Nobelova nagrada za fiziko 2016

R. Žitko[1,2]

[1] *Jožef Stefan Institute, Jamova c. 39, 1000 Ljubljana, Slovenia*
[2] *Faculty of Mathematics and Physics, University of Ljubljana, Jadranska c. 19, 1000 Ljubljana, Slovenia*

Nobelova nagrada za fiziko je bila leta 2016 podeljena trem teoretičnim fizikom, ki so v sedemdesetih in osemdesetih letih prejšnjega stoletja med prvimi začeli uporabljati koncepte in orodja iz matematične veje topologije za razlago osnovnih lastnosti različnih faz kondenzirane snovi ter faznih prehodov med njimi [1]. Polovico nagrade je dobil David Thouless, preostali četrtini pa sta si delila Duncan Haldane in Michael Kosterlitz. Vsi trije so v času podelitve nagrade živeli in delali v Združenih državah Amerike, so pa sicer iz Velike Britanije (Haldanova mama je, mimogrede, slovenskega rodu). V delih, za katera so nagrajeni, so uporabili sicer zelo preproste topološke pojme (prva homotopska grupa krožnice oz. ovojno število, prvi Chernov razred in Chernovo število, druga homotopska grupa krogelne lupine), so pa s tem odprli povsem nove raziskovalne smeri v teoretični fiziki večdelčnih sistemov, ki so se naglo razvile in začele črpati tudi bolj napredna spoznanja iz topologije [2, 3]. Danes sta pojem "topoloških kvantnih števil" in razvrščanje faz snovi v različne topološke razrede postala v fiziki že kar domača, področje pa se je še dodatno razživelo po letu 2008 z odkritjem topoloških izolatorjev, to je snovi, ki so pasovni izolatorji in torej neprevodne v notranjosti, imajo pa kovinska mejna stanja in lahko zato prevajajo električni tok po svoji površini, kar je zaradi velike potencialne uporabne vrednosti vzbudilo veliko zanimanje.

I. FAZNI PREHODI BREZ ZLOMA SIMETRIJE

David Thouless je v začetku 70. let služil kot profesor matematične fizike na Univerzi v Birminghamu, kjer se mu je kot podoktorski sodelavec pridružil Michael Kosterlitz, ki se je sicer pred tem ukvarjal s fiziko delcev, a je želel poskusiti še kaj drugega. Začela sta sodelovati na vprašanju faznih prehodov v nizkodimenzionalnih sistemih ter na vlogi topoloških defektov. Topološki defekti so vzbuditve sistema, ki so homotopsko različne od njegovega osnovnega stanja in jih torej ni mogoče odstraniti na "gladek" način z zveznimi spremembami stanja. Primer so vrtinci v superfluidnem ^{4}He, domenske stene v magnetih ter dislokacije v kristalih. Thouless je ugotovil, da ima enodimenzionalni Isingov model magneta z interakcijami dolgega dosega, ki padajo kot $1/r^2$, fazni prehod pri končni temperaturi T_c, medtem ko Isingov model z interakcijami kratkega dosega ne more biti urejen pri od nič različnih temperaturah. Kosterlitz se je po svojem prihodu lotil relevantne literature, med drugim člankov Phila Andersona in sodelavcev na temo Kondovega modela nečistoče, ki se preslika na Isingov model z $1/r^2$ interakcijo, in za katerega je Anderson razvil metodo reševanja, ki je bila pravzaprav predhodnica renormalizacijske grupe, s katero se je kasneje proslavil Kenneth Wilson. Obravnava z renormalizacijsko grupo je tudi odigrala pomembno vlogo pri nadaljnjih raziskavah Kosterlitza in Thoulessa. Lotila sta se zagonetnega vprašanja urejenih faz v tako zelo tankih plasteh materialov, da jih lahko obravnavamo kot dvodimenzionalne (2D) snovi. Šlo je predvsem za tankoplastne magnete, katerih magnetizacija leži v ravnini, tanke plasti ^{4}He ter dvodimenzionalne kristale. Tedaj je bilo splošno sprejeto, da ne more biti prehodov v urejeno stanje pri končnih temperaturah v 2D sistemih z zvezno simetrijo in z interakcijami kratkega dosega, za kar so bili na voljo strogi dokazi, ki so jih bili prispevali Mermin, Wagner, Wegner in Hohenberg [4, 5]. Malo manj je bilo znano, da ti izreki pravzaprav prepovedujejo le pravi red dolgega dosega. Eksperimenti (numerični z računalniškimi simulacijami in laboratorijski na pravih efektivno dvodimenzionalnih materialih) so že tedaj namigovali na obstoj nekakšnih prehodov med različnimi fazami. Thoulessov in Kosterlitzev poglavitni dosežek je bil dokaz, da so vendarle mogoči termični fazni prehodi pri končni temperaturi tudi v dveh dimenzijah, le da nizkotemperaturna faza ne more imeti pravega reda dolgega dosega, temveč korelacije zelo počasi (potenčno) padajo z razdaljo proti nič [6]. V seriji člankov sta postavila na čvrste temelje natančno matematično teorijo tovrstnih prehodov [7]. Do nekaterih podobnih spoznanj je neodvisno in približno sočasno prišel tudi ruski fizik Vadim Berezinskii.

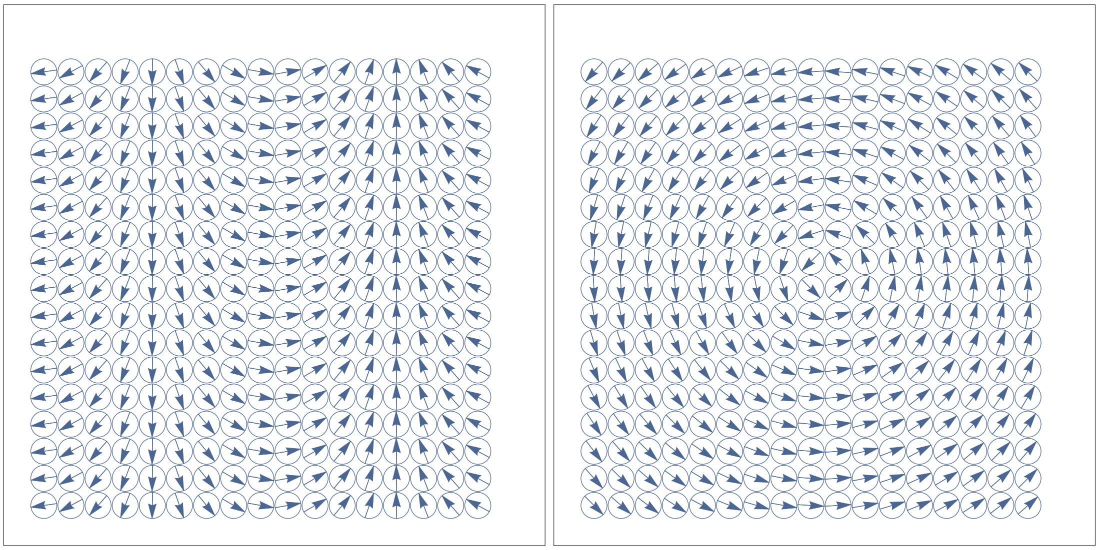
Thouless in Kosterlitz sta, med drugim, obravnavala 2D magnet, pri katerem magnetni momenti ležijo v ravnini in jih lahko opišemo s kotom ravninskega zasuka $\theta(\mathbf{r})$, kjer je $\mathbf{r}$ položaj izbrane magnetnice. Ta sistem se imenuje tudi model XY. Ima zvezno simetrijo $U(1)$, saj lahko vse magnetnice hkrati zasukamo za enak kot, ne da bi se ob tem spremenila energija sistema. Nizkoenergijske vzbuditve, spinske valove (slika 1, levo), opisuje Hamiltonov operator

$$H \propto \int \mathrm{d}^2\mathbf{r}[\nabla\theta(\mathbf{r})]^2. \tag{1}$$

Spinski valovi imajo energijo, ki je obratno sorazmerna s kvadratom njihove valovne dolžine in je torej v termodinamski limiti lahko poljubno majhna. Ker pa je Hamiltonov operator periodičen na operacijo $\theta(\mathbf{r}) \to \theta(\mathbf{r}) + 2\pi$, kot možne rešitve obstajajo tudi vrtinci (slika 1, desno). To so topološke vzbuditve z visoko energijo in jih je torej malo, kljub temu pa so pomembne, ker dodatno rušijo ureditev sistema. Vsak vrtinec nosi "topološki naboj", definiran kot ovojno število n:

$$\oint_C \mathrm{d}\theta = 2\pi n, \tag{2}$$

kjer je C zaključena pot okoli sredice vrtinca. Ovojno število meri, kolikokrat se zasuka vektor magnetizacije okoli navpične osi vzdolž poljubne krivulje C, in je celo število, pozitivno ali negativno. Največ je vrtincev z $n = 1$ in



Slika 1. Levo: spinski val. Desno: vrtinec. Puščice ponazarjajo smer magnetnega momenta v ravnini, θ.

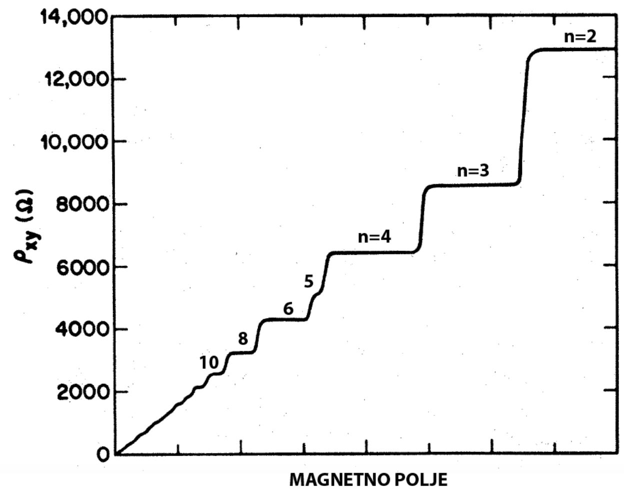
antivrtincev z $n = -1$. Posamični vrtinci imajo visoko energijo, ki narašča logaritemsko z velikostjo sistema, kar je posebnost 2D sistemov. Hkrati pa je tudi prispevek k entropiji posameznega vrtinca sorazmeren z logaritmom ploščine celotnega sistema, saj je možnih mest, kjer se vrtinec lahko nahaja, približno enako P/P_0, kjer je P ploščina sistema in P_0 efektivna ploščina enega vrtinca. Pri končnih temperaturah je stanje sistema določeno preko proste energije $F = E - TS$. Odvisno od temperature lahko prosti vrtinci prispevajo močno pozitivno ali močno negativno k celotni prosti energiji. To pomeni, da pod neko kritično temperaturo T_c prostih vrtincev sploh ni, nad njo pa se takoj začnejo pojavljati. To si lahko predstavljamo tudi tako: pod T_c so pari vrtinca z $n = 1$ in antivrtinca $n = -1$ vezani, nad T_c pa se pari razvežejo in nastanejo prosti vrtinci in antivrtinci: nered se tedaj poveča. Posledično ima pod T_c magnet kvazired dolgega dosega s potenčno upadajočimi korelacijami med vektorji magnetizacije, nad T_c pa je sistem povsem neurejen z eksponentno upadajočimi korelacijami. Fazni prehod je zvezen in zelo blag ("neskončnega reda"); anomalija v specifični toploti je tako šibka, da sploh ni merljiva. Podobni zaključki veljajo tudi za tanke plasti ^{4}He in za 2D kristale. Pri prvih obstajajo vrtinci v fazi ureditvenega parametra za superfluidno stanje, ki je kompleksno število, pri kristalih pa igrajo vlogo topoloških defektov dislokacije (linijske napake v kristalu).

Kaj te ugotovitve pomenijo, denimo, za kristale v 2D, ki naj ne bi obstajali zaradi strogega dokaza, da v dveh dimenzijah kristalni red dolgega obsega sploh ne more obstajati? Pravzaprav ni nobenega navzkrižja. V nizkotemperaturni fazi dejansko obstaja samo kvazired, ne pa pravi red: korelacijska funkcija na velikih razdaljah pade proti nič, sicer počasi - potenčno - a vendarle. Bistveno pa je, da ima kvaziurejena kristalna faza končen prožnostni modul, kar pričakujemo za snov v trdnem stanju. Termične fluktuacije sicer porušijo pravi red dolgega dosega, elastičnost pa kljub temu ostane končna. To se posploši tudi na vse druge primere iz te družine: pri nizkih temperaturah se vzpostavi rigidnost sistema na zunanje motnje, značilna za urejeno fazo, brez da bi obstajal pravi red dolgega dosega. V dveh dimenzijah ob faznem prehodu pride torej do (nezvezne) spremembe v rigidnosti, spontanega zloma simetrije pa ni. Urejena faza torej ni definirana preko kristalne rešetke, temveč preko odziva kristala na strižno obremenitev: kristal se odzove elastično in se reverzibilno deformira, medtem ko ima tekočina strižni modul enak nič in steče. Ta ključna ugotovitev pomeni, da obstajajo fazni prehodi, ki se jih ne da opisati v Landauovi paradigmi, ki temelji na razmisleku o simetrijah Hamiltonovega operatorja in Taylorjevem razvoju proste energije po parametru reda, ki opredeljuje zlom simetrije v urejeni fazi.

Meritve dvodimenzionalnih superfluidov (tanke plasti ^{4}He) so bile opravljene še pred razvojem teorije Kosterlitza in Thoulessa (KT). Opazili so nezvezni skok v gostoti superfluida, brez da bi opazili nezveznost v specifični toploti. To se ni skladalo s faznim prehodom prvega reda, je pa v skladu s teorijo KT, ki napoveduje tudi, da je velikost skoka univerzalna [8].

Kosterlitz-Thoulessov prehod v 2D superfluidno stanje so leta 2006 zaznali tudi v plinu ohlajenih atomov ^{87}Rb v ravninski optični pasti [9]. To ni enako kot Bose-Einsteinova kondenzacija in omenjena prehoda se zgodita pri različnih temperaturah. Pod prehodom KT so opazili potenčne korelacije, nad prehodom pa proste vrtince.

Teorija KT je pomembna tudi v fiziki enodimenzionalnih kvantnih sistemov in kvantnih nečistoč, saj med temi problemi najdemo takšne, ki imajo povsem enake enačbe renormalizacijske grupe kot klasični dvodimenzionalni model XY. Primer je kar paradigmatski model Kondove nečistoče, ki opisuje en sam kvantnomehanski lokalni moment



Slika 2. Odvisnost Hallove upornosti od magnetnega polja. Po viru [12].

sklopljen s kontinuumom elektronskih stanj v kovini. Če se spremeni predznak Kondove izmenjalne interakcije J_K iz antiferomagnetne v feromagnetno, pride do kvantnega faznega prehoda iz zasenčene v nezasenčeno fazo, ki je v istem univerzalnostnem razredu kot prehod KT.

II. KVANTIZIRANA PREVODNOST ODRAŽA TOPOLOGIJO PASU ZASEDENIH STANJ

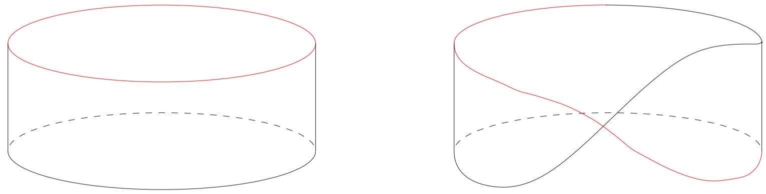
Do Hallovega pojava pride, če postavimo ploščat (efektivno dvodimenzionalen) prevodni trak v magnetno polje, usmerjeno pravokotno na ravnino traku: opazimo, da se prečno na električni tok in na magnetno polje vzpostavi električno polje, ki ravno uravnovesi magnetno Lorentzevo silo, ki deluje na prevodniške elektrone in ukrivlja njihovo pot proti robu vzorca. Nastalo električno polje je sorazmerno s tokom in z magnetnim poljem, sorazmernostni koeficient (Hallov koeficient R_H) pa je obratno sorazmeren z nabojem in številsko gostoto nosilcev naboja v prevodniku. V močnem magnetnem polju (reda 10 T) in pri nizkih temperaturah (pod 1 K) pa se elektroni začnejo obnašati povsem drugače. Kot je pokazal Landau, se elektroni v močnem polju v kvaziklasičnem opisu gibajo po krožnih tirnicah in elektronski nivoji postanejo kvantizirani kot $\epsilon_n = (n + 1/2)\hbar\omega_c$, kjer je $\omega_c = eB/m$ ciklotronska frekvenca. Ti Landauovi nivoji so makroskopsko zasedeni. Namesto linearne odvisnosti od magnetnega polja je Klaus von Klitzing s sodelavci v čistih vzorcih opazili stopničast potek Hallovega koeficienta z univerzalnimi vrednostmi, ki so odvisne le od osnovnih fizikalnih konstant [10]:

$$R_H = \frac{1}{n}\frac{h}{e_0^2}, \tag{3}$$

kjer je h Planckova konstanta, e_0 osnovni naboj, n pa celo število, glej sliko 2. Kasneje so v najčistejših vzorcih opazili stopnice tudi pri vrednostih n, ki so ulomki z nizkim števcem in imenovalcem. Pojav kvantizacije pri celih n danes imenujemo celoštevilski kvantni Hallov pojav, pri racionalnih n pa racionalni kvantni Hallov pojav [11].

Številni teoretiki so prispevali k boljšemu razumevanju celoštevilskega kvantnega Hallovega pojava: nekateri so poudarili umeritveno invarianco, drugi robna stanja in nelokalni transport, pomembno vlogo nečistoč in nereda, tu pa nas bo najbolj zanimala topološka razlaga [13, 14], ki so jo prispevali David Thouless, Mahito Kohmoto, Peter Nightingale in Marcel den Nijs (TKNN) leta 1982. TKNN so v okviru teorije linearnega odziva zapisali izraz za prevodnost sistema, ki vsebuje prispevke vseh zasedenih stanj v Landauovem nivoju, ter pokazali, da je končni rezultat kvantiziran na celoštevilski mnogokratnik e_0^2/h. Pasovno strukturo snovi lahko namreč opišemo z lastnimi energijami ϵ_n in lastnimi funkcijami (Blochovimi stanji) ψ_n Hamiltonovega operatorja v odvisnosti od točke $\mathbf{k}$ v Brillouinovi coni recipročnega prostora, ki je tu dvodimenzionalen. Izraz, ki so ga izpeljali TKNN, pravzaprav meri, kako se "ukrivljajo" valovne funkcije v odvisnosti od $\mathbf{k}$. To je izraženo preko Berryjeve zveze

$$A_j(\mathbf{k}) = -i\langle\psi_{\mathbf{k}}|\frac{\partial}{\partial k_j}|\psi_{\mathbf{k}}\rangle, \tag{4}$$



Slika 3. Levo: cilindrični trak. Desno: Möbiusov trak.

ter Berryjeve ukrivljenosti

$$F_{xy} = \frac{\partial A_x}{\partial k_y} - \frac{\partial A_y}{\partial k_x}. \tag{5}$$

Integral F po Brillouinovi coni, ki je svitek (torus) $\mathbf{T}^2$ zaradi periodičnih robnih pogojev v obeh smereh, je matematično gledano topološka invarianta imenovana prvo Chernovo število:

$$C = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}^2} \mathrm{d}^2 k \, F, \quad C \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Različne pasovne strukture lahko namreč topološko klasificirano tako, da se vprašamo, katere Hamiltonove operatorje lahko gladko preoblikujemo v druge, pod pogojem, da ima snov ves čas končno energijsko režo med zasedenimi in nezasedenimi stanji. Ekvivalenčni razredi se ločijo ravno po vrednosti C. Rečemo tudi, da je snov lahko v različnih topoloških fazah. Te se razlikujejo podobno, kot se med seboj razlikujejo cilindrični in Möbiusov trak (slika 3).

Med topološko različnimi osnovnimi stanji lahko pride do topoloških faznih prehodov. Ker ti potekajo pri absolutni ničli (temperaturi $T = 0$), gre za posebno vrsto kvantnih faznih prehodov, torej za drugačen tip prehoda kot v teoriji Kosterlitza in Thoulessa, ki opisuje termične fazne prehode pri končni temperaturi.

Zaradi topološkega izvora je število $n = C$ celo število na devet decimalk natančno. Kvantni Hallov pojav torej omogoča določiti izjemno natančen standard za upornost: od leta 1990 je zato mednarodni standard za električno upornost definiran ravno preko kvanta prevodnosti e_0^2/h. Notranjost traku je izolatorska, tokovi pa tečejo po robovih brez disipacije, saj stanja, ki bi omogočila, da se elektroni na nečistočah odbijejo nazaj, sploh ne obstajajo. Danes takšnim stanjem snovi rečemo topološki izolatorji. Od običajnih pasovnih izolatorjev se ločijo prav po od nič različnem Chernovem številu C, ki z vidika fizikalnih posledic ravno šteje koliko prevodnih robnih stanj obstaja na meji sicer neprevodnega vzorca.

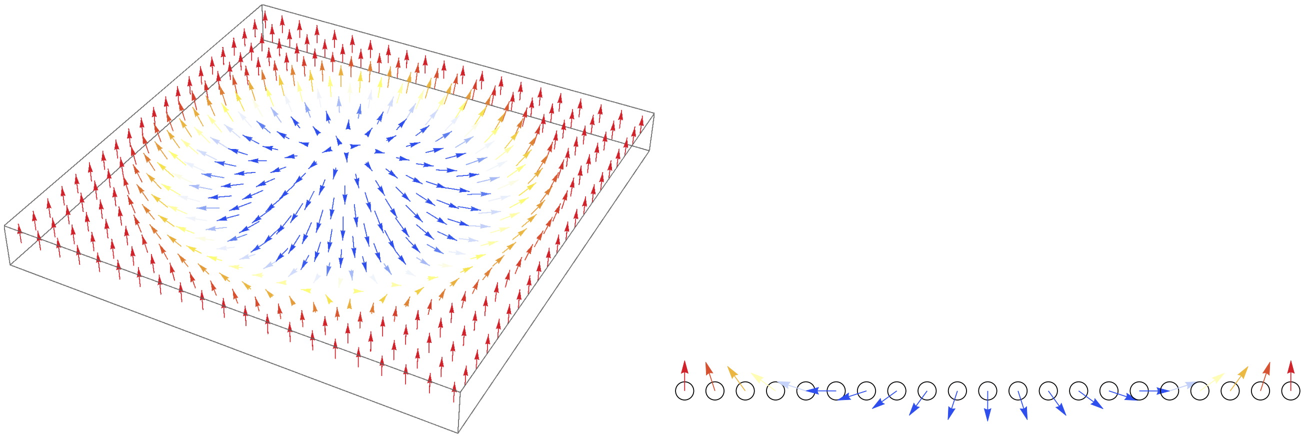
Pomembno je na področju fizike Hallovega pojava prispeval tudi Duncan Haldane. Leta 1988 je pokazal, da lahko do podobnih pojavov pride tudi v odsotnosti zunanjega magnetnega polja [15]. Predlagal je model za grafen s periodičnim magnetnim fluksom skozi šesterokotnike. To je dosegel tako, da je v model vključil matrične elemente za preskoke med drugimi najbližjimi sosednjimi mesti, ki so kompleksne količine. Takšnega sistema v tistem času niso znali realizirati v laboratoriju. Je pa Haldane s tem delom zasejal seme, iz katerega je v zadnjem desetletju zraslo celotno področje fizike topoloških izolatorjev. Model za kvantne spinske Hallove sisteme, ki se jih danes intenzivno proučuje, se da, denimo, približno razumeti kot dve kopiji Haldenovega modela, pri čemer imata spin gor in spin dol obratni vrednosti Chernovega števila. Nedavno, leta 2013, pa so tudi neposredno proučili fazo snovi, kot jo je predlagal Haldane, v tankih plasteh s kromom dopiranega $(\mathrm{Bi,Sb})_2\mathrm{Te}_3$ v odsotnosti zunanjega magnetnega polja.

III. SPINSKE VERIGE IN TOPOLOŠKI ČLEN θ

Spinske verige so dolge enodimenzionalne verige magnetnih momentov, ki so med seboj sklopljeni preko izmenjalne interakcije. Primer je, denimo, Heisenbergov model:

$$H = \sum_i J \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1}, \tag{7}$$

kjer je $\mathbf{S}_i$ spinski operator za i-to mesto verige v izbrani reprezentaciji za spin $S = 1/2, 1, 3/2, \ldots$, $J > 0$ pa je antiferomagnetna Heisenbergova izmenjalna konstanta. Prava Néelova antiferomagnetna ureditev v eni dimenziji ni mogoča zaradi močnih fluktuacij. Najbolj raziskan je primer $S = 1/2$, ki je točno rešljiv z Bethejevim nastavkom. Za ta model je že dolgo znano, da ima kvaziurejeno osnovno stanje s potenčno upadajočimi korelacijami med magnetnimi



Slika 4. Levo: konfiguracija vektorjev v dvodimenzionalnem prostoru-času (x,t) z ovojnim številom $Q=1$. Desno: prerez ob konstantnem času $t=0$. Barva označuje navpično komponento vektorja.

momenti, vzbuditve pa so brez energijske reže, kar pomeni, da za dosti dolgo verigo obstajajo vzbujena stanja s poljubno majhno dodatno energijo [16]. Duncan Haldane se je v svojem delu iz leta 1983 vprašal [17], ali nemara obstaja kakšna fundamentalna razlika med verigami s polceloštevilskim spinom $1/2, 3/2, \ldots$ in tistimi s celoštevilskim spinom $1, 2, \ldots$. Na to ga je navedel zapis nizkoenergijske efektivne kvantne teorije polja, ki se imenuje nelinearni model sigma s simetrijo $O(3)$ in ki terja dodatni topološki člen θ v akciji. Slednji izvira iz potrebe po uvedbi Berryjeve faze, ko se spinske prostostne stopnje zapiše s koherentnimi stanji pri konstrukciji teorije polja v formalizmu integrala po poteh. Oba dela akcije lahko zapišemo kot

$$S_{\mathrm{NLS}} = \frac{1}{2g}\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \left[\frac{1}{v}\left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t}\right)^2 - v\left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x}\right)^2\right], \tag{8}$$

$$S_{\mathrm{top}} = i\frac{\theta}{4\pi}\int \mathrm{d}^2x\,\mathbf{n}\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x^1}\times\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x^2}\right), \tag{9}$$

kjer je $\mathbf{n}(x,t)$ enotski vektor, ki opisuje počasno spreminjanje medmrežnega spinskega polja, v je hitrost spinskih valov, $g=2/S$ sklopitvena konstanta, $\theta = 2\pi S$ in uporabljene so Evklidske koordinate $(x^1, x^2) = (it, x)$. V izrazu za topološki del akcije S_{top} je možno razbrati ovojno število Q krogelne lupine na krogelno lupino, $\Pi^2(S^2)$, glej sliko 4. Različne spinske konfiguracije k statistični vsoti prispevajo s predfaktorjem $e^{i2\pi SQ}$. Za celoštevilske S je ta faktor vedno 1, za polceloštevilske S pa je enak $(-1)^Q$ in obravnava postane veliko bolj zapletena. Kombinacija močnih kvantnih fluktuacij v eni dimenziji in možnost izničevanja različnih prispevkov zaradi topološkega člena za polceloštevilske spine vodi k velikim razlikam v obnašanju. Veljalo naj bi, da imajo celoštevilske verige končno energijsko režo in eksponentno upadanje spinskih korelacij, polceloštevilske pa so brez reže in korelacije padajo potenčno. V končno dolgih verigah z $S \geq 1$ naj bi na obeh koncih verige obstajala roba stanja s spinom $S - 1/2$. To je še zlasti pomembno v verigah s celoštevilskim spinom, saj so to edine vzbuditve pri zelo nizkih energijskih skalah.

Ker je Haldane do svojih sklepov prišel v limiti velikega spina, $S \to \infty$, se ja postavilo vprašanje o njegovi splošnosti in veljavnosti za majhen spin. Haldanova domneva je bila zato sprva sprejeta z veliko mero skepticizma. Splošno sprejeta slika je namreč bila, da se spinske verige z različnim spinom ne razlikujejo bistveno. Kmalu pa so se pojavili prvi posredni dokazi preko numeričnih simulacij ter tudi analitični argumenti. Ian Affleck, Tom Kennedy, Elliott Lieb in Hal Tasaki (AKLT) so predlagali točno rešljiv model za $S=1$ [18]:

$$H_{\mathrm{AKLT}} = \sum_i J\left[\mathbf{S}_i\cdot\mathbf{S}_{i+1} + \frac{1}{3}\left(\mathbf{S}_i\cdot\mathbf{S}_{i+1}\right)^2\right]. \tag{10}$$

Dokazali so, da ima ta rahlo modificirani Heisenbergov model končno energijsko režo, eksponentno upadanje korelacij ter da obstajajo robna stanja s spinom $1/2$ (kar je lep primer frakcionalizacije kvantnih števil, saj imajo osnovne vzbuditve sicer spin 1), vse torej v skladu s Haldanovo domnevo. Kasneje so napovedana robna stanja v celoštevilskih spinskih verigah zaznali tudi v eksperimentih na $CsNiCl_3$ [19].

IV. ZAKLJUČEK: TOPOLOGIJA V SODOBNI STATISTIČNI FIZIKI

Nobelovi nagrajenci za fiziko v letu 2016 so kot prvi pokazali, da lahko stanja snovi razvrščamo ne zgolj po njihovih simetrijskih lastnostih temveč tudi po topoloških in s tem odprli nov pogled na razlikovanje med fazami in na prehode med njimi. V zadnjih letih se veliko pozornosti posveča topološkim izolatorjem in superprevodnikom [20, 21]. Med slednje se uvršča model verige Kitaeva, ki je ob ustrezni izbiri parametrov topološki superprevodnik s simetrijo p, za katerega je znano, da ima na svojih robovih robni stanji, ki se obnašata kot Majoranova fermiona. Oba skupaj se obnašata kot dvonivojski sistem, v katerega lahko shranimo en kubit podatkov, ker pa sta Majoranova fermiona lokalizirana vsak na svojem koncu verige, sta imuna na motnje iz bližnje okolice. Zaradi tega se pričakuje, da lahko v takšnih sistemih na robusten način hranimo kvantno informacijo in da jo bomo v prihodnje morda lahko celo obdelovali. To bi lahko bila osnova za topološko kvantno računalništvo [22].

[1] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics* (Taylor and Francis, 2003).
[2] X.-G. Wen, *Quantum field theory of many-body systems* (Oxford University Press, 2004).
[3] A. Altland and B. Simons, *Condensed matter field theory* (Oxford University Press, 2010).
[4] N. D. Mermin and H. Wagner, "Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one- or two-dimensional isotropic Heisenberg models," Phys. Rev. Lett. **17**, 1133 (1966).
[5] F. Wegner, "Spin-ordering in a planar classical Heisenberg model," Z. für Physik **206**, 465 (1967).
[6] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, "Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems," J. Phys. C: Solid State Physics **6**, 1181 (1973).
[7] J. M. Kosterlitz, "The critical properties of the two-dimensional XY model," J. Phys. C: Solid State Physics **7**, 1046 (1974).
[8] D. R. Nelson and J. M. Kosterlitz, "Universal jump in the superfluid density of two-dimensional superfluids," Phys. Rev. Lett. **39**, 1201 (1977).
[9] Z. Hadzibabic, P. Krüger, M. Cheneau, B. Battelier, and J. Dalibard, "Berezinskii–Kosterlitz–Thouless crossover in a trapped atomic gas," Nature **441**, 1118 (2006).
[10] K. von Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper, "New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantum Hall resistance," Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980).
[11] Z. F. Ezawa, *Quantum Hall effects* (World Scientific, 2008).
[12] M. Paalanen, D. Tsui, and A. Gossard, "Quantized Hall effect at low temperatures," Phys. Rev. B **25**, 5566 (1982).
[13] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs, "Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential," Phys. Rev. Lett. **49**, 405 (1982).
[14] Q. Niu, D. J. Thouless, and Y.-S. Wu, "Quantized Hall conductance as a topological invariant," Phys. Rev. B **31**, 3372 (1985).
[15] F. D. M. Haldane, "Model for a quantum Hall effect without Landau levels: Condensed-matter realization of the "parity anomaly"," Phys. Rev. Lett. **61**, 2015 (1988).
[16] Thierry Giamarchi, *Quantum physics in one dimension* (Oxford University Press, 2003).
[17] F. D. M. Haldane, "Nonlinear field theory of large-spin Heisenberg antiferromagnets: Semiclassically quantized solitons of the one-dimensional easy-axis neel state," Phys. Rev. Lett. **50**, 1153 (1983).
[18] I. Affleck, T. Kennedy, E. H. Lieb, and H. Tasaki, "Rigorous results on valence-bond ground states in antiferromagnets," Phys. Rev. Lett. **59**, 79 (1987).
[19] M. Kenzelmann, R. A. Cowley, W. J. L. Buyers, Z. Tun, R. Coldea, and M. Enderle, "Properties of Haldane excitations and multiparticle states in the antiferromagnetic spin-1 chain compound csnicl$_3$," Phys. Rev. B **66**, 024407 (2002).
[20] B. A. Bernevig, *Topological insulators and topological superconductors* (Princeton University Press, 2013).
[21] J. K. Asbóth, L. Oroszlány, and A. Pályi, *A short course on topological insulators* (Springer, 2016).
[22] J. K. Pachos, *Introduction to topological quantum computation* (Cambridge University Press, 2012).