = 0.25 \times 10^{-17} \text{ s}^{-1}, \\ 1/H &\approx 4 \times 10^{17} \text{ s} = 1.3 \times 10^{10} \text{ yr}. \end{aligned} \quad (114.10)$$

Ta vrednost je tolikšna, da je “hitrost oddaljevanja” večja za 75 km/s za vsak dodatni megaparsek oddaljenosti. *

V enačbo (113.4) vstavimo $\epsilon = \mu c^2$ in $H = ca'/a^2$ in za odprti model dobimo naslednjo enačbo:

$$\frac{c^2}{a^2} = H^2 - \frac{8\pi k}{3}\mu. \quad (114.11)$$

Dobljen izraz združimo z enačbo

$$H = \frac{c \sinh \eta}{a_0 (\cosh \eta - 1)^2} = \frac{c}{a} \coth \frac{\eta}{2},$$

in sledi

$$\cosh \frac{\eta}{2} = H \sqrt{\frac{3}{8\pi k\mu}}. \quad (114.12)$$

*En megaparsek Mpc je enak 3.0810^{22} m. Hubble je hitrost oddaljevanja ocenil na 500 km/s/Mpc. Kasnejša astronomska opazovanja in bolj natančno določanje razdalj v vesolju so pripeljala do med seboj nasprotujočih se ocen od okoli 60 km/s/Mpc (Allana Sandage), do 80 km/s/Mpc (Wendy Freedman). Razprava še ni zaključena. (Glej “New age of precision cosmology”, Physics World, stran ??, julij 1999.) *op. prev.*

Za zaprti model bi dobili

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{8\pi k}{3}\mu - H^2, \quad (114.13)$$

$$\cos \frac{\eta}{2} = H \sqrt{\frac{3}{8\pi k\mu}}. \quad (114.14)$$

S primerjavo (114.11) in (114.13) ugotovimo, da je ukrivljenost vesolja negativna oziroma pozitivna, če je razlika $(8\pi k/3)\mu - h^2$ negativna oziroma pozitivna. Razlika je enaka nič pri $\mu = \mu_k$, kjer je

$$\mu_k = \frac{3H^2}{8\pi k}. \quad (114.15)$$

Z vrednostjo (114.10) dobimo $\mu_k \approx 10^{-29} \text{ g/cm}^3$. S trenutnim vedenjem o vesolju lahko vrednost povprečne gostote snovi v vesolju le zelo grobo ocenimo. Približek, dobljen upoštevajoč število galaksij in njihovo povprečno maso, nam da vrednost okoli $3 \times 10^{-31} \text{ g/cm}^3$. Ta vrednost je tridesetkrat manjša od μ_k , kar govori v prid odprtemu modelu. Vendar četudi ne bi upoštevali dvomljive zanesljivosti tega števila, moramo vedeti, da ne vključuje možnega obstoja metagalaktične temne snovi, ki bi lahko močno povečala povprečno gostoto snovi.

Opozorimo naj na neenakost, ki jo lahko dobimo, če poznamo vrednost konstante H . Pri odprtem modelu velja $H = \frac{c \sinh \eta}{a_0 (\cosh \eta - 1)^2}$, od koder sledi

$$t = \frac{a_0}{c} (\sinh \eta - \eta) = \frac{\sinh \eta (\sinh \eta - \eta)}{H (\cosh \eta - 1)^2}.$$

Ker je $0 < \eta < \infty$, mora veljati

$$\frac{2}{3H} < t < \frac{1}{H}. \quad (114.16)$$

Podobno dobimo pri zaprtem modelu

$$t = \frac{\sinh \eta (\eta - \sin \eta)}{H (1 - \cos \eta)^2}. \quad (114.17)$$

Naraščajočemu $a(\eta)$ ustreza interval $0 < \eta < \pi$, zato dobimo

$$0 < t < \frac{2}{3H}. \quad (114.18)$$

Sedaj določimo jakost I svetlobe, ki prihaja k opazovalcu od izvora, ki se nahaja na razdalji, ki ustreza neki določeni vrednosti koordinate χ . Gostota pretoka svetlobne energije v točki opazovanja je obratno sorazmerna s površino sfere s središčem v izvoru in ki poteka skozi položaj opazovalca; v prostoru z negativno ukrivljenostjo je ploščina površine sfere enaka $4\pi a^2 \sinh^2 \chi$. Svetloba, ki jo izvor izseva v času $dt = (1/c)a(\eta - \chi) d\eta$, bo opazovalca dosegla v časovnem intervalu

$$dt \frac{a(\eta)}{a(\eta - \chi)} = \frac{1}{c} a(\eta) d\eta.$$

Ker je jakost definirana kot pretok svetlobne energije na enoto časa, dobimo v izrazu za I faktor $a(\eta - \chi)/a(\eta)$. Upoštevati moramo še, da je energija valovnega paketa sorazmerna z njegovo frekvenco [glej (53.9)]; ker se frekvenca med širjenjem svetlobe spreminja po pravilu (114.5), dobimo v I še dodatni faktor $a(\eta - \chi)/a(\eta)$. Zato lahko končno zapišemo jakost kot

$$I = \text{konst} \frac{a^2(\eta - \chi)}{a^4(\eta) \sinh^2 \chi}. \quad (114.19)$$

V zaprtem modelu bi podobno dobili

$$I = \text{konst} \frac{a^2(\eta - \chi)}{a^4(\eta) \sin^2 \chi}. \quad (114.20)$$

Te enačbi določata odvisnost navidezne svetlosti opazovanega predmeta od njegove oddaljenosti (pri poznani absolutni svetlosti). Pri majhnih χ lahko zapišemo $a(\eta - \chi) \approx a(\eta)$, od koder sledi $I \sim 1/a^2(\eta)\chi^2 = 1/l^2$, kar je običajni zakon za upadanje jakosti, po katerem je jakost obratno sorazmerna s kvadratom razdalje.

Končno si oglejmo še problematiko tako imenovanega lastnega gibanja teles. Ko govorimo o gostoti in gibanju snovi, imamo ves čas v mislih povprečno gostoto in povprečno gibanje; v opazovalnem sistemu, ki smo ga ves čas uporabljali, je tako hitrost povprečnega gibanja enaka nič. Dejanske hitrosti teles bodo nihale okoli te povprečne vrednosti. Hitrosti lastnega gibanja teles se bodo s časom spreminjale. Poiščimo zakon, ki opisuje te spremembe. Obravnavajmo prosto telo in postavimo izhodišče koordinatnega sistema v poljubno točki na njegovi trajektoriji. Tedaj bo trajektorija radialna črta z $\theta = \text{konst}$ in $\phi = \text{konst}$. Hamilton-Jacobijeva enačba (87.6), v katero vstavimo vrednosti g^{ik} , se glasi

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \chi}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 + m^2 c^2 a^2(\eta) = 0. \quad (114.21)$$

Ker χ ne nastopa v koeficientih te enačbe (χ je torej ciklična koordinata), velja ohranitveni zakon $\partial S / \partial \chi = \text{konst}$. Gibalna količina p telesa je po definicije enaka $p = \partial S / \partial l = \partial S / a \partial \chi$. Za prosto telo je torej zmnožek pa konstanten:

$$pa = \text{konst}. \quad (114.22)$$

Če vpeljemo hitrost v lastnega gibanja telesa z

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

dobimo

$$\frac{va}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \text{konst}. \quad (114.23)$$

Zakon o spreminjanju hitrosti s časom je podan s temi izrazi. Ko a narašča, hitrost v monotono upada.

§115 Gravitacijska stabilnost izotropnega vesolja

Zanimajo nas lastnosti majhnih motenj izotropnega modela, torej vprašanje o gravitacijski stabilnosti (E. M. Lišic, 1946). Omejili se bomo na obravnavo motenj na majhnih območjih prostora, katerih prečna razsežnost je majhna v primerjavi s polmerom a . *

V vsakem takšnem območju lahko predpostavimo, da je prostorska metrika v prvem približku evklidska, zato metriko (111.8) ali (111.12) nadomestimo z metriko

$$dl^2 = a^2(\eta)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (115.1)$$

*Bolj podrobno predstavitev te naloge, ki vključuje tudi obravnavo motenj na območjih, ki so primerljiva z a , lahko bralec najde v *Adv. in Physics*, **12**, 208 (1963).

kjer so x, y, z kartezične koordinate, merjene v enotah polmera a . Ponovno uporabimo parameter η kot časovno koordinato.

Ne da bi izgubili na splošnosti bomo moteno polje opisali v sinhronem opazovalnem sistemu, zato za spremembe δg_{ik} metričnega tenzorja zahtevamo pogoja $\delta g_{00} = \delta g_{0\alpha} = 0$. Če identiteto $g_{ik}u^i u^k = 1$ pod temi pogoji variiramo (in upoštevamo, da so nemotene vrednosti komponente četverca hitrosti enake $u^0 = 1/a$, $u^\alpha = 0$), dobimo $g_{00}u^0 \delta u^0 = 0$, od koder sledi $\delta u^0 = 0$. Motnje δu^α so v splošnem od nič različne, zato opazovalni sistem ni več sogibljiv.

Motnje tenzorja prostorske metrike označimo z $h_{\alpha\beta} \equiv \delta\gamma_{\alpha\beta} = -\delta g_{\alpha\beta}$. Tedaj je $\delta\gamma^{\alpha\beta} = -h^{\alpha\beta}$, kjer indekse tenzorja $h_{\alpha\beta}$ dvigujemo z uporabo nemotene metrike $\gamma_{\alpha\beta}$.

V linearnem približku majhne motnje gravitacijskega polja zadostijo enačbi

$$\delta R_i^k - \frac{1}{2}\delta_k^i \delta R = \frac{8\pi k}{c^4} \delta T_i^k. \quad (115.2)$$

V sinhronem opazovalnem sistemu so variacije komponent napetostnega tenzorja (94.9) enake:

$$\delta T_\alpha^\beta = -\delta_\alpha^\beta \delta p, \quad \delta T_0^\alpha = a(p + \epsilon) \delta u^\alpha, \quad \delta T_0^0 = \delta \epsilon. \quad (115.3)$$

Ker sta $\delta \epsilon$ in δp majhni količini, lahko zapišemo $\delta p = (dp/d\epsilon) d\epsilon$, in dobimo zvezo

$$\delta T_\alpha^\beta = -\delta_\alpha^\beta \frac{dp}{d\epsilon} \delta T_0^0. \quad (115.4)$$

Enačbe za δR_i^k lahko dobimo z variacijo izraza (97.10). Ker je nemoten metrični tenzor $\gamma_{\alpha\beta} = a^2 \delta_{\alpha\beta}$, so nemotene vrednosti enake

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{2\dot{a}}{a} \gamma_{\alpha\beta} = \frac{2a'}{a^2} \gamma_{\alpha\beta}, \quad \kappa_\alpha^\beta = \frac{2a'}{a^2} \delta_\alpha^\beta.$$

kjer pika označuje odvod po ct , črtica pa odvod po η . Motnje količin $\kappa_{\alpha\beta}$ in $\kappa_\alpha^\beta = \kappa_{\alpha\gamma} \gamma^{\gamma\beta}$ so

$$\delta \kappa_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} = \frac{1}{a} h'_{\alpha\beta}, \quad \delta \kappa_\alpha^\beta = -h^{\beta\gamma} \kappa_{\alpha\gamma} + \gamma^{\beta\gamma} h_{\alpha\gamma} = h_\alpha^\beta = \frac{1}{a} h_\alpha^{\beta'},$$

kjer je $h_\alpha^\beta = \gamma^{\beta\gamma} h_{\alpha\gamma}$. Za evklidsko metriko (115.1) so nemotene vrednosti tridimenzionalnega tenzorja P_α^β enake nič. Variacije δP_α^β izračunamo s pomočjo enačb (108.3) in (108.4): očitno lahko δP_α^β izrazimo z $\delta\gamma_{\alpha\beta}$ na enak način, kot lahko četverni tenzor δR_{ik} zapišemo z δg_{ik} , pri čemer moramo vse tenzorske operacije opraviti v tridimenzionalnem prostoru z metriko (115.1); ker je ta metrika evklidska, se vsi kovariantni odvodi poenostavijo na navadne odvode po koordinatah x^α (pri kontravariantnem odvajanju moramo deliti še z a^2). Če vse to upoštevamo (in odvode po t spremenimo v odvode po η), s preprostim izračunom dobimo:

$$\begin{aligned} \delta R_\alpha^\beta &= -\frac{1}{2a^2} (h_{\alpha,\gamma}^{\gamma,\beta} + h_{\gamma,\alpha}^{\beta,\gamma} - h_{\alpha,\gamma}^{\beta,\gamma} - h_{,\alpha}^{\beta,\gamma}) - \frac{1}{2a^2} h_\alpha^{\beta''} - \frac{a'}{a^3} h_\alpha^{\beta'} - \frac{a'}{2a^3} h \delta_\alpha^\beta, \\ \delta R_0^0 &= -\frac{1}{2a^2} h'' - \frac{a'}{2a^3} h', \\ \delta R_0^\alpha &= \frac{1}{2a^2} (h^{,\alpha} - h_\beta^{\alpha,\beta})', \end{aligned} \quad (115.5)$$

($h \equiv h_\alpha^\alpha$). Tako spodnji kot zgornji indeksi, ki sledijo vejici, označujejo navadno odvajanje po koordinati x^α (v nadaljevanju zaradi enotnosti zapisa pišemo indekse spodaj in zgoraj, čeprav to ni potrebno).

Končne izraze za motnjo h_α^β dobimo, če v (115.4) vstavimo komponente δT_i^k , izražene z δR_i^k v skladu z (115.2). Za te enačbe je primerno izbrati enačbe, ki jih dobimo iz (115.4) za $\alpha \neq \beta$, in enačbe, ki jih dobimo s skrčenjem po α, β . Te so

$$(h_{\alpha,\gamma}^{\gamma,\beta} + h_{\gamma,\alpha}^{\beta,\gamma} - h_{,\alpha}^{\beta} - h_{\alpha,\gamma}^{\beta,\gamma}) + h_\alpha^{\beta''} + \frac{2a'}{a} h_\alpha^{\beta'} = 0, \quad \alpha \neq \beta,$$

$$\frac{1}{2}(h_{\gamma,\delta}^{\delta,\gamma} - h_{,\gamma}^{\gamma}) \left(1 + 3 \frac{dp}{d\epsilon}\right) + h'' + h' \frac{a'}{a} \left(2 + 3 \frac{dp}{d\epsilon}\right) = 0. \quad (115.6)$$

Motnje gostote in hitrosti snovi lahko določimo iz poznanega h_α^β z uporabo enačb (115.2) in (115.3). Tako dobimo naslednji izraz za relativno spremembo gostote:

$$\frac{\delta\epsilon}{\epsilon} = \frac{c^4}{8\pi k\epsilon} \left(\delta R_0^0 - \frac{1}{2}\delta R\right) = \frac{c^4}{16\pi k\epsilon a^2} \left(h_{\alpha,\beta}^{\beta,\alpha} - h_{,\alpha}^{\alpha} + \frac{2a'}{a}h'\right). \quad (115.7)$$

Nekatere izmed rešitev enačbe (115.6) lahko odpravimo s preprosto pretvorbo opazovalnega sistema (ki ne uniči pogoja sinhronizma), zato te ne predstavljajo realne fizikalne spremembe metrike. Obliko takšnih rešitev lahko določimo z uporabo enačb (1) in (2) v nalogi 3 v § 97. Če vstavimo nemotene vrednosti $\gamma_{\alpha\beta} = a^2\delta_{\alpha\beta}$, dobimo naslednji izraz za navidezno motnjo metrike:

$$h_\alpha^\beta = f_{0,\alpha}^\beta \int \frac{d\eta}{a} + \frac{a'}{a^2} f_0 \delta_\alpha^\beta + (f_\alpha^\beta + f^\beta{}_{,\alpha}), \quad (115.8)$$

kjer so f_0 in f_α poljubne (majhne) funkcije koordinat x, y, z .

Ker je obravnavano območje majhno in smo zato predpostavili, da je metrika evklidska, lahko poljubno motnjo v takšnem območju razvijemo v ravne valove. Če uporabimo x, y, z kot kartezične koordinate, merjene v enotah a , lahko periodični prostorski faktor za ravne valove zapišemo kot $e^{i\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}$, kjer je $\mathbf{n}$ brezdimenzijski vektor, ki predstavlja valovni vektor, merjen v enotah $1/a$ (valovni vektor je $\mathbf{k} = \mathbf{n}/a$). Če imamo motnjo, ki se razteza na območju prostora velikosti $\sim l$, bodo v razvoju prisotni valovi dolžine $\lambda = 2\pi a/n \sim l$. Če motnjo omejimo na območje velikosti $l \ll a$, s tem povzročimo, da je število n zelo veliko ($n \gg 2\pi$).

Gravitacijske motnje lahko razdelimo na tri vrste. Ta razdelitev se poenostavi na določanje možnih oblik ravnih valov, s katerimi lahko zapišemo simetrični tenzor $h_{\alpha\beta}$. Tako dobimo naslednje tipe:

1. Z uporabo skalarne funkcije

$$Q = e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}, \quad (115.9)$$

lahko tvorimo vektor $\mathbf{P} = \mathbf{n}Q$ in tenzorja

$$Q_\alpha^\beta = \frac{1}{3}\delta_\alpha^\beta Q, \quad P_\alpha^\beta = \left(\frac{1}{3}\delta_\alpha^\beta - \frac{n_\alpha n^\beta}{n^2}\right) Q. \quad (115.10)$$

Takšni ravni valovi ustrezajo motnjam, v katerih se poleg gravitacijskega polja spremeni tudi hitrost in gostota snovi, torej imamo opravka z motnjami, ki jih spremlja goščenje in redčenje snovi. Tenzor motnje h_α^β lahko zapišemo kot funkcijo tenzorjev Q_α^β in P_α^β , motnjo hitrosti z vektorjem $\mathbf{P}$, motnjo goste pa s skalarjem Q .

2. Z uporabo prečnega vektorskega valovanja

$$\mathbf{S} = s e^{i\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}, \quad \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (115.11)$$

lahko sestavimo tenzor $(n^\beta S_\alpha + n_\alpha S^\beta)$; tej količini ne ustreza noben skalar, saj je $\mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = 0$. Ti valovi ustrezajo motnji, v kateri se poleg gravitacijskega polja spreminja tudi hitrost snovi, gostota snovi pa je ves čas enaka; imenujemo jih lahko tudi vrtilna motnja.

3. Prečno tenzorsko valovanje

$$G_\alpha^\beta = g_\alpha^\beta e^{i\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}, \quad g_\alpha^\beta n_\beta = 0. \quad (115.12)$$

Iz te količine ne moremo sestaviti ne vektorja, niti skalarja. Takšno valovanje ustreza motnji gravitacijskega polja, v kateri snov ostane pri miru in je enakomerno porazdeljena po prostoru. Drugače povedano, to so gravitacijski valovi v izotropnem vesolju.

Motnje prve vrste so še posebno zanimive. Postavimo

$$h_\alpha^\beta = \lambda(\eta) P_\alpha^\beta + \mu(\eta) Q_\alpha^\beta, \quad h = \mu Q. \quad (115.13)$$

Iz (115.7) dobimo relativno spremembo gostote:

$$\frac{\delta\epsilon}{\epsilon} = \frac{c^4}{24\pi k \epsilon a^2} \left[n^2(\lambda + \mu) + \frac{3a'}{a} \mu' \right] Q. \quad (115.14)$$

Enačbe, ki določajo λ in μ , dobimo tako, da (115.13) vstavimo v (115.6):

$$\begin{aligned} \lambda'' + \frac{2a'}{a} \lambda' - \frac{n^2}{3}(\lambda + \mu) &= 0, \\ \mu'' + \mu' \frac{a'}{a} \left(2 + 3 \frac{dp}{d\epsilon} \right) + \frac{n^2}{3}(\lambda + \mu) \left(1 + 3 \frac{dp}{d\epsilon} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (115.15)$$

Ti enačbi imata naslednja delna integrala, ki ustrezata navidezni spremembi metrike, ki jo lahko odpravimo s transformacijo opazovalnega sistema:

$$\lambda = -\mu = \text{konst}, \quad (115.16)$$

$$\lambda = -n^2 \int \frac{d\eta}{a}, \quad \mu = n^2 \int \frac{d\eta}{a} - \frac{3a'}{a^2} \quad (115.17)$$

[prvo dobimo iz (115.8), če uporabimo $f_0 = 0$, $f_\alpha = P_\alpha$; drugo dobimo z $f_0 = Q$, $f_\alpha = 0$].

V zgodnjih fazah razvoja vesolja, ko je stanje snovi dobro opisano z enačbo $p = \epsilon/3$, velja $a \approx a_1 \eta$, $\eta \ll 1$ (to velja tako v odprtem kot v zaprtem modelu). Enačbi (115.15) se tedaj zapišeta

$$\lambda'' + \frac{2}{\eta} - \frac{n^2}{3}(\lambda + \mu) = 0, \quad \lambda'' + \frac{3}{\eta} \mu' + \frac{2n^2}{3}(\lambda + \mu) = 0. \quad (115.18)$$

Ti enačbi lahko preprosto obravnavamo v dveh različnih mejnih primerih, ki ju ločimo po razmerju med velikima količinama n in $1/\eta$.

Najprej predpostavimo, da n ni zelo velik (ali da je η zadosti majhen), tako da je $n\eta \ll 1$. Pri natančnosti, s katero veljata enačbi (115.18), zanju dobimo rešitvi

$$\lambda = \frac{3C_1}{\eta} + C_2 \left(1 + \frac{n^2}{9} \eta^2 \right), \quad \mu = -\frac{2n^2}{3} C_1 \eta + C_2 \left(1 - \frac{n^2}{6} \eta^2 \right), \quad (115.19)$$

kjer sta C_1 in C_2 konstanti; rešitve oblike (115.16) in (115.17) sta izključeni (v našem sedanjem primeru sta to rešitvi, kjer velja $\lambda = -\mu = \text{konst}$ ali $\lambda + \mu \sim 1/\eta^2$). Če $\delta\epsilon/\epsilon$ izračunamo z uporabo (115.14) in (112.16), dobimo naslednja izraza za motnjo metrike in gostote snovi:

$$h_{\alpha}^{\beta} = \frac{3C_1}{\eta} P_{\alpha}^{\beta} + C_2 (Q_{\alpha}^{\beta} + P_{\alpha}^{\beta}),$$

$$\frac{\delta\epsilon}{\epsilon} = \frac{n^2}{9} (C_1 \eta + C_2 \eta^2) Q \quad \text{za} \quad p = \frac{\epsilon}{3}, \quad \eta \ll \frac{1}{n}. \quad (115.20)$$

Konstanti C_1 in C_2 morata zadostiti pogoju, da je motnja majhna ob času η_0 , ko se prvič pojavi: veljati mora $h_{\alpha}^{\beta} \ll 1$ (in zato tudi $\lambda \ll 1$ in $\mu \ll 1$) in $\delta\epsilon/\epsilon \ll 1$. Če te zahteve upoštevamo v (115.20), dobimo neenačbi $C_1 \ll \eta_0$ in $C_2 \ll 1$.

V (115.20) imamo različne člene, ki v razširjajočem se vesolju naraščajo kot različne potence polmera $a = a_1 \eta$. Vendar to naraščanje ne vodi k naraščanju motnje: če uporabimo enačbo (115.20) za vrednosti $\eta \sim 1/n$, vidimo da zaradi zgoraj dobljenih neenakosti za C_1 in C_2 motnja ostane majhna tudi na zgornji meji veljavnosti teh enačb.

Sedaj pa predpostavimo, da je n tako velik, da je $n\eta \gg 1$. Če rešimo (115.18) ob tem privzetku, ugotovimo da lahko najpomembnejša člena v λ in μ zapišemo kot *

$$\lambda = -\frac{\mu}{2} = \text{konst} \cdot \frac{1}{\eta^2} e^{in\eta/\sqrt{3}}.$$

Motena metrika in gostota sta v tem primeru

$$h_{\alpha}^{\beta} = \frac{C}{n^2 \eta^2} (P_{\alpha}^{\beta} - 2Q_{\alpha}^{\beta}) e^{in\eta/\sqrt{3}}, \quad \frac{\delta\epsilon}{\epsilon} = -\frac{C}{9} Q e^{in\eta/\sqrt{3}}$$

$$\text{za} \quad p = \frac{\epsilon}{3}, \quad \frac{1}{n} \ll \eta \ll 1, \quad (115.21)$$

kjer je C kompleksna konstanta, ki izpolnjuje pogoj $|C| \ll 1$. Prisotnost periodičnega faktorja v teh izrazih je povsem pričakovana. Pri velikem n imamo opravka z motnjo, katere prostorska periodičnost je določena z velikim valovnim vektorjem $k = n/a$. Takšne motnje se morajo širiti kot zvočni valovi s hitrostjo

$$u = \sqrt{\frac{dp}{d(\epsilon/c^2)}} = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Zato je časovno odvisni del faze določen podobno kot v geometrijski akustiki z velikim integralom $\int k u dt = n\eta/\sqrt{3}$. Kot vidimo, se amplituda relativnih sprememb gostote ne spreminja, medtem ko amplituda motnje metrike same upada kot a^{-2} v razširjajočem se vesolju. †

Sedaj si oglejmo poznejše obdobje razširjanja vesolja, ko je snov že tako razredčena, da smemo zanemariti njen pritisk ($p = 0$). Omejili se bomo na primer, ko je η majhen, kar

*Faktor $1/\eta^2$ pred eksponentno funkcijo je prvi člen v razvoju po potencah $1/n\eta$. Dobimo ga, če hkrati obravnavamo prva člena v razvoju [kar je utemeljeno v okviru natančnosti, s katero velja enačba (115.18)].

†Hitro se lahko prepričamo, da za $p = \epsilon/3$ velja $n\eta \sim L/\lambda$, kjer je $L \sim u/\sqrt{k\epsilon/c^2}$. Povsem normalno je, da karakteristična dolžina L , ki določa obnašanje motenj z valovno dolžino $\lambda \ll a$, vsebuje le hidrodinamske količine – gostoto snovi ϵ/c^2 in zvočno hitrost u (ter gravitacijsko konstanto k). Poudariti moramo, da motnja narašča, če je $\lambda \gg L$ [v enačbi (115.20)].

ustreza obdobju razvoja, ko je bil polmer a še majhen v primerjavi z današnjo vrednostjo, snov pa je bila že zelo razredčena.

Za $p = 0$ in $\eta \ll 1$, velja $a \approx a_0 \eta^2/2$ in (115.15) se zapišejo kot

$$\lambda'' + \frac{4}{\eta} \lambda' - \frac{n^2}{3} (\lambda + \mu) = 0,$$

$$\mu'' + \frac{4}{\eta} \mu' + \frac{n^2}{3} (\lambda + \mu) = 0.$$

Rešitev teh enačb je

$$\lambda + \mu = 2C_1, \quad \lambda - \mu = 2n^2 \left(\frac{C_1 \eta^2}{15} + \frac{2C_2}{\eta^3} \right).$$

Če izračunamo $\delta\epsilon/\epsilon$ z uporabo (115.14) in (112.12), dobimo:

$$\begin{aligned} h_\alpha^\beta &= C_1(P_\alpha^\beta + Q_\alpha^\beta) + \frac{2n^2 C_2}{\eta^3} (P_\alpha^\beta - Q_\alpha^\beta) \quad \text{za } \eta \ll \frac{1}{n}, \\ h_\alpha^\beta &= \frac{C_1}{15} n^2 \eta^2 (P_\alpha^\beta - Q_\alpha^\beta) + \frac{2n^2 C_2}{\eta^3} (P_\alpha^\beta - Q_\alpha^\beta) \quad \text{za } \frac{1}{n} \ll \eta \ll 1, \\ \frac{\delta\epsilon}{\epsilon} &= \left(\frac{C_1 n^2 \eta^2}{30} + \frac{C_2 n^2}{\eta^3} \right) Q. \end{aligned} \quad (115.22)$$

Vidimo, da $\delta\epsilon/\epsilon$ vsebuje člene, ki naraščajo sorazmerno z a . * Vendar če je $n\eta \ll 1$, potem $\delta\epsilon/\epsilon$ ne postane velik niti pri $\eta \sim 1/n$ zaradi pogoja $C_1 \ll 1$. Če pa velja $\eta n \gg 1$, potem pri $\eta \sim 1$ relativna sprememba gostote postane velikostnega reda $C_1 n^2$, medtem ko majhnost začetne motnje zahteva le $C_1 n^2 \eta_0^2 \ll 1$. Četudi je začetno naraščanje motnje počasno, je lahko celotno naraščanje občutno in motnja lahko postane kar velika.

Podobno lahko obravnavamo tudi motnje druge in tretje vrste iz zgornje klasifikacije. Vseeno pa lahko dobimo zakon za dušenje takšnih motenj brez podrobnih izračunov s pomočjo naslednjih preprostih razlogov.

Če na majhnem območju snovi (z linearno razsežnostjo l) obstaja vrtilna motnja s hitrostjo δv , je vrtilna količina tega območja enaka $\sim (\epsilon/c^2) l^3 \cdot l \cdot v$. Med razširjanjem vesolja l narašča sorazmerno z a , medtem ko ϵ upada kot a^{-3} (v primeru $p = 0$) ali kot a^{-4} (v primeru $p = \epsilon/3$). Iz zakona o ohranitvi vrtilne količine sledi

$$\begin{aligned} \delta v &= \text{konst}, \quad \text{za } p = \epsilon/3, \\ \delta v &\sim \frac{1}{a}, \quad \text{za } p = 0. \end{aligned} \quad (115.23)$$

V zadnjem primeru (motnje v obliki gravitacijskih valov) upoštevamo, da mora gostota energije gravitacijskih valov med razširjanjem vesolja upadati kot a^{-4} . Po drugi strani lahko to gostoto zapišemo z motnjo metrike kot $\sim k^2 (h_\alpha^\beta)^2$, kjer je $k = n/a$ valovni vektor motnje. Od tod sledi, da amplituda tovrstnih motenj upada kot $1/a$.

*Bolj podrobna analiza, ki upošteva tudi majhen pritisk $p(\epsilon)$, pokaže, da lahko pritisk zanemarimo le, če je izpolnjen pogoj $u\mu n/c \ll 1$ (kjer je $u = c\sqrt{dp/d\epsilon}$ hitrost zvoka, ki je majhna); hitro se da pokazati, da je tudi v tem primer ta pogoj enakovreden pogoju $\lambda/L \gg 1$. Zato tudi tu pride to naraščanja motnje, če je $\lambda/L \gg 1$.

§116 Homogen prostor

Predpostavki homogenosti in izotropnosti prostora povsem določita metriko prostora (do predznaka ukrivljenosti natančno). Veliko več svobode pa ostane, če predpostavimo le homogenost prostora brez dodatnih simetrij. Oglejmo si, kakšne metrične lastnosti lahko ima homogen prostor.

Obravnavali bomo metriko prostora ob izbranem času t . Predpostavili bomo, da je prostorsko-časovni opazovalni sistem sinhron, tako da je t isti sinhronizirani čas v celotnem prostoru.

Homogenost zahteva, da imajo vse točke v prostoru enake metrične lastnosti. Ta koncept lahko natančno definiramo, če obravnavamo množico koordinatnih transformacij, ki prostor pretvorijo samega vase, in torej ohranjajo metriko: če je diferencial ločne dolžine pred transformacijo enak

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3) dx^\alpha dx^\beta,$$

potem je po transformaciji diferencial iste ločne dolžine enak

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}(x'^1, x'^2, x'^3) dx'^\alpha dx'^\beta,$$

z enako funkcijsko odvisnostjo tenzorja $\gamma_{\alpha\beta}$ od novih koordinat. Prostor je homogen, če dopušča množico transformacij (*grupo gibanja*, angl. *group of motion*), s katero lahko poljubno izbrano točko preslikamo na položaj poljubne druge točke. Ker je prostor tridimenzionalen, lahko različne transformacije te grupe označimo s tremi neodvisnimi parametri.

Zato lahko v evklidskem prostoru homogenost prostora izrazimo z invariantnostjo metrike ob vzporednih premikih (translacijah) kartezičnega koordinatnega sistema. Vsak vzporeden premik je opisan s tremi parametri, komponentami vektorja premika izhodišča koordinatnega sistema. Te transformacije ohranijo enake vse tri neodvisne diferencialne (dx , dy , dz), s katerimi tvorimo diferencial ločne dolžine.

V splošnem primeru neevklidskega homogenega prostora transformacije iz grupe gibanja ponovno ohranjajo tri neodvisne linearne diferencialne forme, ki pa jih ne moremo zapisati kot totalne diferencialne kakšnih koordinatnih funkcij. Te forme zapišemo kot

$$e_\alpha^{(a)} dx^\alpha, \tag{116.1}$$

kjer latinski indeks (a) označuje tri neodvisne vektorje (koordinatne funkcije); te vektorje imenujemo *sestav* (angl. *frame*).

S formami (116.1) lahko zapišemo prostorsko metriko, ki je invariantna za izbrano grupo gibanja:

$$dl^2 = \eta_{ab}(e_\alpha^{(a)} dx^\alpha)(e_\beta^{(b)} dx^\beta), \tag{116.2}$$

zato je metrični tenzor enak

$$\gamma_{ab} = \eta_{ab} e_\alpha^{(a)} e_\beta^{(b)}, \tag{116.3}$$

kjer so koeficienti η_{ab} , ki so simetrični v indeksih a in b , lahko odvisni od časa.

Tako smo dobili "triadno" predstavitev prostorske metrike z uporabo trojice koordinatnih vektorjev; vsa pravila, izpeljana v § 98, veljajo tudi za to predstavitev. Izbiro baznih vektorjev narekujejo simetrijske lastnosti prostora in v splošnem trije bazni vektorji niso pravokotni (tako da matrika γ_{ab} ni diagonalna).

Tako kot v § 98 lahko poleg trojice vektorjev $e_{(a)}^{\alpha}$ vpeljemo recipročno trojico $e_{(a)}^{\alpha}$, tako da velja

$$e_{(a)}^{\alpha} e_{\alpha}^{(b)} = \delta_a^b, \quad e_{(a)}^{\alpha} e_{\beta}^{(a)} = \delta_{\beta}^{\alpha}. \quad (116.4)$$

V tridimenzionalnem primeru lahko zvezo med obema trojicama vektorjev zapišemo eksplicitno:

$$\mathbf{e}_{(1)} = \frac{1}{v} \mathbf{e}^{(2)} \times \mathbf{e}^{(3)}, \quad \mathbf{e}_{(2)} = \frac{1}{v} \mathbf{e}^{(3)} \times \mathbf{e}^{(1)}, \quad \mathbf{e}_{(3)} = \frac{1}{v} \mathbf{e}^{(1)} \times \mathbf{e}^{(2)}, \quad (116.5)$$

kjer je

$$v = |e_{\alpha}^{(a)}| = \mathbf{e}^{(1)} \cdot \mathbf{e}^{(2)} \times \mathbf{e}^{(3)},$$

ker $\mathbf{e}_{(a)}$ in $\mathbf{e}^{(a)}$ smatramo kot kartezična vektorja s komponentami $e_{(a)}^{\alpha}$ oziroma $e_{\alpha}^{(a)}$. Determinanta metričnega tenzorja (116.3) je

$$\gamma = \eta v^2, \quad (116.6)$$

kjer je η determinanta matrike η_{ab} .

Invariantnost diferencialnih form (116.1) pomeni, da je

$$e_{\alpha}^{(a)}(x) dx^{\alpha} = e_{\alpha}^{(a)}(x') dx'^{\alpha}, \quad (116.7)$$

kjer so $e_{\alpha}^{(a)}$ na obeh straneh enačbe iste funkcije starih oziroma novih spremenljivk. Enačbo pomnožimo z $e_{(a)}^{\beta}(x')$, zapišemo $dx'^{\beta} = \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} dx^{\alpha}$, in s primerjavo koeficientov istega diferenciala dx^{α} dobimo

$$\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} = e_{(a)}^{\beta}(x') e_{\alpha}^{(a)}(x). \quad (116.8)$$

Te enačbe so sistem diferencialnih enačb, ki določajo funkcije $x'^{\beta}(x)$ za izbrani sestav. * Enačbe (116.8) bodo integrabilne, če identično zadostijo pogojem

$$\frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\gamma}} = \frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\alpha}}.$$

Izračunamo odvode in dobimo

$$\left[\frac{\partial e_{(a)}^{\beta}(x')}{\partial x'^{\delta}} e_{(b)}^{\delta}(x') - \frac{\partial e_{(b)}^{\beta}(x')}{\partial x'^{\delta}} e_{(a)}^{\delta}(x') \right] e_{\gamma}^{(b)}(x) e_{\alpha}^{(a)}(x) = e_{(a)}^{\beta}(x') \left(\frac{\partial e_{\gamma}^{(a)}(x)}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial e_{\alpha}^{(a)}(x)}{\partial x^{\gamma}} \right).$$

Obe strani enačbe pomnožimo z $e_{(d)}^{\alpha}(x) e_{(c)}^{\gamma}(x) e_{\beta}^{(f)}(x')$ in odvajanje preselimo z enega faktorja na drugega z uporabo (116.4). Na levi strani tako dobimo

$$e_{\beta}^{(f)}(x') \left[\frac{\partial e_{(d)}^{\beta}(x')}{\partial x'^{\delta}} e_{(c)}^{\delta}(x') - \frac{\partial e_{(c)}^{\beta}(x')}{\partial x'^{\delta}} e_{(d)}^{\delta}(x') \right] = e_{(c)}^{\beta}(x') e_{(d)}^{\delta}(x') \left[\frac{\partial e_{\beta}^{(f)}(x')}{\partial x'^{\delta}} - \frac{\partial e_{\delta}^{(f)}(x')}{\partial x'^{\beta}} \right].$$

* Za transformacijo oblike $x'^{\beta} = x^{\beta} + \xi^{\beta}$, kjer so ξ^{β} majhne količine, dobimo iz (116.8) enačbe

$$\frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} = \xi^{\gamma} \frac{\partial e_{\gamma}^{(a)}}{\partial x^{\alpha}} e_{\alpha}^{(a)}.$$

Tri linearno neodvisne rešitve teh enačb, ξ_b^{β} ($b = 1, 2, 3$), določajo infinitezimalne transformacije grupe gibanja prostora. Vektorji $\xi_{(b)}^{\beta}$ se imenujejo *Killingovi vektorji*. (Glej opombo na strani 271.)

Na desni strani dobimo enak izraz, zapisan s spremenljivko x . Ker sta x in x' poljubna, se morata izraza poenostaviti na konstante:

$$\left(\frac{\partial e_{\alpha}^{(c)}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial e_{\beta}^{(c)}}{\partial x^{\alpha}} \right) e_{(a)}^{\alpha} e_{(b)}^{\beta} = C^c{}_{ab}. \quad (116.9)$$

Konstante $C^c{}_{ab}$ se imenujejo *strukturne konstante* (angl. *structure constants*) grupe. Če pomnožimo (116.9) z $e_{(c)}^{\gamma}$, dobimo še drugačen zapis:

$$e_{(a)}^{\alpha} \frac{\partial e_{(b)}^{\gamma}}{\partial x^{\alpha}} - e_{(b)}^{\beta} \frac{\partial e_{(a)}^{\gamma}}{\partial x^{\beta}} = C^c{}_{ab} e_{(c)}^{\gamma}. \quad (116.10)$$

To so iskani pogoji za homogenost prostora. Izraz na levi strani (116.9) je enak definiciji količin $\lambda^c{}_{ab}$ (98.11), ki so torej konstante.

Iz definicije je razvidno, da so strukturne konstante antisimetrične v spodnjih indeksih:

$$C^c{}_{ab} = -C^c{}_{ba}. \quad (116.11)$$

Zapišemo lahko še dodatni pogoj zanje, če upoštevamo, da lahko (116.10) zapišemo v obliki komutacijskih relacij

$$[X_a, X_b] \equiv X_a X_b - X_b X_a = C^c{}_{ab} X_c \quad (116.12)$$

za linearne diferencialne operatorje *

$$X_a = e_{(a)}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}. \quad (116.13)$$

Zgoraj omenjeni pogoj sedaj sledi iz identitete

$$[[X_a, X_b], X_c] + [[X_b, X_c], X_a] + [[X_c, X_a], X_b] = 0$$

(to je *Jacobijeva identiteta*) in se lahko zapiše v obliki

$$C^e{}_{ab} C^d{}_{ec} + C^e{}_{bc} C^d{}_{ea} + C^e{}_{ca} C^d{}_{eb} = 0. \quad (116.14)$$

Veliko enostavneje je namesto konstant $C^c{}_{ab}$ s tremi indeksi uporabljati skupino količin z dvema indeksoma, ki jih dobimo z dualno transformacijo:

$$C^c{}_{ab} = e_{abd} C^{dc}, \quad (116.15)$$

kjer je $e_{abc} = e^{abc}$ enotski antisimetrični simbol (velja dogovor $e_{123} = +1$). S temi konstantami lahko komutacijsko relacijo (116.12) zapišemo kot

$$e^{abc} X_b X_c = C^{ad} X_d. \quad (116.16)$$

*V matematični teoriji zveznih grup (*Liejevih grup*) se operatorji X_a , ki zadostijo pogojem oblike (116.12), imenujejo *generatorji* grupe. Omenimo pa naj (da se bomo izognili nejasnosti), da sistematčne teorije običajno izhajajo iz operatorjev, definiranih s Killingovimi vektorji:

$$X_a = \xi_{(a)}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}.$$

Lastnost (116.11) je že vsebovana v definiciji (116.15), lastnost (116.14) pa lahko zapišemo kot

$$e_{bcd}C^{cd}C^{ba} = 0. \quad (116.17)$$

Omenimo naj še, da lahko definicijo (116.9) za količine C^{ab} zapišemo v vektorski obliki:

$$C^{ab} = -\frac{1}{v}\mathbf{e}^{(a)} \cdot \nabla \times \mathbf{e}^{(b)}, \quad (116.18)$$

pri čemer ponovno izvajamo vektorske operacije tako, ko če bi bile koordinate x^a kartezične.

Izbira treh vektorjev sestava v diferencialni formi (116.1) (in s tem tudi izbira operatorjev X_a) seveda ni enolična. Uporabimo lahko poljubno linearno transformacijo s konstantnimi koeficienti:

$$\mathbf{e}_{(a)} = A_a^b \mathbf{e}_{(b)}. \quad (116.19)$$

Količine η_{ab} in C^{ab} se obnašajo kot tenzorji proti takšnim transformacijam.

Strukturne konstante morajo zadostiti samo pogojem (116.17). Med dopustnimi konstantami obstajajo ekvivalentne množice [ekvivalentne so v tem smislu, da so razlike med njimi povezane s transformacijami vrste (116.19)]. Klasifikacija različnih homogenih prostorov se poenostavi na določanje vseh neekvivalentnih množic strukturnih konstant. To lahko storimo z uporabo “tenzorskih” lastnosti količin C^{ab} z uporabo naslednje preproste metode (C. G. Behr, 1962).

Nesimetrični tenzor C^{ab} lahko razcepimo na simetrični in antisimetrični del. Prvega označimo z n^{ab} , drugega pa zapišemo z njegovim “dualnim vektorjem” a_c :

$$C^{ab} = n^{ab} + e^{abc}a_c. \quad (116.20)$$

Ko ta izraz vstavimo v (116.17), dobimo pogoj

$$n^{ab}a_b = 0. \quad (116.21)$$

S pomočjo transformacij (116.19) lahko simetrični “tenzor” n^{ab} diagonaliziramo: naj bodo n_1 , n_2 in n_3 njegove lastne vrednosti. Enačba (116.21) pomeni, da “vektor” a_b (če obstaja), leži v smeri ene izmed glavnih smeri tenzorja n^{ab} , in sicer tiste z lastno vrednostjo 0. Ne da bi izgubili na splošnosti, lahko zapišemo $a_b = (a, 0, 0)$. Tedaj se (116.21) poenostavi v $an_1 = 0$, kar pomeni, da mora biti ena izmed količin a in n_1 enaka nič. Komutacijske zveze (116.12) se zapišejo kot:

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= -aX_2 + n_3X_3, \\ [X_2, X_3] &= n_1X_1, \\ [X_3, X_1] &= n_2X_2 + aX_3. \end{aligned} \quad (116.22)$$

Edina preostala prosta izbira je sprememba predznaka operatorjev X_a in poljubna transformacija velikosti teh operatorjev (torej množenje s konstanto). To omogoča, da sočasno spremenimo predznak vseh n_a in da naredimo količino a pozitivno (če je od nič različna). Dosežemo lahko tudi, da so vse strukturne konstante enake ± 1 , če je vsaj ena izmed količin a , n_2 in n_3 enaka nič. Če pa so vse te tri količine od nič različne, potem transformacija skale ohranja razmerje a^2/n_2n_3 . *

*Strogo vzeto bi morali v skladu s “tenzorskimi” lastnostmi količin C^{ab} v definicijo (116.15) vstaviti faktor $\sqrt{\eta}$ (glej opombe v § 83, ki opisujejo, kako mora biti definiran antisimetrični enotski tenzor za poljubne koordinatne transformacije). Tu se ne bomo spuščali v te podrobnosti: za naše namene zadostuje, da lahko zakon o transformaciji strukturnih konstant razberemo neposredno iz (116.22).

Tako dobimo naslednji seznam različnih vrst homogenega prostora; v prvem stolpcu so zapisane rimske številke, s katerimi označujemo vrste prostora po Bianchijevi razdelitvi (L. Bianchi, 1918): *

Vrsta	a	$n^{(1)}$	$n^{(2)}$	$n^{(3)}$
I	0	0	0	0
II	0	1	0	0
VII ₀	0	1	1	0
VI ₀	0	1	-1	0
IX	0	1	1	1
VIII	0	1	1	-1
V	1	0	0	0
IV	1	0	0	1
VII _a	a	0	1	1
III ($a = 1$), VI _a ($a \neq 1$)	a	0	1	-1

Prva vrsta je evklidski prostor; vse komponente prostorskega krivinskega tenzorja so enake nič (glej enačbo (116.24) spodaj). Poleg trivialnega primera Galilejeve metrike spada sem še časovno odvisna metrika, ki jo bomo obravnavali v naslednjem razdelku.

Vrsta IX vsebuje kot posebni primer prostor s konstantno pozitivno ukrivljenostjo. Dobimo ga, če v formi (116.2) zapišemo $\eta_{ab} = \delta_{ab}/4\lambda$, kjer je λ pozitivna konstanta. Če namreč uporabimo (116.24) z $C^{11} = C^{22} = C^{33} = 1$ (to so strukturne konstante za vrsto IX), dobimo $P_{(a)(b)} = \frac{1}{2}\delta_{ab}$, in sledi

$$P_{\alpha\beta} = P_{(a)(b)}e_{\alpha}^{(a)}e_{\beta}^{(b)} = 2\lambda\gamma_{\alpha\beta},$$

kar je natanko Riccijev tenzor prostora s pozitivno konstantno ukrivljenostjo [glej (111.3)].

Na podoben način lahko dobimo prostor z negativno konstantno ukrivljenostjo kot posebni primer vrste V. Postavimo $\eta_{ab} = \delta_{ab}/\lambda$ in izračunamo $P_{(a)(b)}$ iz (116.24) z $C^{23} = -C^{32} = 1$, in dobimo

$$P_{(a)(b)} = -2\delta_{ab}, \quad P_{\alpha\beta} = -2\lambda\gamma_{\alpha\beta},$$

kar ustreza negativni konstantni ukrivljenosti.

Končno pokažimo, kako se Einsteinove enačbe v vesolju s homogenim prostorom poenostavijo v sistem navadnih diferencialnih enačb, ki vsebujejo le funkcije časa. Najprej razpišemo prostorske komponente vektorjev in tenzorjev četvercev vzdolž triade baznih vektorjev prostora:

$$R_{(a)(b)} = R_{\alpha\beta}e_{(a)}^{\alpha}e_{(b)}^{\beta}, \quad R_{0(a)} = R_{0\alpha}e_{(a)}^{\alpha}, \quad u^{(a)} = u^{\alpha}e_{\alpha}^{(a)},$$

kjer so sedaj vse količine funkcije ene spremenljivke (časa t); tudi skalarne količine, kot sta gostota energije ϵ in pritisk snovi p , so funkcije časa.

Po (97.11)-(97.13) lahko Einsteinove enačbe v sinhronem opazovalnem sistemu zapišemo s tridimenzionalnima tenzorjema $\kappa_{\alpha\beta}$ in $P_{\alpha\beta}$. Za prvega velja

$$\kappa_{(a)(b)} = \dot{\eta}_{ab}, \quad \kappa_{(a)}^{(b)} = \dot{\eta}_{ac}\eta^{cb} \quad (116.23)$$

*Parameter a zavzame vse pozitivne vrednosti. Ustrezne vrste prostorov v resnici ustrezajo enoparametričnim družinam različnih grup. Daj jih vse štejemo kot vrsti prostora VI oziroma VII je stvar dogovora.

(pika označuje odvajanje po t). Komponente $P_{(a)(b)}$ lahko zapišemo s količinami η_{ab} in s strukturnimi konstantami grupe z uporabo (98.15). Po tem, ko nadomestimo simbole s tremi indeksi $\lambda_{bc}^a = C_{bc}^a$ s simboli z dvema indeksoma C^{ab} in enačbe nekoliko preoblikujemo *, dobimo

$$P_{(a)}^{(b)} = \frac{1}{2\eta} \left\{ 2C^{bd}C_{ad} + C^{db}C_{ad} + C^{bd}C_{da} - C^d{}_d(C^b{}_a + C_a{}^b) + \delta_a^b[(C^d{}_d)^2 - 2C^{df}C_{df}] \right\}. \quad (116.24)$$

Tu je po splošnem pravilu

$$C_a{}^b = \eta_{ac}C^{cb}, \quad C_{ab} = \eta_{ac}\eta_{bd}C^{cd}.$$

Omenimo naj še, da se Bianchijeva identiteta za tridimenzionalni tenzor $P_{\alpha\beta}$ v homogenem prostoru zapiše kot

$$P^c{}_b C^b{}_{ca} + P^c{}_a C^b{}_{cb} = 0. \quad (116.25)$$

Končni izrazi za triadne komponente Riccijevega četvernega tenzorja so: †

$$\begin{aligned} R_0^0 &= -\frac{1}{2}\dot{\kappa}_{(a)}^{(a)} - \frac{1}{4}\kappa_{(a)}^{(b)}\kappa_{(b)}^{(a)}, \\ R_{(a)}^0 &= -\frac{1}{2}\kappa_{(b)}^{(c)}(C^b{}_{ca} - \delta_a^b C^d{}_{dc}), \\ R_{(a)}^{(b)} &= -\frac{1}{2\sqrt{\eta}}(\sqrt{\eta}\kappa_{(a)}^{(b)} - P_{(a)}^{(b)}). \end{aligned} \quad (116.26)$$

Poudarimo naj, da lahko Einsteinove enačbe nastavimo, ne da bi pri tem bilo potrebno eksplicitno zapisati bazne vektorje kot funkcije koordinat.

§117 Raven anizotropen model

Izotropen model je zadovoljiv opis poznejših stopenj razvoja vesolja, kar pa še ne pomeni, da je primeren tudi za opis zgodnjih obdobij razvoja v bližini časovne singularnosti. To vprašanje bodo obravnavali v § 119, v tem in naslednjem razdelku pa si bomo predhodno ogledali rešitve Einsteinovih enačb, ki imajo prav tako časovno singularnost, ki pa je bistveno drugačne vrste kot Friedmannova singularnost.

Poiskali bomo rešitve, v katerih so ob primerni izbiri opazovalnega sistema vse komponente metričnega tenzorja odvisne samo od ene same spremenljivke, časa $x^0 = t$ ‡. Podoben nalogo smo obravnavali že v § 109, kjer pa smo si ogledali le primer, ko je determinanta $|g_{\alpha\beta}| = 0$. Kot smo pokazali v § 109, lahko v takšnem primeru postavimo $g_{0\alpha} = 0$, ne da bi izgubili na splošnosti.

S transformacijo spremenljivke t po predpisu $\sqrt{g_{00}} dt \rightarrow dt$, lahko postavimo g_{00} na ena, tako da dobimo sinhron opazovalni sistem, v katerem velja

$$g_{00} = 1, \quad g_{0\alpha} = 0, \quad g_{\alpha\beta} = -\gamma_{\alpha\beta}(t). \quad (117.1)$$

*Pri čemer uporabimo pravili

$$\eta_{ad}\eta_{be}\eta_{cf}e^{def} = \eta e_{abc}, \quad e_{abf}e^{cdf} = \delta_a^c\delta_b^d - \delta_a^d\delta_b^c.$$

†Kovariantni odvodi $\kappa_{\alpha;\gamma}^\beta$, ki so vsebovani v R_α^0 , se transformirajo po enačbah zapisanih v opombi na strani 293.

‡Zaradi krajšega pisanja bomo v § 117 in § 118 postavili $c = 1$.

Sedaj lahko uporabimo Einsteinove enačbe oblike (97.11)-(97.13). Ker količine $\gamma_{\alpha\beta}$ in zato tudi komponente tridimenzionalnega tenzorja $\kappa_{\alpha\beta} = \dot{\gamma}_{\alpha\beta}$ niso odvisne od koordinat x^α , je $R_{0\alpha} \equiv 0$. Iz istega razloga je $P_{\alpha\beta} \equiv 0$, zato se enačbe gravitacijskega polja v vakuumu poenostavijo v

$$\dot{\kappa}_\alpha^\alpha + \frac{1}{2}\kappa_\alpha^\beta \kappa_\beta^\alpha = 0, \quad (117.2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}(\sqrt{\gamma}\kappa_\alpha^\beta)^\cdot = 0. \quad (117.3)$$

Iz enačbe (117.3) sledi

$$\sqrt{\gamma}\kappa_\alpha^\beta = 2\lambda_\alpha^\beta, \quad (117.4)$$

kjer so λ_α^β konstante. Skrčimo po indeksih α in β in dobimo

$$\kappa_\alpha^\alpha = \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} = \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\lambda_\alpha^\alpha, \quad (117.5)$$

od koder sledi $\gamma = \text{konst} \cdot t^2$. Ne da bi izgubili na splošnosti lahko konstanto postavimo na ena (s preprosto spremembo skale koordinat x^α); tedaj je $\lambda_\alpha^\alpha = 1$. Enačbo (117.4) vstavimo v (117.2) in dobimo zvezo

$$\lambda_\alpha^\beta \lambda_\beta^\alpha = 1, \quad (117.6)$$

kar je zveza med konstantami λ_α^β .

Nato spustimo indeks β v enačbah (117.4) in jih zapišemo kot sistem navadnih diferencialnih enačb:

$$\dot{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{2}{t}\lambda_\alpha^\gamma \gamma_{\gamma\beta}. \quad (117.7)$$

Skupino koeficientov λ_α^γ lahko smatramo kot matriko neke linearne transformacije. Z ustrezno transformacijo koordinat x^1, x^2, x^3 (ali, kar je ekvivalentno, s transformacijo količin $g_{1\beta}, g_{2\beta}, g_{3\beta}$) lahko to matriko naredimo diagonalno. Njene lastne vrednosti (korene karakteristične enačbe) označimo z p_1, p_2, p_3 , in predpostavimo, da so vse realne in različne (drugačni primeri so obravnavani kasneje); enotski vektorji vzdolž ustreznih glavnih osi so $\mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}, \mathbf{n}^{(3)}$. Rešitev enačb (117.7) lahko potem zapišemo kot

$$\gamma_{\alpha\beta} = t^{2p_1} n_\alpha^{(1)} n_\beta^{(1)} + t^{2p_2} n_\alpha^{(2)} n_\beta^{(2)} + t^{2p_3} n_\alpha^{(3)} n_\beta^{(3)} \quad (117.8)$$

(kjer smo koeficiente potenc t postavili na ena z ustrezno spremembo skale koordinat). Končno si izberemo smeri vektorjev $\mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}, \mathbf{n}^{(3)}$ kot smeri naših osi (imenujemo jih x, y, z), in zapišemo metriko v njeni končni obliki (E. Kasner, 1922):

$$ds^2 = dt^2 - t^{2p_1} dx^2 - t^{2p_2} dy^2 - t^{2p_3} dz^2. \quad (117.9)$$

Števila p_1, p_2 in p_3 morajo zadostiti dvema pogojema:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \quad (117.10)$$

[prva sledi iz $-g = t^2$, druga pa iz (117.5)].

Vsa tri števila p_1, p_2, p_3 očitno ne morejo imeti iste vrednosti. Obstajata dva primera, v katerih sta dve števili enaki, in sicer trojici $0, 0, 1$ in $-1/3, 2/3, 2/3$. V vseh ostalih primerih so

števila p_1 , p_2 in p_3 različna, eno mora biti negativno, drugi dve pa pozitivni. Če jih uredimo kot $p_1 < p_2 < p_3$, morajo njihove vrednosti ležati na intervalih

$$-\frac{1}{3} \leq p_1 \leq 0, \quad 0 \leq p_2 \leq \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3} \leq p_3 \leq 1. \quad (117.11)$$

Metrika (117.9) ustreza ravnemu homogenemu prostoru, ki pa je anizotropen. Njegova prostornina narašča (z naraščajočim t) sorazmerno s t ; linearne razdalje vzdolž dveh osi (y in z) naraščajo, upadajo pa vzdolž tretje osi (x). Čas $t = 0$ je singularnost rešitve; v tej točki ima metrika singularnost, ki je ne moremo odpraviti z nobeno transformacijo opazovalnega sistema, pri kateri bi bile invariante štiridimenzionalnega krivinskega tenzorja enake nič v neskončnosti. *

Metrika (117.9) je točna rešitev Einsteinovih enačb v praznem prostoru. V bližini singularnosti, pri majhnih t , pa je to le približna rešitev (do členov najvišjega reda po $1/t$), tudi če je snov enakomerno porazdeljena po prostoru. Kako in kako hitro se tedaj gostota snovi spreminja, je določeno z gibalnimi enačbami snovi v danem gravitacijskem polju, medtem ko je povratni učinek snovi na polje zanemarljiv. Ko gre $t \rightarrow \infty$, gre gostota snovi proti neskončnosti, kar je v skladu s fizikalno naravo singularnosti (glej tretjo nalogo).

§118 Nihajoči način približevanja k singularnosti

Z uporabo modela vesolja s homogenim prostorom vrste IX bomo raziskali časovno singularnost metrike, ki ima nihajoč značaj (V. A. Belinski, E. M. Lifšic, I. M. Khalatnikov, 1968). V naslednjem razdelku bomo videli, da ima takšna rešitev zelo splošen pomen.

Zanimalo nas bo obnašanje modela v bližini singularnosti (ki si jo izberemo kot izhodišče za merjenje časa $t = 0$). Podobno kot v Kasnerjevi rešitvi iz § 117 prisotnost snovi ne vpliva na kvalitativne lastnosti tega obnašanja. Zaradi preprostosti bomo zato najprej privzeli, da je prostor prazen.

Privzamemo, da so količine $\eta_{ab}(t)$ v (116.3) diagonalne. Diagonalne elemente označimo z a^2, b^2, c^2 ; tri vektorje opazovalnega sistema $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$ označimo z $\mathbf{l}, \mathbf{m}$ in $\mathbf{n}$. Prostorsko metriko lahko tedaj zapišemo kot:

$$\gamma_{\alpha\beta} = a^2 l_\alpha l_\beta + b^2 m_\alpha m_\beta + c^2 n_\alpha n_\beta. \quad (118.1)$$

Za prostor vrste IX so strukturne konstante enake [†]

$$C^{11} = C^{22} = C^{33} = 1 \quad (118.2)$$

*Edina izjema je primer $p_1 = p_2 = 0, p_3 = 1$. Pri teh vrednostih imamo opravka z ravnim prostorom-časom; s transformacijo $t \sinh z = \zeta, t \cosh z = \tau$ lahko metriko (117.9) naredimo galilejsko. Omenimo naj še članek, v katerem so podane različne točne rešitve Einsteinovih enačb v praznem prostoru, ki so odvisne od večjega števila parametrov. B. K. Harrison, *Phys. Rev.*, **116**, 1285 (1959).

Rešitev vrste (117.9) obstaja tudi v primeru, ko je parameter prostorski; zadostuje, da na ustrezen način spremenimo predznak, na primer:

$$ds^2 = x^{2p_1} dt^2 - dx^2 - x^{2p_2} dy^2 - x^{2p_3} dz^2.$$

V tem primeru pa obstajajo tudi rešitve drugačne vrste, ki jih dobimo, ko ima karakteristična enačba matrike λ_α^β v enačbah (117.7) kompleksne ali večkratne korene (glej prvo in drugo nalogo). Če je t časovni parameter, te rešitve niso dopustne, ker determinanta g v tem primeru ne bi izpolnila potrebnega pogoja $g < 0$.

[†]Bazni vektorji, ki ustrezajo tem konstantam, so

$$\mathbf{l} = (\sin x^3, -\cos x^3 \sin x^1, 0), \quad \mathbf{m} = (\cos x^3, \sin x^3 \sin x^1, 0), \quad \mathbf{n} = (0, \cos x^1, 1).$$

$$(\text{in } C^1_{23} = C^2_{31} = C^3_{12} = 1).$$

Iz (116.26) lahko razberemo, da so pri teh konstantah in diagonalni matriki η_{ab} , komponente $R^0_{(a)}$ Riccijevega tenzorja identično enake nič v sinhronem opazovalnem sistemu. Po (116.26) so tudi izvendiagonalne komponente $P^{(a)(b)}$ enake nič. Ostale komponente Einsteinovih enačb nam dajo naslednji sistem enačb za funkcije a, b, c :

$$\frac{(\dot{a}bc)^\cdot}{abc} = \frac{1}{2a^2b^2c^2}[(b^2 - c^2)^2 - a^4],$$

$$\frac{(a\dot{b}c)^\cdot}{abc} = \frac{1}{2a^2b^2c^2}[(a^2 - c^2)^2 - b^4], \quad (118.3)$$

$$\frac{(ab\dot{c})^\cdot}{abc} = \frac{1}{2a^2b^2c^2}[(a^2 - b^2)^2 - c^4],$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} = 0. \quad (118.4)$$

[Enačbe (118.3) ustrezajo enačbam $R^1_{(1)} = R^2_{(2)} = R^3_{(3)} = 0$; enačba (118.4) ustreza enačbi $R^0_0 = 0$.]

Časovni odvodi v sistemu enačb (118.3)-(118.4) se dajo zapisati bolj enostavno, če namesto funkcij a, b, c v enačbe vstavimo njihove logaritme α, β, γ :

$$a = e^\alpha, \quad b = e^\beta, \quad c = e^\gamma, \quad (118.5)$$

namesto t pa spremenljivko τ :

$$dt = abc d\tau. \quad (118.6)$$

Tedaj se sistem glasi:

$$2\alpha_{,\tau,\tau} = (b^2 - c^2)^2 - a^4,$$

$$2\beta_{,\tau,\tau} = (a^2 - c^2)^2 - b^4, \quad (118.7)$$

$$2\gamma_{,\tau,\tau} = (a^2 - b^2)^2 - c^4,$$

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)_{,\tau,\tau} = \alpha_{,\tau}\beta_{,\tau} + \alpha_{,\tau}\gamma_{,\tau} + \beta_{,\tau}\gamma_{,\tau}, \quad (118.8)$$

kjer indeks $_{,\tau}$ pomeni odvod po τ . Če seštejemo enačbe (118.7) in nadomestimo vsoto drugih odvodov na levi z (118.8), dobimo:

$$\alpha_{,\tau}\beta_{,\tau} + \alpha_{,\tau}\gamma_{,\tau} + \beta_{,\tau}\gamma_{,\tau} = \frac{1}{4}(a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2). \quad (118.9)$$

Ta enačba vsebuje samo prve odvode in je torej prvi integral sistema enačb (118.7).

Enačb (118.3)-(118.4) ne moremo točno rešiti v analitični obliki, lahko pa si podrobno ogledamo njihovo kvalitativno obnašanje v bližini singularnosti.

Koordinate zavzamejo vrednosti na območjih $0 \leq x^1 \leq \pi$, $0 \leq x^2 \leq 2\pi$, $0 \leq x^3 \leq 4\pi$. Prostor je zaprt in ima prostornino

$$V = \int \sqrt{\gamma} dx^1 dx^2 dx^3 = abc \int \sin x^1 dx^1 dx^2 dx^3 = 16\pi^2 abc.$$

Če je $a = b = c$, je to prostor s konstantno pozitivno ukrivljenostjo s krivinskim polmerom $2a$.

Najprej opazimo, da bi bil sistem točno rešljiv, če enačbe (118.3) oziroma (118.7) ne bi imele desnih strani, in sicer bi imeli

$$a \sim t^{p_l}, \quad b \sim t^{p_m}, \quad c \sim t^{p_n}, \quad (118.10)$$

kjer so p_l , p_m in p_n števila, povezana z zvezo

$$p_l + p_m + p_n = p_l^2 + p_m^2 + p_n^2 = 1 \quad (118.11)$$

[kar ustreza Kasnerjevi rešitvi (117.9) za homogen raven prostor]. Eksponente smo označili z p_l , p_m , p_n , ne da bi predpostavili, kako so urejeni po velikosti; obdržali bomo zapis p_1 , p_2 , p_3 iz § 117 za trojico števil, urejenih po vrsti kot $p_1 < p_2 < p_3$, ki ležijo na intervalih (117.11). Ta števila lahko zapišemo v parametrični obliki kot

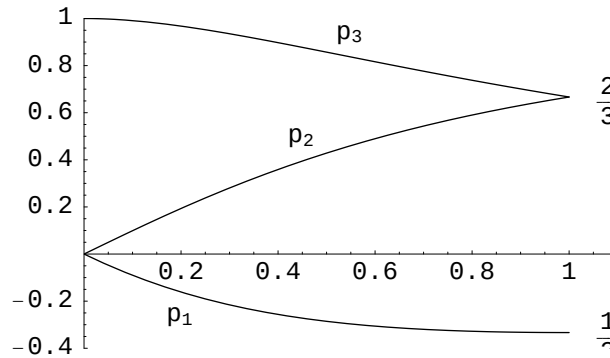
$$p_1(u) = -\frac{u}{1+u+u^2}, \quad p_2(u) = \frac{1+u}{1+u+u^2}, \quad p_3(u) = \frac{u(1+u)}{1+u+u^2}. \quad (118.12)$$

Vse različne vrednosti p_1, p_2, p_3 (v pravilnem vrstnem redu) dobimo, če parameter u teče po vseh vrednostih $u \geq 1$. Vrednosti za $u < 1$ lahko zapišemo s tistimi za $u \geq 1$, saj velja

$$p_1\left(\frac{1}{u}\right) = p_1(u), \quad p_2\left(\frac{1}{u}\right) = p_3(u), \quad p_3\left(\frac{1}{u}\right) = p_2(u). \quad (118.13)$$

Slika 22 prikazuje grafe količin p_1, p_2, p_3 kot funkcij spremenljivke $1/u$.

Predpostavimo, da so desne strani enačb (118.7) majhne na nekem časovnem intervalu, tako da jih lahko zanemarimo in dobimo rešitev, podobno Kasnerjevi, (118.10). To ne more več veljati, ko gremo proti $t = 0$, saj morajo nekateri izmed členov naraščati. Na primer če negativni eksponent sodi k funkciji $a(t)$ (tako da je $p_l = p_1 < 0$), tedaj dobimo motnjo Kasnerjevega območja zaradi členov a^4 ; ostali členi upadajo skupaj z t .



Slika 22:

Če na desnih straneh enačb (118.7) obdržimo le člene a^4 , dobimo sistem enačb

$$\alpha_{,\tau,\tau} = -\frac{1}{2}e^{4\alpha}, \quad \beta_{,\tau,\tau} = \gamma_{,\tau,\tau} = \frac{1}{2}e^{4\alpha}. \quad (118.14)$$

Rešitev teh enačb opisuje spreminjanje metrike od “začetnega” stanja, ko je ta opisana z enačbami (118.10) z določeno izbiro eksponentov (veljati pa mora $p_l < 0$); naj bodo $p_l = p_1$, $p_m = p_2$ in $p_n = p_3$, tako da je

$$a = t^{p_1}, \quad b = t^{p_2}, \quad c = t^{p_3}$$

(predfaktorje v teh izrazih lahko postavimo na ena, ne da bi s tem izgubili na splošnosti spodnjih rezultatov). Ker je $abc = t$, $\tau = \ln t + \text{konst}$, lahko začetne pogoje za (118.14) zapišemo kot

$$\alpha_{,\tau} = p_1, \quad \beta_{,\tau} = p_2, \quad \gamma_{,\tau} = p_3.$$

Prva izmed enačb (118.14) ima enako obliko kot enačba za enodimenzionalno gibanje delca v polju eksponentne potencialne stene, kjer igra α vlogo koordinate. Po tej analogiji začetnemu Kasnerjevemu območju ustreza prosto gibanje s konstantno hitrostjo $\alpha_{,\tau} = p_l$. Po odboju od potencialne stene se bo delec ponovno prosto gibal z obrnjeno hitrostjo: $\alpha_{,\tau} = -p_l$. Iz enačb (118.14) razberemo še, da je $\alpha_{,\tau} + \beta_{,\tau} = \text{konst}$, in $\alpha_{,\tau} + \gamma_{,\tau} = \text{konst}$, od koder sledi

$$\beta_{,\tau} = p_2 + 2p_1, \quad \gamma_{,\tau} = p_3 + 2p_1. \quad (118.15)$$

Sedaj določimo α , β in γ , nato pa s pomočjo enačbe (118.6) še t . Dobimo

$$e^\alpha \sim e^{-p_1\tau}, \quad e^\beta \sim e^{(p_2+2p_1)\tau}, \quad e^\gamma \sim e^{(p_3+2p_1)\tau}$$

$$t \sum e^{(1+2p_1)\tau},$$

oziroma

$$a \sim t^{p'_l}, \quad b \sim t^{p'_m}, \quad c \sim t^{p'_n},$$

kjer so

$$p'_l = \frac{|p_1|}{1-2|p_1|}, \quad p'_m = \frac{p_2-2|p_1|}{1-2|p_1|}, \quad p'_n = \frac{p_3-2|p_1|}{1-2|p_1|}. \quad (118.16)$$

Posledica motnje je torej to, da se iz enega Kasnerjevega območja preselimo v drugega, pri čemer se negativna potenca časa t preseli iz ene smeri $\mathbf{l}$ k drugi $\mathbf{m}$: če je veljalo $p_l < 0$, je sedaj $p'_m < 0$. Ob tem premiku doseže funkcija $a(t)$ maksimum, funkcija $b(t)$ pa minimum: količina $b(t)$, ki je poprej padala, začne naraščati, naraščajoča funkcija $a(t)$ pa začne padati, medtem ko $c(t)$ ves čas upada. Sama motnja [členi a^4 v (118.7)], ki je naraščala, začne upadati in se zaduši. Nadaljnje spreminjanje motnje vodi na podoben način k naraščanju motnje zaradi členov b^4 v (118.7), k novemu premiku Kasnerjevega območja, in tako naprej.

Pravilo za premik eksponentov (118.16) lahko preprosto opišemo s parametrizacijo (118.12): če je

$$p_l = p_1(u), \quad p_m = p_2(u), \quad p_n = p_3(u),$$

potem je

$$p'_l = p_2(u-1), \quad p'_m = p_1(u-1), \quad p'_n = p_3(u-1). \quad (118.17)$$

Večji izmed dveh pozitivnih eksponentov ostane pozitiven.

Ta proces seljenja iz enega Kasnerjevega območja v drugega je ključ za razumevanje obnašanja metrike, ko se približujemo singularnosti.

Zaporedni premiki (118.17) z izmenjavo negativnega eksponenta med smerema $\mathbf{l}$ in $\mathbf{m}$ se nadaljujejo tako dolgo, dokler se celoštevilski del začetne vrednosti u ne "izrabí" in postane u manjši od ena. Vrednost $u < 1$ se preslika v $u > 1$ v skladu z (118.13); v tem trenutku je eden izmed p_l, p_m negativen, p_n pa postane manjše število izmed obeh pozitivnih ($p_n = p_2$). Pri nadaljnjem zaporedju premikov se bo negativni eksponent izmenjeval med smerema $\mathbf{n}$ in $\mathbf{l}$ ali pa med smerema $\mathbf{n}$ in $\mathbf{m}$. Pri poljubni (iracionalni) začetni vrednosti za u se bo ta proces premikanja nadaljeval brez konca.

V točni rešitvi bodo eksponenti p_1 , p_2 in p_3 izgubili njihov dobesedni pomen. Omenimo naj, da zaradi tako nastale razmazanosti v definiciji teh števil (in s tem tudi parametra u), četudi je ta majhna, ni smiselno obravnavati posebne primere (na primer racionalne) vrednosti parametra u . Zato obravnavamo le tista obnašanja, ki so značilna za splošni primer z iracionalno vrednostjo u .

Razvoj modela, ko se približujemo singularnosti, je torej sestavljeno iz zaporedij nihanj, med katerimi razdalje vzdolž dveh prostorskih osi nihajo, medtem ko te monotonno padajo vzdolž tretje; prostornina upada po zakonu, ki je blizu $\sim t$. Ko preidemo iz enega zaporedja v drugega, se smer, vzdolž katere razdalje monotonno upadajo, preseli iz ene smeri v drugo. Vrstni red teh premikov ima asimptotično značilnosti naključnega procesa. Tudi vrsti red dolžin zaporednih serij nihajev (torej število Kasnerjevih dob v vsaki seriji) * ima stohastični značaj.

Zaporedne serije nihanj se zgostijo, ko se približujemo singularnosti. Neskončno število nihlajev se zgodi med končnih svetovnim časom t in trenutkom $t = 0$. Primerna spremenljivka za opis takšnega časovnega razvoja ni čas t , temveč njegov logaritem $\ln t$. S to spremenljivko se opis celotnega procesa približevanja singularnosti raztegne v $-\infty$.

Pri tu opisani rešitvi smo nalogo poenostavili že na začetku s tem, da smo predpostavili, da je matrika $\eta_{ab}(t)$ v (116.3) diagonalna. Prisotnost izvendiagonalnih komponent tenzorja η_{ab} ne spremeni nihajoči značaj rešitve ali zakon (118.17) za premike eksponentov p_l , p_m in p_n med zaporednimi Kasnerjevimi obdobji. Pojavi pa se nova lastnost: premike eksponentov spremlja sprememba smeri osi, katerim pripišemo eksponente. †

§119 Časovna singularnost v splošni kozmološki rešitvi Einsteinovih enačb

Poudarili smo že, da četudi Friedmannov model zadostuje za opis trenutnega stanja vesolja, to še ne pomeni, da je ta model primeren za opis zgodnjih obdobj razvoja vesolja. Vprašamo se lahko celo, v kakšni meri je obstoj časovne singularnosti potrebna splošna lastnost kozmoloških modelov, in ali se morda ne pojavi zaradi specifičnih predpostavk, na katerih temeljijo poenostavljeni modeli (izpostavimo naj predpostavke o simetriji). Poudariti moramo, da kadar govorimo o singularnosti, mislimo na fizikalno singularnost, torej prostor, kjer postanejo gostota snovi in invariante krivinskega tenzorja neskončne.

Če bi bil obstoj singularnosti neodvisen od teh predpostavk, bi to pomenilo, da singularnost ni le lastnost posebnih rešitev, temveč je tudi lastnost splošne rešitve Einsteinovih enačb. Pogoji, da je neka rešitev splošna, je povezan s številom "fizikalno poljubnih" funkcij, vsebovanih v rešitvi. V splošni rešitvi mora biti število takšnih funkcij zadosti veliko, da

*Če je "začetna" vrednost parametra u enaka $u_0 = k_0 + x_0$ (kjer je k_0 celo število, $x_0 < 1$), je dolžina prve serije nihajev k_0 , začetna vrednost za drugo serijo pa bo $u_1 = 1/x_0 \equiv k_1 + x_1$, etc. Hitro pridemo do ugotovitve, da so dolžine zaporednih serij podane s členi $k_0, k_1, k_2, \dots$ iz razvoja u_0 v neskončni (za iracionalni u_0) zaporedni ulomek:

$$u_0 + k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{k_3 + \dots}}}$$

Zaporedje vrednosti naslednjih členov v takšnem razvoju je statistično porazdeljeno.

†O tem in drugih podrobnosti obnašanja homogenih kozmoloških modelov te vrste lahko bralec več izve v V. A. Belinskii, E. M. Lifšic, I. M. Khalatnikov, *Adv. in Physics* **19**, 525 (1970); *Adv. in Physics* **31**, 639 (1982).

lahko poljubno določimo začetne pogoje ob poljubno izbranem času [4 v praznem prostoru, 8 v prostoru, zapolnjenem s snovjo (glej § 95)]. *

Seveda je iskanje točne rešitve za celotni prostor in za vse čase obsojeno na neuspeh. Za naše namene pa zadostuje, če poiščemo rešitev le v bližini singularnosti.

Lastnost singularnosti Friedmannove rešitve je to, da gredo prostorske razdalje proti nič v vseh smereh po enakem zakonu. Tovrstna singularnost seveda ni zadosti splošna, temveč je značilna za skupino rešitev, ki vsebujejo le tri fizikalno poljubne funkcije koordinat (glej nalogo v § 113). Omenimo še, da takšne rešitve obstajajo le v prostoru, zapolnjenem s snovjo.

Singularnost nihajoče vrste, ki smo jo opisali v prejšnjem razdelku, je splošna – obstaja rešitev Einsteinovih enačb s takšno singularnostjo, ki vsebuje zadostno množico poljubnih funkcij. Na kratko bomo opisali konstrukcijo takšne rešitve, ne da bi se spuščali v računske podrobnosti. †

Kot v homogenem modelu (§ 118) je približevanje singularnosti sestavljeno iz zaporednih serij Kasnerjevih obdobij, ki se izmenjujejo. Med vsakim obdobjem imajo vodilni členi (po $1/t$) v prostorskem metričnem tenzorju (v sinhronem opazovalnem sistemu) obliko (118.1), kjer so funkcije časa a, b, c podane z (118.10), vektorji $\mathbf{l}, \mathbf{m}$ in $\mathbf{n}$ pa so sedaj poljubne funkcije prostorskih koordinat (in ne več določene funkcije kot v homogenem modelu). Tudi p_l, p_m in p_n so sedaj funkcije (in ne več števila), ki pa so še vedno povezane z zvezo (118.11). Tako sestavljena metrika zadosti enačbama $R_0^0 = 0$ in $R_\alpha^\beta = 0$ za polje praznega prostora (do vodilnih členov natančno) na določenem končnem časovnem intervalu. Enačbe $R_\alpha^0 = 0$ nam dajo tri zveze (ki ne vsebujejo časa), ki jih morajo izpolnjevati sicer poljubne funkcije prostorskih koordinat, ki so vsebovane v $\gamma_{\alpha\beta}$. Te zveze med seboj povezujejo deset različnih funkcij: po tri komponente vsake izmed treh vektorjev $\mathbf{l}, \mathbf{m}$ in $\mathbf{n}$, in eno funkcijo časovnih eksponentov (ker so funkcije p_l, p_m in p_n že povezane z dvema pogojema (118.11)). Ko določamo število fizikalno poljubnih funkcij, moramo upoštevati, da sinhroni opazovalni sistem dopušča transformacije treh prostorskih koordinat, ki ne vplivajo na čas. Zato ima metrika skupaj $10 - 3 - 3 = 4$ poljubne funkcije, kar je ravno število, ki je potrebno za splošno rešitev polja v vakuumu.

Do zamenjave enega Kasnerjevega obdobja z drugim pride (tako kot v homogenem modelu) zato, ker so v treh izmed šestih enačb $R_\alpha^\beta = 0$ členi, ki s padajočim t naraščajo hitreje kot ostali členi, in torej igrajo vlogo motnje, ki Kasnerjevo obdobje uniči. Te enačbe imajo v splošnem obliko, ki se od (118.14) razlikuje za faktor, ki je odvisen od prostorskih koordinat, $(\mathbf{l} \cdot \nabla \times \mathbf{l} / \mathbf{l} \cdot \mathbf{m} \times \mathbf{n})$, na desni strani enačb (kjer je izmed treh eksponentov p_l, p_m in p_n negativen p_l). ‡ Ker pa je (118.14) sistem navadnih diferencialnih enačb po času, ta razlika nikakor ne vpliva na njihovo rešitev ali na zakon o premikih Kasnerjevih eksponentov (118.17), ki je posledica te rešitve, niti na druge zaključke, do katerih smo prišli v § 118. §

*Poudarimo naj, da za sistem nelinearnih enačb, kot so Einsteinove enačbe, pojem splošne rešitve ni povsem nedvoumen. Načeloma lahko obstaja več kot le en sam splošen integral, pri tem pa vsak izmed integralov ne pokriva celotne mnogoterosti možnih začetnih pogojev, temveč le neko končno območje. Obstoj splošne rešitve, ki ima singularnost, še ne izključuje možnosti obstoja drugih splošnih rešitev, ki singularnosti nimajo. Na primer brez dvoma obstaja splošna rešitev brez singularnosti, ki opisuje stabilno izolirano telo, ki nima prevelike mase.

†Te lahko bralec najde v V. A. Belinski, E. M. Lifšic, I. M. Khalatnikov, *Adv. in Physics*. **31**, 639 (1982).

‡V homogenem modelu je ta faktor enak kvadratu strukturne konstante C^{11} in je torej po definiciji konstanten.

§Če za poljubne funkcije v rešitvi zahtevamo dodatni pogoj $\mathbf{l} \cdot \nabla \times \mathbf{l} = 0$, nihljaji izginejo, tako da se Kasnerjevo obdobje razteza vse do časa $t = 0$. Vseeno pa takšna rešitev vsebuje eno funkcijo manj, kot jih potrebujemo v splošnem primeru.

Splošnost rešitve se ne zmanjša, če je prisotna tudi snov: snov vpliva na metriko preko štirih novih funkcij koordinat, ki jih potrebujemo, da določimo njeno začetno porazdelitev gostote in tri komponente njene hitrosti. Napetostni tenzor snovi T_i^k vodi k dodatnim členom v enačbah polja. Ti členi so višjega reda po $1/t$ kot vodilni členi (v kar se lahko prepričamo po analogiji z ugotovitvami iz tretje naloge v § 117 za ravni homogeni model).

Obstoj singularnosti v času je torej izjemno splošna lastnost rešitev Einsteinovih enačb. Približevanje k singularnosti je pri tem v splošnem nihajoče. * Poudariti moramo, da takšno obnašanje ni povezano s prisotnostjo snovi (in torej ni odvisno od njene enačbe stanja), temveč je značilnost prostora-časa samega. Monotona, izotropna singularnost, ki je tipična za Friedmannovo rešitev, in je odvisna od prisotnosti snovi, je torej le posebnost. Ko govorimo o singularnostih v kozmološkem smislu, imamo v mislih singularno točko, ki jo dosežemo v celotnem prostoru in ne le v nekem omejenem območju, kot pri gravitacijskem kolapsu končnega telesa. Splošnost nihajoče rešitve pa namiguje na to, da je singularnost, ki jo doseže končno telo med kolapsom onkraj dogodkovnega obzorja v sogibljevem opazovalnem sistemu, tudi takšne vrste.

Ves čas smo imeli za smer približevanja singularnosti tisto smer, pri kateri čas upada; ker pa so Einsteinove enačbe simetrične glede na obrat časa, bi se singularnosti lahko prav tako približevali v smeri naraščajočega časa. Dejansko pa zaradi fizikalne neenakosti med prihodnostjo in preteklostjo obstaja velika razlika med tem primeroma že pri sami formulaciji naloge. Singularnost v prihodnosti ima lahko fizikalen pomen le, če jo dosežemo pri poljubnih začetnih pogojih, ki veljajo ob nekem trenutku. Očitno ni nobenega razloga, da bi bila porazdelitev snovi in polja v danem obdobju razvoja vesolja natanko takšna, da bi bilo zadoščeno pogojem, da dobimo neko posebno rešitev Einsteinovih enačb.

Kar se tiče singularnosti v preteklosti, nam obravnava, ki temelji le na enačbah gravitacije, težko da splošen odgovor. Verjamemo lahko, da je rešitev, ki ustreza našemu vesolju, povezana z nekimi globokimi fizikalnimi zahtevami, ki jih ne bomo mogli poiskati z uporabo obstoječe teorije gravitacije. Takšne zahteve bomo morda našli pri nadaljnjih sintezah fizikalnih teorij. Možno bi bilo celo, da prava rešitev ustreza celo neki posebni (na primer izotropni) vrsti singularnosti.

Končno moramo omeniti še nekaj. Veljavnost Einsteinovih enačb ni samo po sebi nikakor omejena na območju majhnih razdalj in velikih gostot snovi: enačbe v tej limiti ne vodijo k nobenim notranjim protislovjem (za razliko na primer od klasičnih enačb elektrodinamike). V tem smislu je obravnava singularnosti prostorsko-časovne metrike z uporabo Einsteinovih enačb povsem pravilna. Vendar pa ni nobenega dvoma, da postanejo v tej limiti pomembni kvantni pojavi, o njih pa ne moremo reči nič v okviru obstoječe teorije. Le prihodnja sinteza teorije gravitacije in kvantne teorije bo lahko pokazala, kateri izmed rezultatov klasične teorije ostanejo smiselni. Vseeno pa ni nobenega dvoma, da ima že sama prisotnost singularnosti v rešitvah Einsteinovih enačb (tako kar se tiče kozmoloških vprašanj, kot pri kolapsu končnih teles) globok fizikalen pomen. Ne smemo pozabiti, da med gravitacijskim kolapsom dosežemo izjemno visoke gostote, ki pa so še vedno brez dvoma pravilno opisane s klasično teorijo gravitacije – že to zadostuje, da lahko govorimo o fizikalno “singularnem” (nenavadnem!) pojavu.

*Dejstvo, da v splošni rešitvi Einsteinovih enačb obstaja singularnost, je prvi pokazal R. Penrose leta 1965 z uporabo topoloških metod, ki žal ne omogočajo, da bi določili analitične značilnosti singularnosti. Te metode so predstavljene v knjigi R. Penrose, *Structure of Space-Time*, W. A. Benjamin, N.Y., 1968, kjer najdemo tudi izreke, dobljene z njihovo uporabo.

Stvarno kazalo

časovni razmik, 10

četverni prostor, 8

absoluten čas, 7

dogodek, 8

ikonal, 133

klasična limita, 7

načelo relativnost, 6

načelo relativnosti, 7

opazovalni sistem, 6

opazovalni sistem, inercialni, 6

prostor-čas, 8

razmik, 9

razmik, časovni, 10

razmik, prostorski, 11

svetlobna hitrost, 7

svetlobni stožec, 12

svetovne točke, 8

svetovnica, 8

vzročnost, 12